



Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
de Recursos Naturais da Amazônia

## **ANÁLISE DO ESCOAMENTO E DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR DE FLUIDOS VISCOELÁSTICOS UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA**

**Marcelo José Raiol Souza**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, Instituto de Tecnologia - ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais.

Orientador: Emanuel Negrão Macêdo

Orientador: Carlos Edilson de A. Maneschy

Belém

Dezembro de 2010

**ANÁLISE DO ESCOAMENTO E DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR DE  
FLUIDOS VISCOELÁSTICOS UTILIZANDO A TÉCNICA DA  
TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA**

Marcelo José Raiol Souza

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA AMAZÔNIA (PRODERNA/ITEC) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS.

Aprovada por:

---

Prof. Emanuel Negrão Macêdo, D.Sc.  
(FEQ/UFPA-Orientador)

---

Prof. Carlos Edilson de Almeida Maneschy, Ph.D.  
(FEM/UFPA-Orientador)

---

Prof. João Nazareno Nonato Quaresma, D.Sc.  
(FEQ/UFPA)

---

Prof. João Alves de Lima, D.Sc.  
(DEM/UFRN)

---

Prof. Luiz Mariano Pereira, D.Sc.  
(CENMEC/UNIVASF)

---

Prof. Erb Ferreira Lins, D.Sc.  
(FEM/UFPA)

BELÉM, PA – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2010

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**Instituto de Tecnologia/Programa de Pós-graduação em**  
**Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia**

---

Souza, Marcelo José Raiol

Análise do escoamento e da transferência de calor de fluidos viscoelásticos utilizando a técnica da transformada integral generalizada/Marcelo José Raiol Souza; orientadores, Emanuel Negrão Macêdo, Carlos Edilson de Almeida Maneschky. - Belém, 2010

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, 2010

1. Escoamento 2. Transferência de Calor 3. Fluidos viscoelásticos  
4. Técnica da Transformada Integral Generalizada I. Título

CDD 22. ed. 660.28

---

## AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado vida e sabedoria para tentar entender um mundo ainda inexplorado da natureza que nos cerca.

Ao meu avô e ídolo Aleixo Caetano de Souza (*in memoriam*), pois seus ensinamentos ainda trago comigo e me motivam sobremaneira a qualquer desafio que a vida me impõe.

A minha avó e motivadora Maria da Conceição da Silva Souza (*in memoriam*), que com sua sabedoria e determinação soube conduzir meus passos nos caminhos árduos da busca do conhecimento.

A minha mulher Rosemare da Silva e Silva que me compreendeu, deu força e carinho nas madrugadas intermináveis em que me entregava à busca da verdade nas entrelinhas da ciência.

Aos meus filhos Alan Rodrigo Silva Souza, Maurício Renoir Silva Souza, Marcelle Cristine Silva Souza e Amanda Júlia e Silva Souza pela compressão da ausência neste projeto de vida.

Ao meu orientador e amigo Emanuel Negrão Macêdo que com sua simplicidade, orientação e compreensão me conduziram ao término de mais um trabalho.

Ao meu amigo João Nazareno Nonato Quaresma pelas sábias orientações nos momentos difíceis do trabalho.

Aos amigos José Antônio de Castro e Silva e Cléo Márcio Araújo pelo incentivo nos longos papos regados a muita cerveja nos botecos Belemenses.

Aos Professores Cláudio Fialho, Cláudio Blanco, Evaldinei, José Antônio e Erb Lins pelas discussões elucidativas sobre pesquisa, ajuda no processo de equacionamento e levantamento bibliográfico.

Aos amigos do PRODERNA, Bené, Clauderino, Nelson, Carlos Célio, Sil, Edilson, Jean, Paulão, Inaldo, Luiz, Sr. Ribamar, Cléver pelo incentivo e ajuda no término do trabalho.

Ao meu compadre e amigo Pedro Paulo Queiróz por me escutar e me incentivar neste projeto de vida que começou a ser delineado no início do ano de 2005 e teve sua conclusão em Dezembro de 2010.

Aos saudosos amigos da operação, manutenção e engenharia da Jari Celulose por acreditarem na conclusão deste projeto.

Aos professores da UEPA André Clementino, Sandro Mesquita, Manuel de Paula, Jorge Fonseca, João Sandoval e Glayce Karen por acreditarem no potencial de um caboclo marajoara.

A todos que de alguma forma contribuíram para o término do trabalho.

Resumo da Tese apresentada ao PRODERNA/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais (D.Eng.)

**ANÁLISE DO ESCOAMENTO E DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR DE  
FLUIDOS VISCOELÁSTICOS UTILIZANDO A TÉCNICA DA  
TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA**

**Marcelo José Raiol Souza**

Dezembro/2010

Orientador: Emanuel Negrão Macêdo

Orientador: Carlos Edilson de Almeida Maneschy

Área de Concentração: **Transformação de Recursos Naturais**

Neste trabalho, três problemas de escoamento e transferência de calor de fluidos não newtonianos viscoelásticos foram estudados através da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada. O primeiro problema abordado analisa o escoamento e a transferência de calor de um fluido viscoelástico de segundo grau sobre uma placa plana em estiramento contínuo linear, onde a placa está sujeita à injeção ou sucção. O segundo problema analisa o escoamento e a transferência de calor de um fluido viscoelástico de terceiro grau na região de entrada de um canal de placas paralelas com injeção e sucção simultâneas. O terceiro problema analisa o escoamento e a transferência de calor de um fluido viscoelástico de segundo grau modificado na região de entrada de um canal de placas paralelas com injeção ou sucção. Em todos os problemas, equações diferenciais parciais de camada limite são utilizadas para analisar os fenômenos. Para cada problema, as equações de camada limite são transformadas em um sistema de equações diferenciais ordinárias pelo uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada. A solução dos sistemas de equações obtidos nos três problemas é realizada pelo uso de rotinas numéricas. Resultados para o campo de velocidade e temperatura para os três problemas em função de parâmetros de interesse são discutidos e comparados com a literatura disponível.

Abstract of Thesis presented to PRODERNA/UFGA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Natural Resources Engineering (D.Eng.)

**FLOW AND HEAT TRANSFER ANALYSIS OF VISCOELASTIC FLUIDS  
USING GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM TECHNIQUE**

**Marcelo José Raiol Souza**

December/2010

Advisor: Emanuel Negrão Macêdo

Advisor: Carlos Edilson de Almeida Maneschy

Research Area: Transformation of Natural Resources

In this work three problems of flow and heat transfer of non-Newtonian viscoelastic fluids were studied through application of the Generalized Integral Transform Technique. The first approached problem analyzes the flow and the transfer of heat of a second grade viscoelastic fluid on a planar plate in linear continuous stretching, where the plate is subject to injection or suction. The second problem analyzes the flow and the heat transfer of a third grade viscoelastic fluid in the entrance of a channel of parallel plates with injection and suction simultaneous. The third problem analyzes the flow and the heat transfer of a modified second grade viscoelastic fluid in the entrance of a channel of parallel plates with injection or suction. In all problems, partial differential equations of boundary layer are used to analyze the phenomenon. The boundary layer equations are transformed in an ordinary differential equations system for the use of the Generalized Integral Transform Technique. The solution of the equations systems obtained in the three problems is accomplished by the use of numeric routines. Results for the velocity and temperature field for the three problems in function of parameters of interest are discussed and compared with the available literature.

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 – MOTIVAÇÃO.....	1
1.2 – OBJETIVOS.....	6
1.2.1 – OBJETIVO GERAL.....	6
1.2.2 – OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	7
1.3 – SÍNTESE DO TRABALHO.....	7
<b>CAPÍTULO 2 – A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA.....</b>	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO 3 - ESCOAMENTO E TRANSFERÊNCIA DE CALOR DE UM FLUIDO DE SEGUNDO GRAU SOBRE UMA PLACA PLANA ESTIRADA COM INJEÇÃO OU SUÇÃO.....</b>	<b>16</b>
3.1 - INTRODUÇÃO.....	16
3.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	18
3.3 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	25
3.3.1 - EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA FLUIDO VISCOELÁSTICO DE SEGUNDO GRAU.....	27
3.3.2 - EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA PARA O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO DE SEGUNDO GRAU.....	29
3.3.3 - EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA	31
3.3.4 - DETERMINAÇÃO DE CORRELAÇÃO PARA ESTIMAR A ESPESSURA DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA.....	35
3.3.5 - ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA.....	39
3.3.6 - TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA.....	40
3.3.7 - SOLUÇÃO VIA GITT.....	41
3.3.8 - ALGORITMO COMPUTACIONAL.....	54
3.4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	56
3.4.1 - CAMPO DE VELOCIDADE.....	57
3.4.2 - CAMPO DE TEMPERATURA.....	70
3.4.3 - ESTIMATIVA DE ESPESSURA DE CAMADA LIMITE	

HIDRODINÂMICA.....	77
3.5 - CONCLUSÃO.....	82
<b>CAPÍTULO 4 - ESCOAMENTO E TRANSFERÊNCIA DE CALOR DE UM FLUIDO DE TERCEIRO GRAU NA REGIÃO DE ENTRADA DE UM CANAL DE PLACAS PARALELAS COM INJEÇÃO E SUÇÃO SIMULTÂNEAS.....</b>	<b>84</b>
4.1 - INTRODUÇÃO.....	84
4.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	85
4.3 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	88
4.3.1 - EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA UM FLUIDO VISCOELÁSTICO DE TERCEIRO GRAU.....	90
4.3.2 - EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO DA MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA PARA O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO DE TERCEIRO GRAU.....	90
4.3.3 - EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA.....	92
4.3.4 - ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA.....	93
4.3.5 - FORMULAÇÃO DA CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA POR FUNÇÃO CORRENTE.....	96
4.3.6 - SOLUÇÃO VIA GITT.....	98
4.3.7 - ALGORITMO COMPUTACIONAL.....	111
4.4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	113
4.4.1 - CAMPO DE VELOCIDADE.....	114
4.4.2 - CAMPO DE TEMPERATURA.....	129
4.5 - CONCLUSÃO.....	140
<b>CAPÍTULO 5 - ESCOAMENTO E TRANSFERÊNCIA DE CALOR DE UM FLUIDO DE SEGUNDO GRAU MODIFICADO NA REGIÃO DE ENTRADA DE UM CANAL DE PLACAS PARALELAS COM INJEÇÃO OU SUÇÃO.....</b>	<b>141</b>
5.1 - INTRODUÇÃO.....	141
5.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	142
5.3 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	143
5.3.1 - EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA UM FLUIDO VISCOELÁSTICO.....	

DE SEGUNDO GRAU MODIFICADO.....	145
5.3.2 - EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO DA MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA PARA O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO DE SEGUNDO GRAU MODIFICADO.....	145
5.3.3 - EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA.....	147
5.3.4 - ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA.....	150
5.3.5 - FORMULAÇÃO DA CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA POR FUNÇÃO CORRENTE.....	153
5.3.6 - SOLUÇÃO VIA GITT.....	155
5.3.7 - ALGORITMO COMPUTACIONAL.....	168
5.4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	170
5.4.1 - CAMPO DE VELOCIDADE.....	170
5.4.2 - CAMPO DE TEMPERATURA.....	181
5.5 - CONCLUSÃO.....	193
<b>CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>195</b>
<b>REFÊRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>197</b>
<b>APÊNDICE I.....</b>	<b>208</b>
<b>APÊNDICE II.....</b>	<b>227</b>
<b>APÊNDICE III.....</b>	<b>228</b>
<b>APÊNDICE IV.....</b>	<b>236</b>
<b>APÊNDICE V.....</b>	<b>240</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1</b>	Esquema básico do processo de secagem de celulose.....	4
<b>Figura 3.1</b>	Diferença de tensões normais para fluidos viscoelásticos (Solução 10,5 % PIB) (MAGNO, 1998).....	17
<b>Figura 3.2</b>	Esquema básico da formação das camadas limites hidrodinâmica e térmica induzido pelo estiramento da placa plana sujeita a injeção ou sucção.....	26
<b>Figura 3.3</b>	a) Esquema de formação da espessura da camada limite hidrodinâmica no escoamento sobre uma placa plana em repouso; b) Esquema de formação da camada limite hidrodinâmica no escoamento induzido por uma placa plana estirada (Fonte: PAPANASTASIOU <i>et al.</i> , 2000; adaptado).....	26
<b>Figura 3.4</b>	Esquema de escoamento de um fluido sobre placa plana sujeita a ação de forças iguais e de sentido opostos.....	34
<b>Figura 3.5</b>	Esquema de escoamento de um fluido sobre placa plana estirada de um bocal extrusor (Fonte: SURMA DEVI e NATH, 1990; adaptado).....	34
<b>Figura 3.6</b>	Perfis da componente de velocidade $u$ adimensionalizada para as camadas limites hidrodinâmicas de BLASIUS e SAKIADIS (Fonte: PAPANASTASIOU <i>et al.</i> , 2000; adaptado).....	37
<b>Figura 3.7</b>	Comparação entre perfis de velocidade da componente $V$ calculados no presente trabalho e disponíveis na literatura para vários valores de $K$ na posição $X = 1$ .....	67
<b>Figura 3.8</b>	Perfis de velocidade da componente $U$ para as posições $X = 0,02$ , $X = 0,5$ e $X = 1$ , com $K = 0,01$ e $F = 0$ .....	68
<b>Figura 3.9</b>	Perfis de velocidade da componente $U$ para as posições $X = 0,02$ , $X = 0,5$ e $X = 1$ , com $K = 10$ e $F = 0$ .....	68
<b>Figura 3.10</b>	Perfis de velocidade da componente $V$ para vários valores de $F$ e $K = 1$ .....	69
<b>Figura 3.11</b>	Comparação entre os perfis de temperatura adimensional obtidos pela GITT e a literatura disponível para vários valores de $K$ com $Pr = 1$ e $F = 0$ .....	74

<b>Figura 3.12</b>	Comparação entre os perfis de temperatura adimensional obtidos pela GITT e a literatura disponível para vários valores de Pr com $K = 1$ e $F = 0$ .....	74
<b>Figura 3.13</b>	Perfil de temperatura em função da velocidade de injeção/sucção com $K = 1$ e $Pr = 1$ .....	75
<b>Figura 4.1</b>	Relações típicas entre tensão de cisalhamento e taxa de deformação em fluidos não newtonianos com comportamento pseudoplástico ou dilatante.....	85
<b>Figura 4.2</b>	Geometria da formação da camada limite e sistema de coordenadas do problema analisado.....	89
<b>Figura 4.3</b>	Comparação entre o perfil de velocidade completamente desenvolvido obtido pela GITT e o trabalho de ARIEL (2003) para o caso newtoniano e $R_v = 0,005$ .....	121
<b>Figura 4.4</b>	Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores do parâmetro viscoelástico $K_1$ , com $K_3 = 0$ e $R_v = 0,005$ .....	124
<b>Figura 4.5</b>	Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores do parâmetro viscoelástico $K_3$ , com $K_1 = 0,0001$ e $R_v = 0,005$ .....	125
<b>Figura 4.6</b>	Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores do parâmetro viscoelástico $K_3$ , com $K_1 = 0,0003$ e $R_v = 0,005$ .....	126
<b>Figura 4.7</b>	Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de injeção e sucção simultâneas, com $K_1 = 0,0001$ e $K_3 = 1.10^{-5}$ .....	128
<b>Figura 4.8</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1.10^{-7}$ , $Ec = 0$ , $R_v = 0,001$ , variando Pr.....	134
<b>Figura 4.9</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1.10^{-7}$ , $Ec = 0,2$ , $R_v = 0,001$ , variando Pr.....	134
<b>Figura 4.10</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1.10^{-7}$ , $Pr = 0,8$ , $R_v = 0,001$ , variando $Ec$ .....	136

<b>Figura 4.11</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1 \cdot 10^{-7}$ , $Pr = 0,8$ , $Rv = 0,01$ , variando $Ec$ .....	136
<b>Figura 4.12</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1 \cdot 10^{-7}$ , $Pr = 50$ , $Ec = 0$ , variando $Rv$ ....	137
<b>Figura 4.13</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1 \cdot 10^{-7}$ , $Pr = 50$ , $Ec = 0,2$ , variando $Rv$ ..	137
<b>Figura 4.14</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0002$ , $Pr = 0,8$ , $Ec = 0,1$ , $Rv = 0,005$ , variando $K_3$ .	138
<b>Figura 4.15</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0002$ , $Pr = 5$ , $Ec = 0,1$ , $Rv = 0,005$ , variando $K_3$ ....	138
<b>Figura 4.16</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_3 = 0$ , $Pr = 1$ , $Ec = 0,1$ , $Rv = 0,000001$ , variando $K_1$ .....	139
<b>Figura 5.1</b>	Geometria da formação da camada limite e sistema de coordenadas do problema analisado.....	144
<b>Figura 5.2</b>	Comparação entre o perfil de velocidade nas regiões de entrada e completamente desenvolvida obtido pela GITT e o trabalho de MAGNO (1998) para o caso $n = 0,75$ .....	175
<b>Figura 5.3</b>	Comparação entre o perfil de velocidade nas regiões de entrada e completamente desenvolvida obtido pela GITT e o trabalho de MAGNO (1998) para o caso $n = 3$ .....	175
<b>Figura 5.4</b>	Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de $n$ , com $K_1 = 0,0001$ e $Rv = 0,00003$ .....	177
<b>Figura 5.5</b>	Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de $n$ , com $K_1 = 0,0001$ e $Rv = -0,00003$ .....	178
<b>Figura 5.6</b>	Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de $K_1$ com $n = 0,8$ e $Rv = 0$ .....	179
<b>Figura 5.7</b>	Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de $K_1$ com $n = 1,4$ e $Rv = 0$ .....	180
<b>Figura 5.8</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0003$ , $n = 0,8$ , $Ec = 0$ , $Rv = 0,00003$ , variando $Pr$ ...	189
<b>Figura 5.9</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0003$ , $n = 0,8$ , $Ec = 0$ , $Rv = -0,00003$ , variando $Pr$ ..	189

<b>Figura 5.10</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0003$ , $n = 1,4$ , $Ec = 0$ , $Rv = 0,00003$ , variando Pr...	190
<b>Figura 5.11</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0003$ , $n = 1,4$ , $Ec = 0$ , $Rv = -0,00003$ , variando Pr..	190
<b>Figura 5.12</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0003$ , $n = 0,8$ , $Pr = 0,8$ , $Ec = 0,2$ , com injeção ou sucção.....	191
<b>Figura 5.13</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $K_1 = 0,0003$ , $n = 1,4$ , $Pr = 50$ , $Ec = 0,2$ , com injeção ou sucção.....	192
<b>Figura 5.14</b>	Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para $n = 0,8$ , $Pr = 0,8$ , $Ec = 0,2$ , $Rv = 0,00003$ (sucção), variando $K_1$ .....	193

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 3.1</b>	Convergência dos potenciais de velocidade e temperatura para em função de $\Delta\eta$ para $NV = NT = 48$ , $K = 0,01$ , $Rv = 0$ , $Pr = 1$ , $d = 0,35$ na posição $X = 0,02$ e $Y = 0,0179131$ .....	59
<b>Tabela 3.2</b>	Convergência dos potenciais de velocidade e temperatura para em função de $\Delta\eta$ para $NV = NT = 48$ , $K = 10$ , $Rv = 0$ , $Pr = 1$ , $d = 0,14$ na posição $X = 0,02$ e $Y = 0,0447829$ .....	59
<b>Tabela 3.3</b>	Convergência da componente de velocidade (-) $V(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 0,01$ , $F = 0$ e $d = 0,495$ .....	60
<b>Tabela 3.4</b>	Convergência da componente de velocidade $U(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 0,01$ , $F = 0$ e $d = 0,495$ .....	61
<b>Tabela 3.5</b>	Convergência da componente de velocidade (-) $V(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 10$ , $F = 0$ e $d = 0,1507$ .....	62
<b>Tabela 3.6</b>	Convergência da componente de velocidade $U(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 10$ , $F = 0$ e $d = 0,1507$ .....	63
<b>Tabela 3.7</b>	Convergência da componente de velocidade (-) $V(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 1$ , $F = -1$ (placa com sucção) e $d = 0,2775$ .....	65
<b>Tabela 3.8</b>	Convergência da componente de velocidade (-) $V(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 1$ , $F = 0,1$ (placa com injeção) e $d = 0,36$ .....	66
<b>Tabela 3.9</b>	Convergência do potencial de temperatura adimensional $\Theta(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 0,01$ , $F = 0$ , $Pr = 1$ e $d = 0,35$ .....	70
<b>Tabela 3.10</b>	Convergência do potencial de temperatura adimensional $\Theta(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 10$ , $F = 0$ , $Pr = 1$ e $d = 0,14$ .....	71
<b>Tabela 3.11</b>	Convergência do potencial de temperatura adimensional $\Theta(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 1$ , $F = -1$ , $Pr = 0,5$ e $d = 0,35$ .....	72
<b>Tabela 3.12</b>	Convergência do potencial de temperatura adimensional $\Theta(X, Y)$ em função de $Y$ para várias posições de $X$ com $K = 1$ , $F = 0,1$ , $Pr = 1$ e $d = 0,35$ .....	73

<b>Tabela 3.13</b>	Resultados para as condições de contorno simétricas em $X = 0,00001$ e $\eta = 0,00001$ .....	77
<b>Tabela 3.14</b>	Valores da componente de velocidade $V$ em função do parâmetro viscoelástico $K$ obtidos por solução exata (ARIEL, 1995).....	79
<b>Tabela 3.15</b>	Erros relativos da espessura de camada limite hidrodinâmica entre os valores de ARIEL (1995) e os calculados pela equação (3.128) para vários valores de $K$ .....	81
<b>Tabela 4.1</b>	Convergência da componente de velocidade $U$ no centro do canal para $K_1 = 0,0001$ , $K_3 = 0$ e vários valores de $Rv$ .....	115
<b>Tabela 4.2</b>	Convergência da componente de velocidade $U$ no centro do canal para $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 0$ e vários valores de $Rv$ .....	116
<b>Tabela 4.3</b>	Convergência da componente de velocidade $U$ no centro do canal para $K_1 = 0,0003$ , $K_3 = 0$ e vários valores de $Rv$ .....	117
<b>Tabela 4.4</b>	Convergência da componente de velocidade $U$ no centro do canal para $K_1 = 0,0001$ , $K_3 = 1.10^{-5}$ e vários valores de $Rv$ .....	118
<b>Tabela 4.5</b>	Convergência da componente de velocidade $U$ no centro do canal para $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1.10^{-5}$ e vários valores de $Rv$ .....	119
<b>Tabela 4.6</b>	Convergência da componente de velocidade $U$ no centro do canal para $K_1 = 0,0003$ , $K_3 = 1.10^{-5}$ e vários valores de $Rv$ .....	120
<b>Tabela 4.7</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 0,8$ , $Ec = 0$ , $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1.10^{-5}$ e vários valores de $Rv$ .....	130
<b>Tabela 4.8</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 0,8$ , $Ec = 0,2$ , $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1.10^{-5}$ e vários valores de $Rv$ .....	131
<b>Tabela 4.9</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 50$ , $Ec = 0$ , $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1.10^{-5}$ e vários valores de $Rv$ .....	132
<b>Tabela 4.10</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 50$ , $Ec = 0,2$ , $K_1 = 0,0002$ , $K_3 = 1.10^{-5}$ e vários valores de $Rv$ .....	133
<b>Tabela 5.1</b>	Convergência da componente de velocidade $U$ no centro do canal para $K_1 = 0,0001$ , $n = 0,8$ e valores de injeção e sucção.....	171
<b>Tabela 5.2</b>	Convergência da componente de velocidade $U$ no centro do canal para $K_1 = 0,0001$ , $n = 1,4$ e valores de injeção e sucção.....	172
<b>Tabela 5.3</b>	Convergência da componente de velocidade $U$ no centro do canal para $K_1 = 0,0003$ , $n = 0,8$ e valores de injeção e sucção.....	173

<b>Tabela 5.4</b>	Convergência da componente de velocidade U no centro do canal para $K_1 = 0,0003$ , $n = 1,4$ e valores de injeção e sucção.....	174
<b>Tabela 5.5</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 0,8$ , $Ec = 0$ , $K_1 = 0,0003$ , $n = 0,8$ e valores de injeção e sucção.....	181
<b>Tabela 5.6</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 0,8$ , $Ec = 0$ , $K_1 = 0,0003$ , $n = 1,4$ e valores de injeção e sucção.....	182
<b>Tabela 5.7</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro de canal para $Pr = 0,8$ , $Ec = 0,2$ , $K_1 = 0,0003$ , $n = 0,8$ e valores de injeção e sucção.....	183
<b>Tabela 5.8</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 0,8$ , $Ec = 0,2$ , $K_1 = 0,0003$ , $n = 1,4$ e valores de injeção e sucção.....	184
<b>Tabela 5.9</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 50$ , $Ec = 0$ , $K_1 = 0,0003$ , $n = 0,8$ e valores de injeção e sucção.....	185
<b>Tabela 5.10</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 50$ , $Ec = 0$ , $K_1 = 0,0003$ , $n = 1,4$ e valores de injeção e sucção.....	186
<b>Tabela 5.11</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para $Pr = 50$ , $Ec = 0,2$ , $K_1 = 0,0003$ , $n = 0,8$ e valores de injeção e sucção.....	187
<b>Tabela 5.12</b>	Convergência da temperatura adimensional no centro de canal para $Pr = 50$ , $Ec = 0,2$ , $K_1 = 0,0003$ , $n = 1,4$ e valores de injeção e sucção.....	188

### NOMENCLATURA DO CAPÍTULO 3

<b>A</b>	Constante de proporcionalidade na equação (3.31)
<b>A<sub>n</sub></b>	Tensores cinemáticos de Rivlin-Ericksen
<b>A<sub>ij</sub><sup>*</sup></b>	Coefficiente definido na equação (3.85)
<b>a<sub>m</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.91.a)
<b>B</b>	Constante de proporcionalidade na equação (3.31)
<b>B<sub>i</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.86)
<b>B</b>	Tensor que representa a força de corpo
<b>b<sub>m</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.91.b)
<b>C<sub>ij</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.100)
<b>c<sub>p</sub></b>	Calor específico do fluido
<b>c<sub>m</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.95.a)
<b>c</b>	Constante de estiramento da placa
<b>D<sub>ij</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.101)
<b>D</b>	Parte simétrica do tensor deformação
<b>d</b>	Parâmetro de ajuste de escala
<b>d<sub>m</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.95.b)
<b>E<sub>i</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.102)
<b>Err</b>	Cálculo do erro relativo definido na equação (3.129)
<b>e<sub>i</sub>, e<sub>j</sub>, e<sub>k</sub>, e<sub>m</sub></b>	Versores das componentes do tensor
<b>F<sub>d</sub></b>	Gradiente deformação
<b>F</b>	Parâmetro de estudo que representa situações de injeção ou sucção $(F = V_0 \frac{Re^{1/2}}{cL})$
<b>F<sub>j</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.92)
<b>F<sup>*</sup></b>	Matriz dos coeficientes <b>A<sub>ij</sub><sup>*</sup></b> , <b>C<sub>ij</sub></b> , <b>D<sub>ij</sub></b>
<b>G</b>	Matriz dos coeficientes <b>B<sub>i</sub></b> e <b>E<sub>i</sub></b>
<b>g<sub>m</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.105.a)
<b>H</b>	Coefficiente definido na equação (3.96)
<b>h<sub>m</sub></b>	Coefficiente definido na equação (3.105.b)
<b>I</b>	Tensor Identidade
<b>k</b>	Condutibilidade térmica do fluido

$k_1$	Parâmetro dimensional Viscoelástico de estudo
$K$	Parâmetro adimensionalizado Viscoelástico de Estudo ( $K = k_1 \frac{Re}{L^2}$ )
$L$	Comprimento característico da placa
$N$	Ordem do truncamento onde se avaliam os coeficientes $a_m$ e $b_m$
$N_i$	Norma da autofunção do problema auxiliar de velocidade definida na eq. (3.71)
$NT$	Ordem do truncamento do sistema de equações diferenciais ordinárias para o campo de temperatura filtrado
$NV$	Ordem do truncamento do sistema de equações diferenciais ordinárias para o campo de velocidade filtrado
$M_i$	Norma da autofunção do problema auxiliar de temperatura definida na eq. (3.77)
$P, p$	Pressão dimensional
$P^*$	Pressão modificada definida pela equação (3.23)
$P_j$	Coefficiente definido na equação (3.110)
$Pr$	Numero de Prandt
$Q_j$	Coefficiente definido na equação (3.111)
$q$	Taxa de calor por condução na equação da energia
$q_s$	Fonte de calor na equação da energia
$R$	Coefficiente definido na equação (3.112)
$Re$	Numero de Reynolds
$r_m$	Coefficiente definido na equação (3.107.a)
$S$	Tensor cinemático generalizado
$s_m$	Coefficiente definido na equação (3.107.b)
$T$	Tensor Tensão
$t_m$	Coefficiente definido na equação (3.109.a)
$T_w$	Temperatura da superfície da placa
$T_\infty$	Temperatura do fluido distante da placa (no infinito)
$T$	Temperatura do fluido dimensional
$t$	Tempo
$x_i, x_j, x_m$	Coordenadas cartesianas em notação indicial
$x, y$	Coordenadas cartesianas dimensionais
$X, Y$	Coordenadas cartesianas adimensionais

$u$	Componente dimensional do vetor velocidade na direção x
$u_m$	Coefficiente definido na equação (3.109.b)
$U$	Componente adimensional do vetor velocidade na direção X
$U_0$	Velocidade na borda da camada limite (SAKIADIS)
$\tilde{U}$	Potencial filtrado para o campo de velocidade
$\tilde{U}_i$	Transformada integral do campo de velocidade definido na equação (3.79)
$U_\infty$	Filtro para o potencial do campo de velocidade
$u^*$	Energia interna específica do fluido
$u_0$	Velocidade na borda da camada limite (BLASIUS)
$v$	Componente dimensional do vetor velocidade na direção y
$V$	Componente adimensional do vetor velocidade na direção Y
$v_i, v_j, v_m$	Componentes de velocidade em notação indicial
$\mathbf{v}$	Vetor que representa o campo de velocidade
$V_0$	Velocidade de injeção ou sucção na placa
$V_0^*$	Coefficiente definido na equação (3.64)

### LETRAS GREGAS DO CAPÍTULO 3

$\alpha_1$	Parâmetro Viscoelástico que representa a primeira diferença de tensão normal
$\alpha_2$	Parâmetro Viscoelástico que representa a segunda diferença de tensão normal
$\beta_i$	Parâmetros Viscoelásticos materiais de fluidos de terceiro grau
$\Gamma_i$	Autofunção do problema de autovalor (3.73)
$\tilde{\Gamma}_i$	Autofunção Normalizada do problema auxiliar para campo de temperatura
$\delta$	Espessura de camada limite hidrodinâmica
$\delta^*$	Espessura de camada limite hidrodinâmica adimensional
$\eta$	Variável adimensional definida na equação (3.42)
$\theta$	Campo de temperatura adimensional
$\tilde{\theta}$	Potencial filtrado para o campo de temperatura

$\bar{\theta}_i$	Transformada integral do campo de temperatura definido na equação (3.81)
$\theta_p$	Filtro para o potencial do campo de temperatura
$\kappa$	Difusividade térmica
$\lambda_i$	Autovalores para o problema auxiliar do campo de temperatura eq. (3.73)
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido viscoelástico de segundo grau
$\mu_i$	Autovalores para o problema auxiliar do campo de velocidade eq. (3.67)
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido
$\xi$	Coordenada adimensionalizada na figura 3.6 $\left( \xi = y \sqrt{\frac{u_0}{\nu x}} \right)$
$\rho$	Massa específica do fluido
$\psi_i$	Autofunção do problema de autovalor (3.67)
$\tilde{\psi}_i$	Autofunção Normalizada do problema auxiliar para campo de velocidade

## NOMENCLATURA DO CAPÍTULO 4

$\mathbf{A}_n$	Tensores cinemáticos de Rivlin-Ericksen
$A_{ij}$	Coefficiente definido na equação (4.81)
$B_i$	Coefficiente definido na equação (4.82)
$a_d$	Difusividade térmica
$c_p$	Calor específico do fluido
$C_{ij}$	Coefficiente definido na equação (4.94)
$\mathbf{D}$	Parte simétrica do tensor deformação
$D_{ij}$	Coefficiente definido na equação (4.95)
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m$	Versores das componentes do tensor
$E_i$	Coefficiente definido na equação (4.96)
$Ec$	Numero de Eckert
$F_1$	Função definida na equação (4.61.a)
$F_2$	Função definida na equação (4.61.b)
$F_3$	Função definida na equação (4.61.c)
$F_4$	Função definida na equação (4.61.d)
$F_5$	Função definida na equação (4.61.e)
$G_1$	Constante de integração da função corrente na parede inferior do canal
$G_2$	Constante de integração da função corrente na parede superior do canal
$h$	Altura do canal, dimensional
$\mathbf{I}$	Tensor Identidade
$k$	Condutibilidade térmica do fluido
$k_1$	Parâmetro dimensional Viscoelástico de estudo
$k_2$	Parâmetro dimensional Viscoelástico de estudo
$K_1$	Parâmetro adimensional Viscoelástico de estudo
$K_2$	Parâmetro adimensional Viscoelástico de estudo
$K_3$	Parâmetro adimensional Viscoelástico de estudo
$M_i$	Norma da autofunção de temperatura definida na equação (4.73)
$N_i$	Norma da autofunção de função de corrente definida na equação (4.67)
$p$	Pressão dimensional
$P$	Pressão adimensional
$Pe$	Numero de Peclet
$P^*$	Pressão modificada definida pela equação (4.22)

$q$	Taxa de calor por condução na equação da energia
$q_{va}$	Vazão adimensionalizada
$Q$	Vazão por profundidade unitária no interior do canal (dimensional)
$Re$	Numero de Reynolds
$R_v$	Relação de velocidade
$\mathbf{T}$	Tensor Tensão para fluido de terceiro grau
$T_w$	Temperatura das paredes do canal
$T_0$	Temperatura do fluido na entrada do canal
$T$	Temperatura
$t$	Tempo
$u^*$	Energia interna específica do fluido
$u$	Componente dimensional do vetor velocidade na direção $x$
$U$	Componente adimensional do vetor velocidade na direção $X$
$U_0$	Velocidade do fluido na entrada do canal
$x_i, x_j, x_m$	Coordenadas cartesianas em notação indicial
$x, y$	Coordenadas cartesianas dimensionais
$X, Y$	Coordenadas cartesianas adimensionais
$v$	Componente dimensional do vetor velocidade na direção $y$
$\mathbf{v}$	Vetor que representa o campo de velocidade
$V$	Componente adimensional do vetor velocidade na direção $Y$
$V_0$	Velocidade transversal no canal

#### LETRAS GREGAS DO CAPÍTULO 4

$\alpha_1$	Parâmetro Viscoelástico que representa a primeira diferença de tensão normal
$\alpha_2$	Parâmetro Viscoelástico que representa a segunda diferença de tensão normal
$\beta_i$	Parâmetros Viscoelásticos materiais de fluidos de terceiro grau
$\Gamma_i$	Autofunção do problema (4.69)
$\tilde{\Gamma}_i$	Autofunção normalizada definida na equação (4.74)
$\delta$	Espessura de camada limite hidrodinâmica
$\theta$	Temperatura adimensional

$\tilde{\theta}_i$	Transformada integral definida na equação (4.77)
$\lambda_i$	Autovalores do problema (4.69)
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido
$\mu_i$	Autovalores do problema (4.62)
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido
$\rho$	Massa específica do fluido
$\phi$	Potencial filtrado definido na equação (4.41)
$\tilde{\phi}_i$	Transformada integral definida na equação (4.75)
$\psi$	Função corrente do campo de velocidade
$\psi_\infty$	Função corrente do campo de velocidade completamente desenvolvido
$\Omega_i$	Autofunção do problema de autovalor (4.62)
$\tilde{\Omega}_i$	Autofunção normalizada definida na equação (4.68)

## NOMENCLATURA DO CAPÍTULO 5

$\mathbf{A}_n$	Tensores cinemáticos de Rivlin-Ericksen
$A_{ij}$	Coefficiente definido na equação (5.95)
$b, n$	Índices Power Law
$B_i$	Coefficiente definido na equação (5.96)
$B_i^*$	Coefficiente definido na equação (5.97)
$a_d$	Difusividade térmica
$c_p$	Calor específico do fluido
$C_{ij}$	Coefficiente definido na equação (5.109)
$\mathbf{D}$	Parte simétrica do tensor deformação
$D_{ij}$	Coefficiente definido na equação (5.110)
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m$	Versores das componentes do tensor
$E_i$	Coefficiente definido na equação (5.111)
$Ec$	Numero de Eckert
$F_1$	Função definida na equação (5.74.a)
$F_2$	Função definida na equação (5.74.b)
$F_3$	Função definida na equação (5.74.c)
$F_4$	Função definida na equação (5.74.d)
$F_5$	Função definida na equação (5.74.e)
$F_6$	Função definida na equação (5.74.f)
$F$	Função definida na equação (5.74.g)
$G_1, G_2$	Constantes de integração da função de corrente
$h$	metade da altura do canal, dimensional
$\mathbf{I}$	Tensor Identidade
$k$	Condutibilidade térmica do fluido
$k_1$	Parâmetro dimensional Viscoelástico de estudo
$k_2$	Parâmetro dimensional Viscoelástico de estudo
$K_1$	Parâmetro adimensional Viscoelástico de estudo
$K_2$	Parâmetro adimensional Viscoelástico de estudo
$K^*$	Índice de consistência do fluido no modelo Power law
$M_i$	Norma da autofunção de temperatura definida na equação (5.87)
$N_i$	Norma da autofunção de função corrente definida na equação (5.81)
$p$	Pressão dimensional

$P$	Pressão adimensional
$Pe$	Numero de Peclet
$Pr$	Numero de Prandt
$P^*$	Pressão modificada definida pela equação (5.41)
$q$	Taxa de calor por condução na equação da energia
$q_{va}$	Vazão adimensionalizada
$Q$	Vazão por profundidade unitária no interior do canal (dimensional)
$Re$	Numero de Reynolds
$R_v$	Relação de velocidade
$\mathbf{T}$	Tensor Tensão para fluido de segundo grau modificado
$T_w$	Temperatura das paredes do canal
$T_0$	Temperatura do fluido na entrada do canal
$T$	Temperatura
$t$	Tempo
$u^*$	Energia interna específica do fluido
$u$	Componente dimensional do vetor velocidade na direção $x$
$U$	Componente adimensional do vetor velocidade na direção $X$
$U_0$	Velocidade do fluido na entrada do canal
$x_i, x_j, x_m$	Coordenadas cartesianas em notação indicial
$x, y$	Coordenadas cartesianas dimensionais
$X, Y$	Coordenadas cartesianas adimensionais
$v$	Componente dimensional do vetor velocidade na direção $y$
$\mathbf{v}$	Vetor que representa o campo de velocidade
$V$	Componente adimensional do vetor velocidade na direção $Y$
$V_0$	Velocidade de injeção ou sucção nas paredes do canal

## LETRAS GREGAS DO CAPÍTULO 5

$\alpha_1$	Parâmetro Viscoelástico que representa a primeira diferença de tensão normal
$\alpha_2$	Parâmetro Viscoelástico que representa a segunda diferença de tensão normal
$\Gamma_i$	Autofunção do problema (5.83)

$\tilde{\Gamma}_i$	Autofunção normalizada definida na equação (5.88)
$\delta$	Espessura de camada limite hidrodinâmica
$\theta$	Campo de temperatura adimensional
$\tilde{\theta}_i$	Transformada integral definida na equação (5.91)
$\lambda_i$	Autovalores do problema (5.83)
$\mu$	Viscosidade dinâmica do fluido
$\mu_i$	Autovalores do problema (5.75)
$\nu$	Viscosidade cinemática do fluido
$\rho$	Massa específica do fluido
$\phi$	Potencial filtrado definido na equação (5.60)
$\tilde{\phi}_i$	Transformada integral definida na equação (5.89)
$\psi$	Função corrente do campo de velocidade
$\psi_\infty$	Função corrente do campo de velocidade completamente desenvolvido
$\Omega_i$	Autofunção do problema de autovalor (5.75) a (5.77)
$\tilde{\Omega}_i$	Autofunção normalizada definida na equação (5.82)

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1-MOTIVAÇÃO

Atualmente a região amazônica passa por um processo de industrialização, uma vez que, seus recursos naturais abundantes e muitas vezes ainda inexplorados, chamam a atenção de empreendedores que investem na construção de plantas fabris objetivando transformar tais recursos em produtos úteis para a sociedade. Entretanto, esta transformação da realidade amazônica nem sempre vem acompanhada com benefícios para sua população. É o que se verifica, principalmente, no lançamento de resíduos industriais sólidos, líquidos e gasosos para o meio ambiente amazônico sem nenhum tratamento adequado. No entanto, este tipo de atitude por parte da maioria das empresas localizadas na região pode ser evitado quando se adquire o total domínio dos seus processos. Evidentemente, isto não pode ser realizado somente com experiências na própria planta, pois a possibilidade de erros técnico e humano é bastante potencializado em virtude da grande quantidade de variáveis envolvidas em um processo fabril.

Sendo assim, utilizar métodos que permitam o gerenciamento das variáveis envolvidas permite aos técnicos o total gerenciamento das unidades fabris, evitando contaminação do meio ambiente, acidentes e redução de custo. Uma prática que vem ganhando espaço nas fábricas é a utilização de ferramentas computacionais, tanto na supervisão do processo, quanto no seu controle. No entanto, em alguns tipos de processo, somente a utilização destas ferramentas, geralmente planilhas de controle de variáveis e sistemas supervisórios, não é suficiente para entender de forma satisfatória o que está ocorrendo na planta.

Uma maneira de contornar esta situação é a utilização de métodos mais elaborados, que visam tratar o problema sob seus aspectos físicos mais relevantes com posterior uso de ferramentas computacionais na solução dos modelos matemáticos obtidos, ou seja: uso de métodos analíticos, métodos numéricos ou métodos híbridos. Com isto é possível conhecer o processo de forma mais profunda e ainda criar interfaces

de alimentação de dados gerados pelos métodos de forma a permitir uma completa compreensão e controle das unidades fabris.

Tendo em vista esta problemática na região, o presente trabalho é motivado no desenvolvimento de códigos de simulação para compreensão de fenômenos físicos, químicos e físico-químicos que ocorrem no escoamento de fluidos industriais e na busca da melhoria efetiva da eficiência das fábricas a partir de simulações realizadas com códigos computacionais próprios ou comerciais. Estes pontos são bastante motivadores para engenheiros, tendo em vista o atual cenário fabril que a Amazônia se encontra, pois há necessidade de agregação de valor aos seus recursos naturais sem, entretanto, poluir. Portanto, ter profissionais que unam a pesquisa acadêmica com a necessidade das indústrias na referida região, leva a uma situação mais confortável no sentido de otimização de processos fabris, e, conseqüentemente, uma menor emissão de efluentes para o meio ambiente amazônico.

A maioria dos problemas que surgem nas unidades fabris está associada ao escoamento de fluidos, que são muito comuns em processos industriais. Grande parte dos escoamentos destes fluidos são modelados como fluidos newtonianos e os resultados são satisfatórios. No entanto, existem processos em que o escoamento do fluido não obedece à lei newtoniana. Assim, é necessária a busca de outros modelos constitutivos que melhorem a compreensão de tais escoamentos. Estes modelos constitutivos, desenvolvidos para caracterizar fluidos que fogem à abordagem newtoniana, são chamados modelos de fluidos não-newtonianos. Os mais comuns são fluidos que obedecem a lei da potência – “Power Law”, plásticos de Bingham, Herchell-Bulkley, fluidos reopéticos, fluidos tixotrópicos. No entanto, uma classe de fluido não newtoniano vem ganhando atenção especial nos últimos anos: são os fluidos viscoelásticos. Estes fluidos apresentam propriedades elásticas e viscosas e, muitas das vezes é o modelo escolhido para descrever características de determinados tipos de escoamentos, como exemplos: o escoamento em dutos de minério diluído, extrusão de fios e placas poliméricas, processos de extrusão, fiação de fibras poliméricas, fabricação de placas de borracha e plástico, fabricação de recipientes de vidro/plástico, bombeamento de soluções poliméricas para controlar o ph de água de caldeiras de alta pressão e o controle de vácuo em mesas planas na formação de folha de celulose.

Em termos de região amazônica, muitas são as unidades fabris onde se verificam o escoamento de fluidos não newtonianos ou que podem ser modelados como tal. No distrito industrial de Munguba, localizado no Noroeste do estado do Pará, estão localizadas duas empresas onde a compreensão do escoamento de fluidos não newtonianos são vitais para o sucesso de suas operações. No caso da empresa de fabricação de celulose, entre as várias situações de escoamento do referido fluido pode-se destacar a formação da folha de celulose. A celulose, com sua característica polimérica, exige uma compreensão de sua composição associada às variáveis de processo, ou seja, massa específica do fluido, velocidade de injeção da celulose em cima da mesa plana receptora/formadora da folha, controle da sucção (vácuo) na mesa formadora da folha de celulose de forma a permitir neste estágio uma secagem mais eficiente, umidade da celulose. Considerando somente o processo de secagem de celulose a figura 1.1 mostra que a celulose antes de ser seca é primeiramente depurada, após a depuração a mesma é armazenada com objetivo de absorver flutuações no processo e desta maneira evitar interrupções na produção. Uma vez a polpa de celulose armazenada nos tanques, a mesma é bombeada até a caixa de entrada, nesta caixa a polpa é distribuída e injetada através de bicos em cima da mesa receptora, nesta etapa do processo é feito vácuo com objetivo de retirar parte da água da polpa que é composta de fibras de celulose e água. Percebe-se aí, um escoamento em meio poroso, pois a água percorre os poros formados pela polpa sob ação de vácuo. Uma vez retirada esta parte de água, uma folha parcialmente seca é verificada no final da mesa plana e entrada das prensas, que também tem objetivo de retirar água sob ação mecânica de cilindros prensadores, finalmente a secagem é terminada com a folha de celulose sendo submetida a ação do calor com objetivo de refinar a retirada de água e obter uma celulose com teores de umidade abaixo de 10 %. Na sequência a figura 1.1 mostra o esquema do processo de corte da folha de celulose e também o enfardamento. Vale ressaltar que o processo de secagem é exigido quando o cliente solicita uma celulose seca, há clientes que fabricam produtos que necessitam de celulose em polpa. Neste último caso a análise de escoamentos e trocas térmicas no processo de transporte da polpa aumenta em complexidade, pois em todo o processo, a polpa é considerada como fluido não newtoniano. Ainda no processo de fabricação de celulose pode-se destacar a compreensão dos fenômenos que ocorrem nas descargas das bombas de celulose diluída e o entupimento dos dutos de Smelt ( $\text{Sais} + \text{NaOH}$ ) que ainda são um desafio aos engenheiros que trabalham na área.

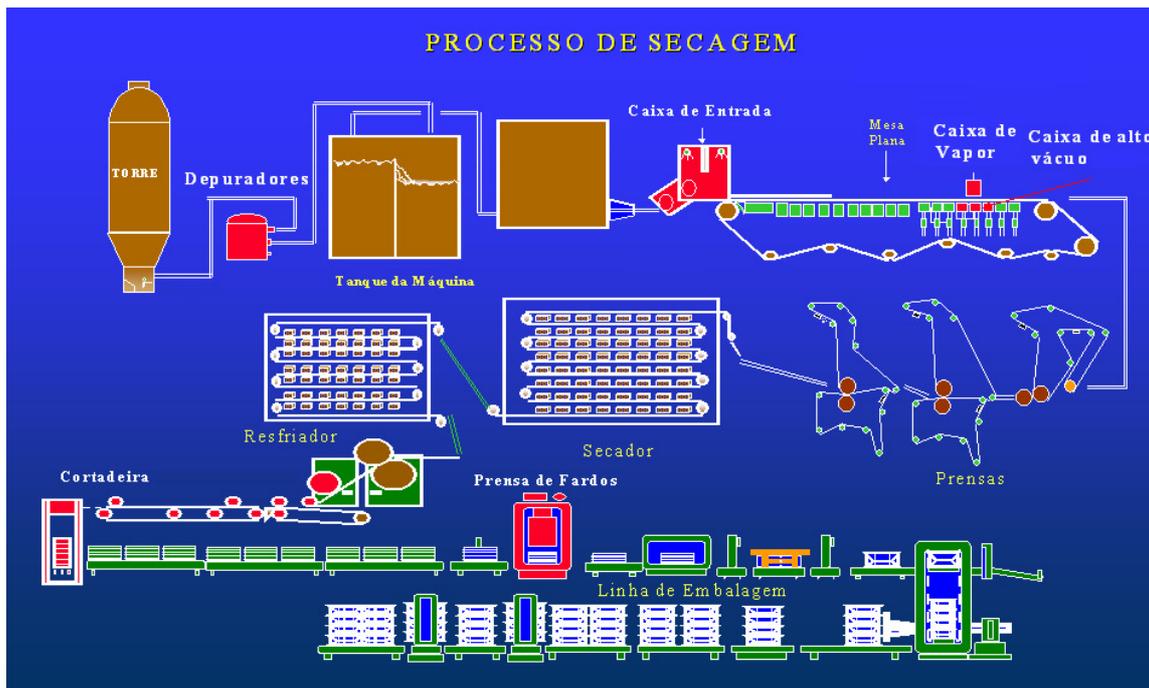


Figura 1.1 – Esquema básico do processo de secagem de celulose.

No caso da empresa beneficiadora de Caulim, o grande problema são os entupimentos nos minerodutos, decorrentes do transporte do Caulim da mina até a unidade fabril, os entupimentos são causados principalmente pela sedimentação do material na parte inclinada da tubulação devido a parada da bomba ou sedimentação excessiva do material. Ainda, não se chegou a uma conclusão do por que deste problema, mas um caminho que muitos pesquisadores têm procurado explicação é considerar o escoamento como não newtoniano.

Nos dois exemplos anteriores é fácil perceber a importância do escoamento de fluidos não newtonianos em processos fabris na região amazônica. Com isso, um programa de doutorado na referida região que tenha como objetivo tratar estes problemas e ao mesmo tempo fornecer mão de obra qualificada em sua análise é no mínimo motivador para as indústrias. A proposta do Programa de Pós graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia (PRODERNA) é exatamente esta, com isto, a análise de escoamentos e transferência de calor de fluidos não newtonianos que será trabalhada nesta tese vem como mais uma contribuição no sentido de compreender os fenômenos inerentes a tais escoamentos em função dos diversos parâmetros termofísicos característicos deste tipo de fluido.

A análise de escoamentos envolvendo fluidos com comportamento viscoelástico, de segunda e terceira ordens, tem ao longo dos anos desafiado matemáticos, engenheiros, físicos e cientistas da computação. Todos buscam um objetivo: a compreensão da influência dos parâmetros viscoelásticos nos campos de velocidade e temperatura nas mais diversas situações de escoamento, ou seja, regime permanente ou transiente, campos sujeitos a ação elétrica ou magnética, geometrias uni, bi ou tridimensional, escoamentos internos ou externos. Além disto, outra situação desafiadora que surge naturalmente na análise de escoamentos viscoelásticos é o aumento da ordem das equações diferenciais que compõem o modelo matemático. Isto muitas vezes leva a exigência de condições de contorno extras, que nem sempre estão prontamente disponíveis, dificultando desta maneira à busca de uma solução única e fechada. Esta última situação é bastante complexa para os cientistas, pois a ausência de condições de contorno que encerrem o modelamento torna o processo de solução mais difícil e, em certas situações torna-se até mesmo inviável. Em outros casos, condições extras são propostas na literatura, o que de certa forma facilita o desenvolvimento do algoritmo de solução do problema. Por outro lado, quando nada se tem a respeito da informação da condição de contorno extra, utilizam-se técnicas de aproximação como método de perturbação regular que, para condições bem específicas de escoamento, apresenta resultados satisfatórios.

Atualmente, os engenheiros que trabalham ou investigam o escoamento de fluidos viscoelásticos utilizam cada vez mais os recursos computacionais, seja para projetar equipamentos, para simular situações de escoamentos, para otimizar unidades de processo industrial que envolvam o escoamento de fluidos não newtonianos. Diante disto, a simulação com pacotes comerciais de CFD tem ganhado importante destaque neste cenário. No entanto, os pacotes comerciais hoje disponíveis no mercado ainda estão muito limitados, pois não permitem a simulação de escoamentos de uma grande variedade de modelos de fluidos não newtonianos, dentre os quais os viscoelásticos. Devido a sua complexidade pode ser desvantajoso, ou seja, os resultados gerados podem não ter credibilidade, em virtude principalmente do número de condições de contorno ser menor que a ordem das equações diferenciais parciais que governam o escoamento, juntamente com alto custo computacional.

Diante das limitações dos pacotes comerciais CFD, todos os trabalhos na área de escoamento de fluidos viscoelásticos são desenvolvidos a partir da construção de códigos computacionais dedicados, utilizando técnicas analíticas, semi-analíticas, puramente numéricas ou híbridas.

Uma técnica híbrida que vem ganhando destaque no tratamento de problemas de transferência de calor e massa e escoamento de fluidos é a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), o que motiva aplicar tal técnica na análise de escoamentos e transferência de calor de fluidos viscoelásticos. Tal técnica já fora utilizada na solução de escoamentos de fluidos não newtonianos que obedecem a lei da potência – “Power Law” (MAGNO, 1998, MAIA *et al.*, 2006, MONTEIRO *et al.*, 2010) e os resultados obtidos foram bastante motivadores. Assim, neste trabalho, a GITT é utilizada como ferramenta de solução das EDPs (equações diferenciais parciais), com objetivo principal de mostrar sua potencialidade em tratar tais problemas e gerar novos resultados e conclusões para o escoamento e transferência de calor de fluidos viscoelásticos.

Vale ressaltar o ineditismo da aplicação da GITT na solução de escoamentos e transferência de calor de fluidos viscoelásticos, pois, com sua característica principal de ter número de condições de contorno menor que a ordem da equação governante do problema, faz com que outros pesquisadores utilizem técnicas aproximativas para contornar esta dificuldade. A aplicação da metodologia GITT à solução deste tipo de problema permite que se tratem as EDPs de forma completa, proporcionando resultados físicos mais precisos.

## **1.2-OBJETIVOS**

### **1.2.1-OBJETIVO GERAL**

Análise dos campos de velocidade e temperatura de escoamentos de fluidos viscoelásticos de segundo e terceiro grau em placa estirada e dutos de placas paralelas, sujeitos a injeção ou sucção, mediante a aplicação da GITT.

## **1.2.2-OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- a) Obtenção do modelo matemático que rege os escoamentos dos fluidos de segundo e terceiro grau nas geometrias consideradas, a partir da operação e expansões dos tensores que compõem as equações constitutivas dos fluidos.
  
- b) Obtenção da formulação matemática para os problemas de escoamento em placa estirada em duas dimensões e duto de placas paralelas.
  
- c) Aplicação da GITT na solução dos problemas abordados.
  
- d) Implementação computacional das formulações híbridas para o tratamento dos problemas (desenvolvimento dos códigos computacionais).
  
- e) Obtenção, após solução do sistema de equações diferenciais ordinárias, dos perfis de velocidade e temperatura para várias variáveis de interesse em engenharia em função de parâmetros viscoelásticos.
  
- f) Obtenção, após solução do sistema de equações diferenciais ordinárias, das taxas de convergência para os potenciais de velocidade e temperatura com objetivo de mensuração da precisão alcançada com o controle automático de erro.

Discussão dos resultados apresentados e comparação com a literatura disponível.

## **1.3-SÍNTESE DO TRABALHO**

O presente trabalho consiste na aplicação da GITT em três problemas de escoamento de fluidos viscoelásticos de segundo e terceiro grau de interesse para engenharia. O primeiro problema versa sobre a análise bidimensional dos campos de velocidade e temperatura na camada limite de um fluido de segundo grau em uma placa plana em estiramento contínuo, sujeita a injeção ou sucção. O segundo problema versa sobre a análise bidimensional dos campos de velocidade e temperatura na camada limite de um fluido de terceiro grau nas regiões de entrada e completamente desenvolvida de um canal de placas paralelas sujeita a injeção de fluido na placa inferior e sucção com

mesma taxa na placa superior ou vice - versa. O terceiro problema versa sobre a análise bidimensional dos campos de velocidade e temperatura na camada limite de um fluido de segundo grau modificado em um canal de placas paralelas com injeção ou sucção. Nestes problemas, equações da continuidade, quantidade de movimento e energia são obtidas mediante desenvolvimento tensorial e considerações termodinâmicas (DUNN e RAJAGOPAL, 1995) aplicadas aos tensores constitutivos dos fluidos citados. As equações diferenciais parciais obtidas foram transformadas em sistemas de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, com uma condição de entrada, ou seja, transformada em um problema de valor inicial, após aplicação da GITT. De posse do sistema de equações diferenciais ordinárias obtido, foram desenvolvidos códigos computacionais em linguagem FORTRAN 2003, com objetivo de obter resultados numéricos para os campos de velocidade e temperatura. Taxas de convergência também foram avaliadas e finalmente os resultados foram comparados com a literatura existente.

O presente trabalho é dividido em capítulos, cujo conteúdo pode ser resumido da seguinte maneira.

O capítulo 2 mostra uma revisão bibliográfica dos avanços da GITT na solução de problemas difusivos/convectivos e técnicas de aceleração de convergência utilizadas na redução de custo computacional.

O Capítulo 3 mostra, inicialmente, uma introdução sobre o conceito de um fluido viscoelástico de segundo grau, citando suas principais características e aplicações na engenharia. Nesta introdução, também é mostrada a diferença que existe entre a camada limite de BLASIUS (SCHLICHTING, 1979) e a de SAKIADIS (PAPANASTASIOU *et al.*, 2000), que é muito importante na compreensão da análise do escoamento em camada limite sobre placa plana continuamente estirada. Em seguida, discutem-se as principais contribuições existentes sobre problemas envolvendo este tipo de fluido na literatura. A formulação matemática do problema, o tratamento via GITT e o algoritmo de solução são apresentados. A discussão dos resultados numéricos obtidos na simulação é conduzida, onde, efeitos do parâmetro viscoelástico  $K$  são analisados em variáveis como componente de velocidade axial ( $V$ ), parâmetro de injeção/sucção ( $F$ ) e número de Prandtl ( $Pr$ ). Finalmente são apresentadas as principais conclusões e sugestões.

O capítulo 4 mostra uma introdução sobre o conceito de um fluido viscoelástico de terceiro grau, citando suas principais características e aplicações na engenharia. Em seguida, discutem-se as principais contribuições existentes sobre problemas envolvendo este tipo de fluido na literatura. A formulação matemática do problema, o tratamento via GITT e o algoritmo de solução são apresentados. A discussão dos resultados numéricos obtidos na simulação é conduzida, onde, os efeitos dos parâmetros viscoelásticos de segundo grau ( $K_1$ ), terceiro grau ( $K_3$ ), número de Prandtl ( $Pr$ ), número de Eckert, parâmetro de injeção/sucção ( $R_V$ ) são investigados na formação dos perfis de velocidade e temperatura na região de entrada do canal. Uma comparação dos resultados obtidos com a literatura também é conduzida. Finalmente são apresentadas as principais conclusões e sugestões.

O capítulo 5 mostra uma introdução sobre o conceito de um fluido viscoelástico de segundo grau modificado, citando suas principais características e aplicações na engenharia. Em seguida, discutem-se as principais contribuições existentes sobre problemas envolvendo este tipo de fluido na literatura. A formulação matemática do problema, o tratamento via GITT e o algoritmo de solução são apresentados. A discussão dos resultados numéricos obtidos na simulação é conduzida, onde, o efeito do parâmetro viscoelástico de segundo grau ( $K_1$ ), índice do modelo da lei da potência ( $n$ ), número de Prandtl ( $Pr$ ), número de Eckert, parâmetro de injeção/sucção ( $R_V$ ) são investigados na formação dos perfis de velocidade e temperatura na região de entrada do canal. Uma comparação dos resultados obtidos com a literatura também é conduzida. Finalmente são apresentadas as principais conclusões e sugestões.

O capítulo 6 é dedicado à conclusão geral do trabalho e as sugestões para futuros trabalhos.

## CAPÍTULO 2

### A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

A Técnica da Transformada Integral Generalizada, GITT do inglês (Generalized Integral Transform Technique), é uma metodologia analítico-numérica utilizada principalmente para tratar problemas de Mecânica dos Fluidos e Transferência de calor e massa. A GITT tem sua base formada no trabalho pioneiro de MURRAY e ÖZISIK (1974), no qual é apresentada uma técnica de características analítico-numérico para a solução de sistema de equações diferenciais parciais, EDPs, a princípio não tratáveis pela teoria clássica de separação de variáveis. Esta técnica dispensava a necessidade do problema ser separável *a priori*. Assim, estavam estabelecidos os formalismos básicos para o surgimento da Técnica da Transformada Integral Clássica, a CITT do inglês (Classical Integral Transform Technique) (COTTA, 1993).

Posteriormente, MIKHAILOV e ÖZISIK (1984) generalizaram os formalismos da CITT para sete classes diferentes de problemas de difusão de calor e massa encontrados na literatura. A CITT consiste, basicamente, em homogeneizar as equações que governam o problema (caso necessário), encontrar um problema auxiliar de autovalor apropriado, obter, mediante propriedade de ortogonalidade, o par transformada-inversa, aplicar a transformação integral nas equações governantes com objetivo de transformar a equação diferencial parcial original em um sistema desacoplado de equações diferenciais ordinárias, resolver o sistema desacoplado de EDOs e obter o potencial original, após utilização da fórmula de inversão. A característica do sistema transformado de EDOs ser desacoplado torna a CITT um método para obtenção de soluções exatas de problemas lineares. No entanto, a CITT limita-se a problemas lineares. Uma limitação é a obtenção de solução de um determinado problema, caso não seja possível a transformação de alguns dos termos, mesmo quando esses são lineares (COTTA, 1993). Dessa forma a CITT é aplicada somente em um subconjunto de problemas lineares, pois é necessário que todos os termos sejam transformáveis.

COTTA (1993) generalizando os formalismos clássicos da CITT para a classe I de problemas apresentado em MIKHAILOV e ÖZISIK (1984), estende a técnica para a

solução de problemas não lineares e fortemente acoplados. Além disso, propõe técnicas de melhora na solução numérica. Com esta nova abordagem, uma vasta gama de problemas de interesse na área de transferência de calor e mecânica dos fluidos; problemas estes, lineares e não lineares; transformáveis e não transformáveis puderam ser tratados. Assim, a CITT passa a ser denominada de Técnica da Transformada Integral Generalizada, a GITT. Neste trabalho, o autor apresenta os formalismos e aplicações para algumas categorias de problemas de interesse na área de transferência de calor e mecânica dos fluidos: problemas com coeficientes variáveis na equação e condição de contorno, problemas com contorno móveis, geometrias irregulares não-transformáveis, problemas que envolvem dificuldade na solução do problema de autovalor, problemas acoplados, problemas de difusão e difusão-convecção não lineares, formulações em camada limite e Navier-Stokes.

Os passos básicos para aplicação da GITT na transformação das equações diferenciais parciais que governam problemas de interesse em engenharia são apresentados a seguir (COTTA, 1993):

- a) Definição do problema auxiliar, com base nos termos difusivos da formulação original;
- b) Solução do problema auxiliar e obtenção das autofunções, autovalores, normas e propriedade de ortogonalidade;
- c) Desenvolvimento do par transformada inversa;
- d) Transformação do sistema de equações diferenciais parciais em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, com uso de operadores apropriados. O sistema de EDOs pode ser acoplado ou não;
- e) Truncamento e solução do sistema de EDOs atendendo a precisão prescrita;
- f) Obtenção do potencial original pelo uso da fórmula de inversão.

A idéia básica da GITT é relaxar a necessidade de se encontrar uma transformação integral exata do problema a ser resolvido, o que na CITT é obrigatório. Dessa forma, pode-se escolher um problema auxiliar que seja o mais característico possível do problema original. Desenvolve-se, então, o par transformada inversa, consequência direta da propriedade de ortogonalidade que as autofunções oriundas do problema auxiliar possuem. Efetua-se, finalmente, a transformação integral das equações diferenciais parciais que regem o modelo físico do problema original, obtendo-se como resultado, após a transformação, um sistema diferencial ordinário acoplado e infinito. Após o seu truncamento numa ordem suficientemente grande para atender a precisão requerida, o sistema diferencial ordinário é resolvido numericamente por algoritmos bem estabelecidos, com controle automático de erro, disponíveis em bibliotecas científicas, como a IMSL (1989). A fórmula de inversão é, então, empregada para fornecer a representação analítica do potencial original nas demais variáveis independentes, eliminadas no processo de transformação do problema em conjunto com o campo transformado proveniente do sistema diferencial ordinário.

Com as significativas contribuições de MIKHAILOV e ÖZISIK (1984) e COTTA (1993), a Técnica de Transformação Integral apresenta-se como um método analítico-numérico poderoso e promissor no tratamento e solução de vários problemas de engenharia, oferecendo ao usuário precisão controlada, o que determina a obtenção de resultados de referência e uma performance computacional bastante eficiente. Porém, existiam problemas que embora a GITT conseguisse tratar, as taxas de convergências dos potenciais eram muito lentas. Assim para o tratamento de problemas fortemente não lineares e não homogêneos surgem as técnicas de aceleração da convergência e/ou redução do custo computacional. Os principais esquemas desenvolvidos nos últimos anos são: o uso do filtro simples com intuito de reduzir a influência das não homogeneidades na taxa de convergência, balanço integral, que retêm as informações do contorno em uma nova representação para a expansão, mudança de base, que de certa forma elimina alguns termos fontes indesejáveis na formulação original, esquema adaptativo, com o fim de reduzir automaticamente a ordem de truncamento do sistema diferencial ordinário ao longo do processo de solução do sistema diferencial ordinário transformado, o ordenamento de autovalores para problemas multidimensionais que reduz os múltiplos somatório, e finalmente, o filtro instantâneo local (COTTA, 1993;

SCOFANO NETO *et al.*, 1990; ALMEIDA e COTTA, 1996; MACÊDO, 1998; de BARROS e COTTA, 2007).

Um enfoque alternativo no desenvolvimento da GITT, baseado em balanços integrais, é apresentado por COTTA (1993), COTTA e MIKHAILOV (1997). Esta técnica de aceleração de convergência é baseada na integração direta das equações diferenciais parciais originais sobre todo o domínio, junto com a manipulação das condições de contorno, resultando em uma nova equação para a expansão em autofunções, mais rica em informações dos termos fontes presentes nas condições de contorno. Esta nova representação permitiu a aceleração da convergência que, até então, era não uniforme com o uso da fórmula de inversão original. Porém, esta estratégia apresenta o surgimento de integrais duplas, durante o processo, que nem sempre possuem solução analítica, necessitando dessa forma, do uso de rotinas de integração numérica.

Em muitas aplicações da técnica de transformação integral clássica ou generalizada em problemas multidimensionais, a série solução para o potencial é expressa como um duplo ou um triplo somatório. Cada um desses somatórios é associado com a expansão em autofunções na coordenada espacial correspondente. Entretanto, para os propósitos computacionais dessas expansões, os múltiplos somatórios são reduzidos para um simples somatório, com um reordenamento dos termos que regem as séries (COTTA e MIKHAILOV, 1997), sendo que este reordenamento leva em consideração a contribuição individual de cada expansão em autofunções no resultado final.

Tal esquema de ordenamento foi estendido inicialmente a problemas tridimensionais em regime laminar e permanente por QUARESMA (1997). O autor relata que além da redução dos somatórios, devido ao reordenamento dos autovalores, foi necessário também um reordenamento dos campos transformados do sistema diferencial ordinário para se obter melhores taxas de convergência.

Ainda com o objetivo de reduzir o custo computacional, MACÊDO (1998) apresentou uma nova técnica de aceleração de convergência chamada LIF (Local Instantaneous Filter), vista como um possível esquema ótimo e ainda de uso

controlável, para aumentar as taxas de convergência em expansões em autofunções e conseqüentemente reduzir o custo computacional em simulações.

O assunto de estudo da presente tese é o escoamento e a transferência de calor de fluidos não newtonianos viscoelásticos. Por isso, as principais contribuições na área de escoamento de fluidos não newtonianos que utilizaram a GITT são apresentados, tendo em vista os avanços na técnica que permitiram tais análises.

MACÊDO *et al.* (2000a) analisaram a transferência de massa nas regiões de entrada e completamente desenvolvida no interior de um duto para um escoamento turbulento de um fluido viscoelástico redutor de arrasto. A equação da difusão de massa foi resolvida pela GITT e o problema auxiliar foi resolvido pelo método da contagem de sinais em conjunto com a GITT. Resultados para o número de Sherwood foram calculados para as regiões de análise e se mostraram em perfeito acordo com os resultados produzidos por correlações empíricas. MACÊDO *et al.* (2000b) ainda estenderam as idéias deste problema para analisar a transferência de calor nas regiões de entrada e completamente desenvolvida no interior de um duto para o escoamento de fluido viscoelástico redutor de arrasto. A metodologia utilizada na solução do problema foi a GITT em conjunto com o método da contagem de sinais. Resultados para o número de Nusselt foram produzidos e comparados com a literatura disponível.

MAGNO *et al.* (2002) empregaram a GITT na solução das equações de camada limite no escoamento laminar em desenvolvimento de um fluido que obedece a lei da potência, no interior de um canal de placas paralelas. A formulação de função de corrente foi utilizada na determinação das equações da quantidade de movimento e energia que governam o escoamento. Resultados numéricos para o número de Nusselt e temperatura média de mistura foram calculados em diferentes posições axiais do canal para vários índices do modelo da lei da potência, tais resultados também foram comparados com a literatura disponível para fluido newtoniano e se mostraram em excelente concordância.

MAIA *et al.* (2006) empregaram a GITT na análise do escoamento termicamente desenvolvido de um fluido que obedece a lei da potência no interior de um duto elíptico. Resultados de interesse prático como a temperatura média de mistura e número de

Nusselt foram calculados. Os autores realizaram uma comparação com resultados disponíveis na literatura para dutos circulares e os resultados se mostraram em perfeito acordo.

Finalmente, MONTEIRO *et al.* (2010) analisaram o escoamento e a transferência de calor de um fluido que obedece a lei da potência no interior de um duto duplamente conectado, utilizando a GITT. Resultados numéricos para o campo de velocidade, produto fator de atrito de Fanning-número de Reynolds, campo de temperatura e número de Nusselt foram produzidos em função da excentricidade, razão de aspecto e índices do modelo da lei da potência. Os resultados foram examinados e comparados com resultados disponíveis na literatura com objetivo de mostrar a potencialidade da metodologia.

A metodologia GITT determina naturalmente o aparecimento de coeficientes integrais, após a transformação das equações diferenciais parciais que governam o problema. Em muitos casos, estes coeficientes não possuem solução analítica. Para contornar a situação, sub-rotinas científicas de integração numérica, disponíveis em bibliotecas como a IMSL (1989), são utilizadas. No entanto, os usos destas sub-rotinas determinam um aumento do custo computacional que em muitos casos pode inviabilizar a simulação numérica do problema. Diante do fato, ARAÚJO (2007) apresenta em seu trabalho, uma metodologia de avaliação dos coeficientes integrais do problema transformado. Tal metodologia consiste em agrupar todos os coeficientes em um coeficiente integral único. A partir deste coeficiente, é realizado uma semi-linearização através da discretização do coeficiente em intervalos controlados pelo usuário, seguido da soma destes intervalos. Os resultados obtidos com esta técnica estão em perfeita concordância (ARAÚJO, 2007) com sub-rotinas já estabelecidas e comprovadas em seu uso como a FQRUL e QDAG disponível em bibliotecas científicas (IMSL, 1989).

## **CAPÍTULO 3**

### **ESCOAMENTO E TRANSFERÊNCIA DE CALOR DE UM FLUIDO DE SEGUNDO GRAU SOBRE UMA PLACA PLANA ESTIRADA COM INJEÇÃO OU SUÇÃO**

#### **3.1-INTRODUÇÃO**

Neste capítulo é analisado a influência de um parâmetro viscoelástico no campo de velocidade e temperatura no interior da camada limite para escoamento incompressível, bidimensional, em regime laminar e permanente de um fluido de segundo grau escoando sobre uma placa plana em estiramento contínuo linear. Devido as suas importâncias em engenharia, efeitos de injeção e sucção também são investigados no interior da camada limite.

Como o fluido que escoar no interior da camada limite é um fluido de segundo grau de natureza viscoelástica, se faz necessário uma apresentação sucinta do fluido.

Fluidos viscoelásticos são fluidos onde os componentes do tensor tensão em um determinado instante dependem da história da sua deformação. Tais fluidos possuem propriedades que são características tanto de fluidos viscosos e sólidos elásticos. Assim como para fluidos newtonianos, a propriedade viscosa é devido ao fenômeno de transporte das moléculas fluidas, para fluidos viscoelásticos, a propriedade elástica é devido a estrutura química e configuração da molécula polimérica. Sistemas viscoelásticos desenvolvem tensões normais ou elásticas pronunciadas em condições de escoamento cisalhante laminar no estado estacionário. Curvas típicas de escoamento são mostradas na figura 3.1 para diferenças de tensões normais (MAGNO, 1998).

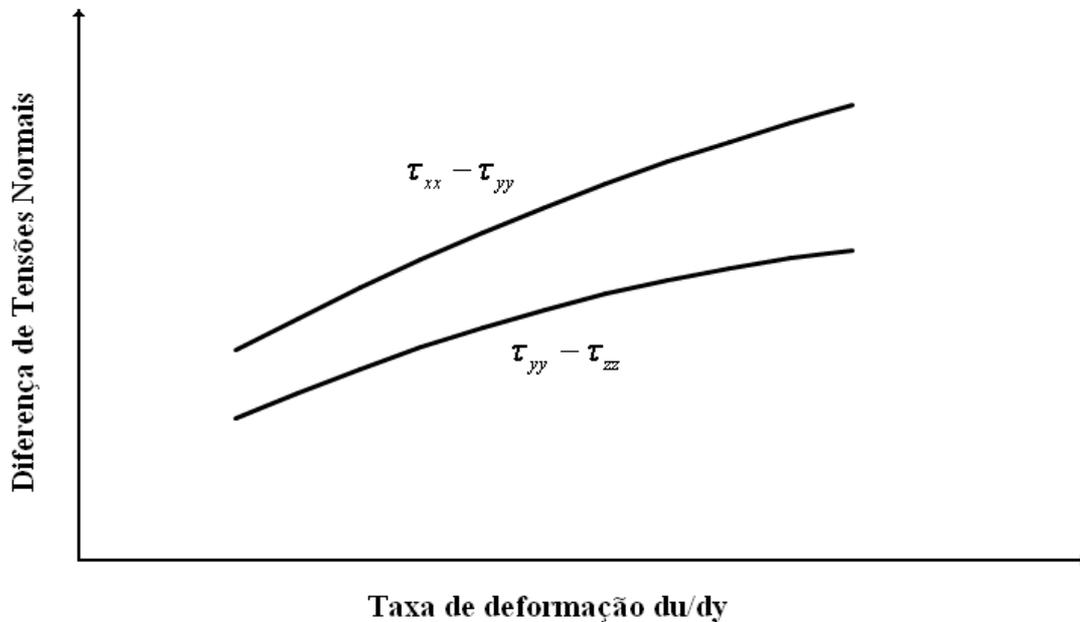


Figura 3.1 - Diferença de tensões normais para fluidos viscoelásticos (Solução 10,5 % PIB) (MAGNO, 1998).

RENARDY (2000) cita em seu trabalho que existem vários fenômenos associados ao escoamento de fluidos poliméricos com natureza viscoelástica: efeitos devido a tensão normal, efeitos devido a viscosidade de alongação, efeitos de redução de arrasto, escoamento contraído e instabilidades do fluido. No presente trabalho, o único efeito a ser analisado são os efeitos devido a tensão normal. O autor ainda relata que no escoamento de fluidos poliméricos há um alinhamento das moléculas poliméricas com a direção do escoamento, causando o aparecimento de tensões normais em adição às tensões cisalhantes desenvolvidas devido o escoamento.

Na figura 3.1, observa-se qualitativamente o comportamento das diferenças de tensões normais em função da taxa de deformação. BIRD *et al.* (1987) afirmam que tais diferenças correspondem à primeira e segunda diferenças de tensão normal, ou seja,  $\tau_{xx} - \tau_{yy}$  é a primeira diferença de tensão normal e  $\tau_{yy} - \tau_{zz}$  é a segunda diferença de tensão normal. Os autores ainda relatam que a primeira diferença de tensão normal é muito maior em ordem de magnitude que a segunda diferença de tensão normal, e esta por sua vez só é observável em situações onde a primeira diferença de tensão normal não tem efeito por razões da geometria onde ocorre o escoamento.

O fluido de segundo grau é um tipo de fluido que considera no seu tensor tensão constitutivo informações sobre a história das deformações que ocorreram no escoamento de tal fluido. Estas deformações que podem ocorrer em maior ou menor grau de intensidade dependendo da natureza do fluido, determinam características elásticas ao fluido. Qualquer fluido que escoie sobre influência de baixa taxa de cisalhamento pode ter seu tensor tensão constitutivo modelado por um fluido de segundo grau, inclusive o newtoniano. Este modelo, que será apresentado no item 3.3, possui parâmetros viscoelásticos que correspondem a primeira e segunda diferenças de tensões normais. Os efeitos destes parâmetros serão analisados no campo de velocidade e temperatura do presente trabalho. Segundo LIN *et al.* (2007), quando o parâmetro viscoelástico que representa a primeira diferença de tensão normal assume valor negativo, o fluido é classificado como fluido viscoelástico de segunda ordem. Por outro lado, quando o mesmo parâmetro assume valor positivo, o fluido é classificado como fluido viscoelástico de segundo grau.

Com base na apresentação de um fluido viscoelástico de segundo grau realizada, os objetivos do presente capítulo serão apresentados. Tais objetivos constam inicialmente de uma revisão bibliográfica, onde contribuições pertinentes ao assunto serão sucintamente comentadas e referenciadas. Após isto, determina-se a formulação matemática do problema, bem como o tratamento via GITT e o algoritmo de solução. No item seguinte, uma discussão dos resultados numéricos obtidos na simulação são apresentados. Nestes resultados, efeitos do parâmetro viscoelástico  $K$  são analisados em variáveis como componente de velocidade axial ( $V$ ), parâmetro de injeção/sucção ( $F$ ) e número de Prandtl. Após a devida discussão, são apresentadas as principais conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

### **3.2-REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Na literatura atual, existe uma vasta quantidade de trabalhos sobre o escoamento induzido por uma placa plana em estiramento contínuo. Porém, no presente trabalho são citados somente as contribuições que nortearam o desenvolvimento do mesmo. Isto, em hipótese nenhuma retira a importância de outras contribuições que porventura deixaram de ser citadas nesta revisão bibliográfica.

O estudo do campo bidimensional de velocidade e temperatura devido a uma placa estirada continuamente no interior de um fluido, seja ele newtoniano ou não-newtoniano, tem várias aplicações práticas no campo da metalurgia e engenharia química. Processos de extrusão, fiação de fibras, fabricação de placas de borracha e plástico, fabricação de moldes contínuos, escoamento de polímeros diluídos saindo de matriz extrusora e obtenção de recipientes de vidro são exemplos de aplicações industriais de placas estiradas no interior de um meio fluido. O problema de escoamento induzido pelo estiramento da placa é governado pelas equações de camada limite próximo à placa em movimento. SAKIADIS (1961) foi provavelmente o primeiro pesquisador a investigar a camada limite bidimensional devido a uma superfície estirada num fluido em repouso. Desde então, vários pesquisadores tem investigado os diversos aspectos deste problema como transferência de calor e massa, temperatura da placa em movimento constante ou variável, fluxo de calor na placa, efeito de campo magnético, placa sujeita a injeção ou sucção para fluidos newtonianos e não newtonianos (HAYAT *et al.*, 2008).

GUPTA e GUPTA (1977) analisaram a transferência de calor e massa no interior da camada limite para escoamento incompressível, bidimensional em regime laminar e permanente de um fluido newtoniano. O escoamento do fluido é induzido pelo estiramento contínuo linear de uma placa plana advinda de um bocal extrusor; sujeita à injeção ou sucção. Equações diferenciais ordinárias juntamente com suas devidas condições de contorno foram obtidas após transformações de similaridade nas equações de camada limite. Tais equações admitem soluções analíticas e resultados foram obtidos para o campo de temperatura em função da injeção ou sucção. Valores para os coeficientes de transferência de calor e de massa também foram calculados em função da injeção ou sucção.

RAJAGOPAL *et al.* (1984) analisaram o campo de velocidade no interior da camada limite para escoamento incompressível, bidimensional em regime laminar e permanente de um fluido viscoelástico de segunda ordem. O escoamento é induzido devido a ação de duas forças iguais e opostas aplicadas a uma placa plana, de maneira que a mesma esteja em estiramento contínuo linear. Após transformações das equações do movimento por variáveis similares, o potencial é expandido em uma série de

potência, realizado em virtude de não se ter condições de contorno suficiente para fechar o problema. Isto é válido para valores pequenos do parâmetro que representa os efeitos das primeira e segunda diferença de tensões normais. Em termos de aplicações industriais, isto representa o escoamento de alguns polímeros diluídos. As equações resultantes foram integradas numericamente pelo método RUNGE-KUTTA e os resultados para a componente de velocidade,  $u$ , e tensão de cisalhamento na parede foram obtidos para pequenos valores do parâmetro que rege a primeira diferença de tensão normal.

DUTTA e GUPTA (1987) analisaram o resfriamento do conjunto fluido/placa para escoamento incompressível, bidimensional em regime laminar e permanente de um fluido newtoniano. O escoamento é induzido por uma placa plana em estiramento contínuo, advinda de um bocal extrusor. O resfriamento da placa na zona de extensão é estudada pela solução do problema de transferência de calor acoplado entre o fluido no interior da camada limite e a placa em estiramento. Uma solução analítica para a distribuição de temperatura foi encontrada, resultados para a variação da temperatura da placa com a distância da saída do bocal extrusor são determinados para várias velocidades de estiramento e números de Prandtl.

Ainda dentro da análise da transferência de calor em placas em estiramento contínuo, DANDAPAT e GUPTA (1989) discutiram a influência do parâmetro viscoelástico no campo de velocidade e temperatura no interior da camada limite para escoamento incompressível, bidimensional em regime laminar e permanente de um fluido viscoelástico de segunda ordem. O escoamento é induzido por uma placa plana que está sujeita a ação de duas forças iguais e opostas que provocam o estiramento linear. Após transformações das equações do movimento por variáveis similares, soluções analíticas foram encontradas para as componentes de velocidade e campo de temperatura. Os autores, ainda, relatam que estas soluções são válidas para pequenos valores da primeira diferença de tensão normal. CORTEL (1994) utiliza a solução do campo de velocidade deste trabalho para investigar a influência do parâmetro viscoelástico no campo de temperatura em duas situações: temperatura da superfície da placa prescrita por uma função polinomial que varia com a direção  $x$  e temperatura da

placa constante. As equações resultantes para temperatura foram resolvidas pelo método RUNGE-KUTTA de quarta ordem para números de Prandtl elevados.

Na indústria, o escoamento de qualquer fluido, inclusive os viscoelásticos estão sujeitos as mais variadas formas de forças de campo, entre elas a gravitacional, o campo elétrico, magnético ou eletromagnético. Diante do fato, SURMA DEVI e NATH (1990) analisaram o escoamento e a transferência de calor no interior da camada limite para escoamento incompressível, bidimensional em regime laminar e permanente de um fluido viscoelástico de segunda ordem sujeito a ação de um campo magnético. O escoamento é induzido por uma placa plana em estiramento contínuo, advinda de um bocal extrusor. Nesse trabalho são apresentadas algumas soluções analíticas do problema já desenvolvidas por outros autores, para situações de ação de campo magnético, efeito do parâmetro viscoelástico e condição de fluido newtoniano. Após transformações das equações do movimento por variáveis similares e considerando que o parâmetro viscoelástico é muito pequeno, o autor expande o potencial de velocidade e temperatura em série infinitas usando o método da perturbação regular. As equações resultantes são resolvidas numericamente usando o método “shooting”. Devido sua importância industrial, valores do fator de atrito também são calculados em função do parâmetro viscoelástico e ação do campo magnético. Resultados para transferência de calor, fator de atrito e parâmetro magnético são apresentados.

MANESCHY e MASSOUDI (1995) analisaram a influência do parâmetro viscoelástico e sucção no escoamento e transferência de calor no interior da camada limite para escoamento incompressível, bidimensional em regime laminar e permanente de um fluido viscoelástico de segundo grau. O escoamento é induzido por uma placa plana que está sujeita a ação de duas forças iguais e opostas que provocam o estiramento linear. A placa esta sujeita à sucção. Após transformações de similaridade, equações diferenciais ordinárias são obtidas para o campo de velocidade e temperatura. Resultados numéricos foram obtidos para o campo de velocidade usando o método da quase-linearização, enquanto os resultados para o campo de temperatura, foram obtidos usando a técnica das diferenças finitas. Neste trabalho, o parâmetro viscoelástico responsável pela primeira diferença de tensão normal assume valores de 0,01 a 10, mostrando a potencialidade em se tratar numericamente o problema. A análise da

influência do parâmetro viscoelástico no campo de velocidade deste mesmo problema também foi estudado por PONTRELLI (1995), desconsiderando a sucção. Após a utilização da definição de função corrente, o autor obtêm as equações que foram tratadas numericamente. O método numérico utilizado neste trabalho foi o método da colocação usando produto tensorial “B-Splines” ao longo do escoamento e nas direções ortogonais. Perfis para as componentes de velocidade e tensão de cisalhamento na parede são obtidos em função do parâmetro viscoelástico. Deve-se salientar que o campo de velocidade deste problema, segundo ARIEL (1995), admite solução analítica exata.

BATHNAGAR *et al.* (1995) analisaram os efeitos do número de Weissenberg (W) no campo de velocidade no interior da camada limite para escoamento incompressível, bidimensional em regime laminar e permanente de um fluido viscoelástico OLDROYD-B. O escoamento é induzido pelo estiramento linear de uma placa plana. Após transformações de similaridade, um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas é obtido. O método da perturbação regular foi utilizado para obtenção de solução analítica e comparada com solução obtida numericamente. Resultados foram gerados para o campo de velocidade em função de parâmetro elástico, número de Weissenberg e situações de injeção e sucção na placa plana.

Existe situações industriais em que os modelos já estabelecidos na literatura sofrem modificações, com objetivo de melhorar as observações experimentais do fenômeno. Baseado no exposto, YÜRÜSOY e PAKDEMIRLI (1999) investigaram o escoamento no interior da camada limite formada pelo movimento relativo entre paredes de mancal, o que se assemelha a uma placa em estiramento contínuo. O fluido que escoar devido este estiramento é um tipo de fluido “Power-Law” especial, que foi obtido desprezando a primeira e segunda diferença de tensão normal diante do parâmetro viscoelástico de um fluido de terceiro grau. Após transformações de similaridade, uma equação diferencial ordinária é obtida. Resultados numéricos usando o método RUNGE-KUTTA associado ao método “Shooting”, são obtidos para o potencial de velocidade em função do parâmetro não newtoniano.

Percebe-se que o problema contempla duas configurações físicas semelhantes: o estiramento linear da placa plana devido a duas forças iguais e opostas aplicadas na placa provocando o escoamento do fluido e a placa saindo de um bocal extrusor, induzindo o escoamento do fluido inicialmente em repouso sobre a mesma. As outras características permanecem as mesmas, escoamento no interior da camada limite, bidimensional, incompressível em regime laminar e permanente. Desta maneira, sem perda de generalidade pode-se citar as contribuições seguintes sobre tais problemas, omitindo a configuração do problema físico e considerando somente os aspectos mais importantes.

TZIRTZILAKIS e TANOUDIS (2003) analisaram o problema para o escoamento e transferência de calor de um fluido biomagnético sobre ação de um campo magnético. As equações de conservação são transformadas em equações diferenciais ordinárias mediante transformações de similaridade. O método pseudospectral de “Chebyshev” é usado para a solução das equações. Os resultados obtidos por tal método são ainda comparados com o método das diferenças finitas como forma de mostrar sua potencialidade.

VAJRVELU e ROLLINS (2004) analisaram o problema para escoamento de um fluido viscoelástico de segundo grau sujeito a ação de campo magnético e sucção na placa. As equações de conservação são transformadas em equações diferenciais ordinárias mediante transformações de similaridade. Neste trabalho, soluções analíticas exatas foram determinadas para o campo de velocidade em função de combinações de parâmetros viscoelástico, magnético e da sucção. O autor ainda relata que a solução analítica exata encontrada por ARIEL (1995) tem solução única quando a primeira diferença de tensão normal pertence ao intervalo  $]0, \infty]$ . MASSOUDI e MANESCHY (2004) analisaram o mesmo problema usando o método numérico da quase-linearização. Resultados para o campo de velocidade e tensão de cisalhamento na placa foram gerados e se mostraram de acordo com a literatura existente.

Com o aumento da capacidade de cálculo dos computadores e a necessidade de generalização de todos os efeitos presentes no problema, de maneira a torná-lo mais próximo possível da realidade industrial, vários outros aspectos vêm sendo

recentemente considerados. RAJAGOPAL *et al.* (2005) investigaram os efeitos de um movimento oscilatório de um fluido viscoelástico ‘Walters liquid B’ sujeito a ação de um campo magnético com sucção ou injeção na placa plana. Resultados foram obtidos para o campo de velocidade utilizando o método da perturbação regular e expansão em séries de potência.

Vários outros investigadores consideram os efeitos de campo magnético na placa, LIN *et al.* (2007) investigaram o problema para o escoamento de um fluido viscoelástico de segunda ordem sujeito a ação de campo magnético com sucção na placa plana. As equações do movimento são transformadas em equações diferenciais ordinárias mediante transformações de similaridade. Soluções analíticas foram derivadas para o campo de velocidade em função dos parâmetros de sucção, magnético e viscoelástico.

ABEL *et al.* (2008) investigaram o problema para o escoamento e transferência de calor de um fluido viscoelástico de segunda ordem sujeito a ação de campo magnético e campo elétrico. Efeitos da dissipação viscosa e ôhmica também são investigadas. Equações diferenciais ordinárias são obtidas após transformação de similaridade das equações de conservação. O sistema obtido é resolvido usando o método de RUNGE-KUTTA-FEHLBERG de quinta ordem associado ao método “Shooting”. Perfis de velocidade e temperatura foram obtidos em função de vários parâmetros de interesse; parâmetro viscoelástico, número de Prandtl, número de Reynolds, número de Eckert, número de Hartmann e parâmetro elétrico.

SINGH (2008) analisou os efeitos da radiação e fonte de calor do problema no escoamento e transferência de calor de um fluido viscoelástico “Walter’s Liquid-B” na presença de campo magnético. Após transformações de similaridade, equações diferenciais ordinárias são obtidas para o campo de velocidade. A equação da energia é tratada com funções de Kummer’s. Soluções analíticas das equações são determinadas e resultados para o campo de temperatura são obtidos em função de parâmetros de interesse.

WANG (2009) analisou o problema para o escoamento de fluido newtoniano com a placa sujeita a deslizamento e sucção. Equações diferenciais ordinárias são obtidas após transformação de similaridade. Soluções em forma fechada são encontradas e suas unicidades provadas para o problema. Perfis de velocidade são determinados após integração das equações pelo método de RUNGE-KUTTA associado ao método “shooting”.

KUDENATTI e AWATI (2009) analisaram o escoamento de fluido newtoniano com a placa sujeita a sucção. Equações diferenciais ordinárias são obtidas após transformação de similaridade. A equação de Falkner-Scan é obtida após esta transformação. O método de “stretching” de variáveis é usado para a solução das equações diferenciais ordinárias. Perfis de velocidade são obtidos para diversos parâmetros de interesse.

Todas as técnicas aplicadas na solução das equações diferenciais parciais que governam o problema em análise requerem transformações que, de certa forma, simplificam sobremaneira a busca da solução do problema. Após tais transformações, que geralmente são transformações de similaridade, técnicas analíticas, numéricas ou híbridas são então usadas para a solução numérica das equações diferenciais ordinárias obtidas no processo de transformação das EDPs do problema original.

A aplicação da GITT na solução das equações diferenciais parciais do problema, não requer o uso de transformações de similaridade, o que já se configura uma grande diferença em relação as outras técnicas. As características da GITT permitem o tratamento da equação completa do problema, o que determina uma maior realidade física e, conseqüentemente, obtenção de resultados mais precisos. Portanto, espera-se com as características já apresentadas da GITT uma contribuição bastante significativa, tanto numérica quanto fisicamente, pois é a primeira vez que se aplica a GITT na solução de escoamentos de fluidos viscoelásticos.

### **3.3-DEFINIÇÃO DO PROBLEMA**

Considere uma placa permeável estirada continuamente de uma matriz extrusora, conforme mostra a figura 3.2. Sobre esta placa escoo um fluido viscoelástico

de segundo grau, induzido pelo movimento contínuo da placa. Neste escoamento percebe-se a formação de uma camada limite hidrodinâmica e térmica próximo a placa (SAKIADIS, 1961).

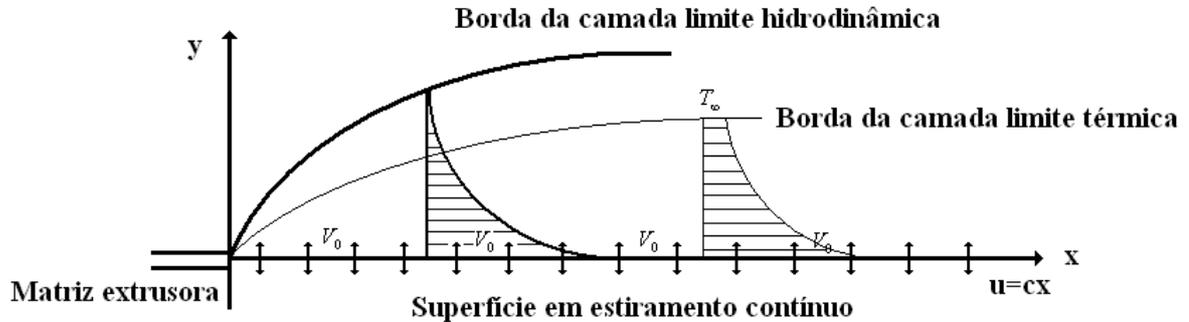


Figura 3.2 - Esquema básico da formação das camadas limites hidrodinâmica e térmica induzido pelo estiramento da placa plana sujeita a injeção ou sucção.

A camada limite formada, “camada limite de SAKIADIS”, é diferente da bem conhecida camada limite de BLASIUS (PAPANASTASIOU *et al.*, 2000). Na camada limite de BLASIUS, o escoamento ataca uma superfície sólida em repouso e observa-se a formação de uma espessura, comumente denominada de camada limite. Na camada limite de SAKIADIS, também se percebe a formação de tal espessura, no entanto, esta é resultado da indução de forças tangenciais agindo no fluido que está sobre a placa em estiramento contínuo linear (figura 3.3).

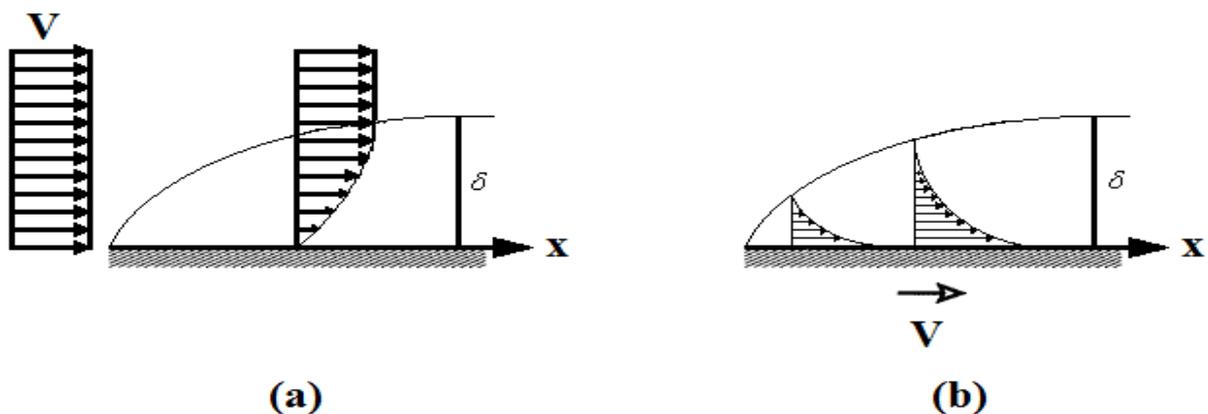


Figura 3.3 - a) Esquema de formação da espessura da camada limite hidrodinâmica no escoamento sobre uma placa plana em repouso; b) Esquema de formação da camada limite hidrodinâmica no escoamento induzido por uma placa plana estirada (Fonte: PAPANASTASIOU *et al.*, 2000; adaptado).

Para análise do problema, as seguintes hipóteses são consideradas:

- a) Escoamento bidimensional em coordenadas cartesianas;
- b) Escoamento incompressível em regime laminar e permanente;
- c) Força de corpo não considerada;
- d) Sem geração e nem consumo interno de calor;
- e) Não considerada dissipação viscosa e nem trabalho devido a deformação elástica;
- f) Campo de pressão não considerado.

Com a definição do problema, iniciar-se-á a obtenção do modelo matemático que governa o escoamento sobre a placa estirada.

### 3.3.1-EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA FLUIDO VISCOELÁSTICO DE SEGUNDO GRAU

Um fluido simples incompressível é definido como um material cujo estado da tensão atual é determinada pela história do gradiente de deformação sem uma configuração de referência estabelecida (TRUESDELL e NOLL, 2004). Sua equação constitutiva pode ser escrita na forma de um funcional

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \sum_{S=0}^{\infty} \mathbf{F}d_t^S(\mathbf{S}) \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade e  $\mathbf{F}d$  é o gradiente deformação (LAI *et al.*, 1999)

COLLEMAN e NOLL (2003) definem um fluido incompressível de grau  $n$ , ou simplesmente fluido de grau  $n$  (TRUESDELL e NOLL, 2004) como um fluido incompressível obedecendo a seguinte equação constitutiva para o tensor tensão.

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \sum_{j=1}^n \mathbf{S}_j \quad (3.2)$$

Obtida pela expansão assintótica do funcional (3.1) através de um parâmetro de retardação  $\alpha$  (ASGHAR *et al.*, 2003). Se  $n = 3$ , então se tem para (3.2):

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3 \quad (3.3)$$

onde os três primeiros tensores  $\mathbf{S}_j$  são dados por (TRUESDELL e NOLL, 2004):

$$\mathbf{S}_1 = \mu\mathbf{A}_1 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{S}_2 = \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 \quad (3.5)$$

$$\mathbf{S}_3 = \beta_1\mathbf{A}_3 + \beta_2(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_1 \quad (3.6)$$

Os tensores  $\mathbf{A}_n$  são os tensores cinemáticos de Rivlin-Ericksen (RIVLIN e ERICKSEN, 1955) e são definidos pela seguinte relação de recorrência.

$$\mathbf{A}_n = \frac{D}{Dt}\mathbf{A}_{n-1} + \mathbf{A}_{n-1}\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{A}_{n-1}, \quad n = 2,3,4,\dots \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A}_1 = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \quad (3.8)$$

onde  $D/Dt$  é a derivada material e  $\mathbf{v}$  o campo de velocidade. A derivada material é definida como:

$$\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot [\nabla(\cdot)] \quad (3.9)$$

Nas equações (3.4), (3.5) e (3.6),  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) são parâmetros materiais correspondentes aos fluidos do segundo e terceiro graus, respectivamente (WANG e WU, 2007).

O modelo constitutivo do fluido de segundo grau é obtido, quando os parâmetros materiais  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) = 0 na equação (3.3). Assim têm-se:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 \quad (3.10)$$

Além disso, quando  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) = 0 e  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) = 0 o modelo constitutivo dado pela equação (3.3) se reduz ao clássico fluido newtoniano.

### 3.3.2-EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA PARA O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO DE SEGUNDO GRAU

A forma invariante das equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia são dadas por (LAI *et al.*, 1999)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.11)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\mathbf{B} \quad (3.12)$$

$$\rho \frac{Du^*}{Dt} = \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q_s \quad (3.13)$$

As equações diferenciais de conservação da massa, quantidade de movimento e energia para o problema em análise são obtidas pela substituição do modelo constitutivo do fluido de segundo grau nas equações (3.11), (3.12), (3.13), hipóteses do problema consideradas e aplicação das restrições termodinâmicas.

Quanto as restrições termodinâmicas, DUNN e FOSDICK (1974) afirmam que para o modelo constitutivo de fluido de segundo grau ter estabilidade e compatibilidade termodinâmica, as seguintes relações necessitam ser satisfeitas

$$\begin{aligned}
\mu &\geq 0 \\
\alpha_1 &\geq 0 \\
\alpha_1 + \alpha_2 &= 0
\end{aligned}
\tag{3.14.a, b, c}$$

Esta compatibilidade é verificada desde que todos os movimentos dos fluidos satisfaçam a desigualdade de Clausius-Duhem e supondo que a energia livre de Helmholtz é mínima quando o fluido esta em repouso.

As restrições dadas pelas equações (3.14) são ainda assunto de debates em mecânica de fluidos não newtonianos (MANESCHY e MASSOUDI, 1995; RAJAGOPAL *et al.*, 2005). Outros autores relatam que muitos experimentos com fluidos não newtonianos não confirmam as restrições (3.14), o que permite concluir que os fluidos experimentados não são fluidos de segundo grau e, portanto, devem possuir outra estrutura constitutiva. No entanto, no presente trabalho não será discutido o mérito do assunto. Maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrados nos trabalhos de DUNN e FOSDICK (1974) e DUNN e RAJAGOPAL (1995). Assim, o modelo usado no presente trabalho assumirá  $\alpha_1 \geq 0$  e as equações diferenciais se apresentam como (ver apêndice I)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0
\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( 5 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right. \\
& \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)
\end{aligned}
\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
& \left. + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right)
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.18)$$

### 3.3.3-EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA

As equações de camada limite para o problema em análise são obtidas mediante uma avaliação da ordem de grandeza dos termos que compõe as equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia (SCHLICHTING, 1979).

Usando as considerações usuais de camada limite, onde  $u, x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial p}{\partial x}, T$  são da  $O(1)$  e  $v$  e  $y$  da  $O(\delta)$  ( $\delta$  é a espessura de camada limite) (SAJID *et al.*, 2009) e somando-se a estas considerações a contribuição devido as tensões normais ser da mesma ordem de magnitude que as tensões de cisalhamento, ou seja,  $v$  e  $k_1$  são da ordem de  $\delta^2$  (SURMA DEVI e NATH, 1990), as equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia para o escoamento resulta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.19)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_1 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] \quad (3.20)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + 2k_1 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.21)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.22)$$

onde  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  é a viscosidade cinemática,  $\rho$  é a massa específica,  $k_1 = \frac{\alpha_1}{\rho}$  é o parâmetro

viscoelástico de estudo,  $\kappa = \frac{k}{\rho c_p}$  é a difusividade térmica.

Diferentemente da camada limite bidimensional para fluidos newtonianos, a equação da quantidade de movimento na direção  $y$  apresenta um produto de gradientes de velocidade  $u$  que se soma ao termo da pressão. Então, antes de se definir as condições de contorno do problema é necessário tratar as equações da quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$ , de maneira que se obtenha somente uma equação que represente a quantidade de movimento no interior da camada limite. Baseado nos trabalhos de RAJAGOPAL *et al.* (1984), PAKDEMIRLI e SUHUBI (1992), PAKDEMIRLI (1992) e ARIEL (2002), propõe-se a seguinte equação para a pressão:

$$P^* = P - \alpha_1 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (3.23)$$

Na equação (3.23)  $P^*$  representa a pressão modificada. O objetivo da substituição da pressão modificada nas equações da quantidade de movimento é fazer com que a pressão nestas equações dependa somente da direção  $x$ .

Diferenciando (3.23) em relação a  $x$  e substituindo em (3.20), obtêm-se:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_1 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] \quad (3.24)$$

Da mesma maneira; diferenciando (3.23) em relação a  $y$  e substituindo em (3.21), obtêm-se:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

onde  $P^* = P^*(x)$

Percebe-se que a proposta da pressão modificada, elimina naturalmente o termo de pressão na direção  $y$  e opera com um termo no interior da parcela multiplicada por  $k_1$  na equação da quantidade de movimento (direção  $x$ ).

A velocidade do fluido longe da placa pode ser considerada zero, com isso  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} = U_0 \frac{dU_0}{dx} = 0$  (PAKDEMIRLI e SUHUBI, 1992). Desta maneira, o escoamento é induzido somente pelo estiramento da placa e a equação da conservação da quantidade de movimento torna-se

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_1 \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] \quad (3.26)$$

As condições de contorno do problema em análise foram baseadas nos trabalhos de MANESCHY e MASSOUDI (1995) e LIAO (2008), e são dadas por:

$$u = cx, v = V_0, T = T_w \text{ em } y = 0, \text{ com } c > 0 \quad (3.27.a, b, c)$$

$$u = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, T = T_\infty \text{ em } y \rightarrow \infty \quad (3.28.a, b, c)$$

$$u = 0, T = T_w \text{ em } x = 0 \quad (3.29.a, b)$$

onde  $V_0 > 0$  é a velocidade de injeção e  $V_0 < 0$  a velocidade de sucção na superfície da placa.

A condição de contorno  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  é uma condição adicional sugerida por RAJAGOPAL e GUPTA (1984) na ausência de cisalhamento na corrente livre. Esta condição determina que longe da placa o escoamento é uniforme.

Ainda sobre as condições de contorno do problema em análise, para a direção  $x$ , duas configurações são encontradas na literatura. A primeira refere-se a um estiramento simétrico da placa plana, ou seja, duas forças iguais e de sentido opostos são aplicadas na placa de maneira a produzir escoamento do fluido em sentidos opostos, conforme mostra a figura 3.4.

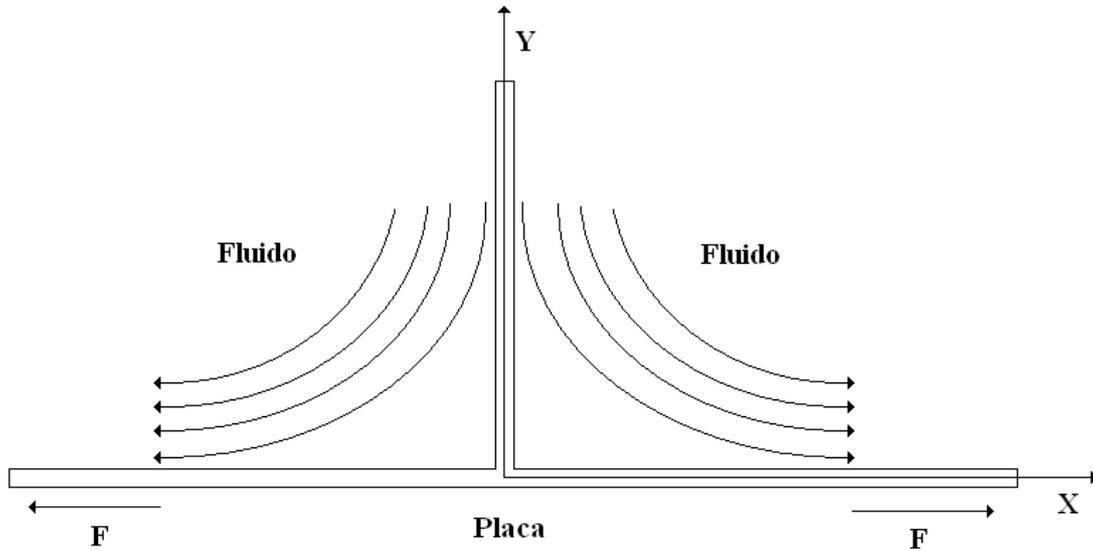


Figura 3.4 – Esquema de escoamento de um fluido sobre placa plana sujeita a ação de forças iguais e de sentido opostos.

Nesta configuração, as condições de contorno são as de simetria, ou seja,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  em  $x = 0$ .

A segunda configuração, refere-se ao escoamento do fluido induzido por uma placa plana estirada de um bocal extrusor, conforme mostra a figura 3.5.

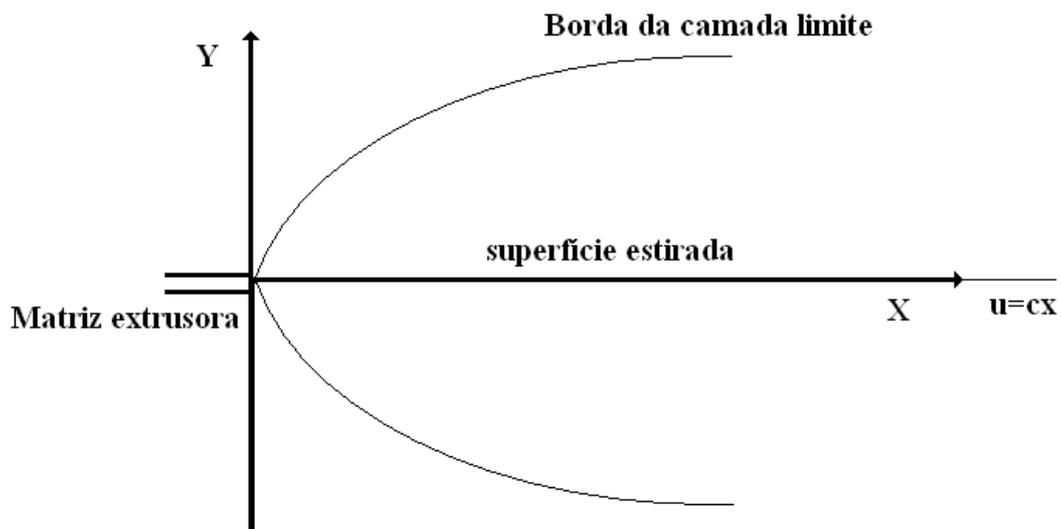


Figura 3.5 - Esquema de escoamento de um fluido sobre placa plana estirada de um bocal extrusor (Fonte: SURMA DEVI e NATH, 1990; adaptado).

Nesta configuração, as condições de contorno ainda são muito pouco discutidas e, na maioria das análises, não consideradas. No entanto, para o caso da camada limite hidrodinâmica, LIAO (2008) sugere usar  $u = 0$  em  $x = 0$ . No presente trabalho, foi usado a sugestão de LIAO (2008) e para o caso da camada limite térmica admitiu-se  $T = T_w$  em  $x = 0$ . O uso destas condições de contorno são razoáveis, uma vez que, o escoamento do fluido se dá pelo estiramento da placa e portanto a partícula fluida localizada na origem do eixo cartesiano admitido recebe quantidade de movimento somente quando a placa sai da matriz extrusora.

Outro motivo de usar a segunda configuração de condições de contorno na direção  $x$ , foi sua perfeita adequação a subrotina de solução numérica que será utilizada na solução das EDPs do problema. Esta subrotina, que será apresentada no item 3.3.8, resolve problemas de valor inicial. Resultados mostrando uma comparação entre as duas configurações de condições de contorno são apresentados e discutidos no item resultados e discussões.

### **3.3.4-DETERMINAÇÃO DE CORRELAÇÃO PARA ESTIMAR A ESPESSURA DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA**

O objetivo deste item é buscar uma correlação que estime a espessura de camada limite hidrodinâmica no escoamento de um fluido de segundo grau sobre uma placa plana estirada, tendo em vista que é raro na literatura trabalhos que apresentem tais correlações (CHHABRA e RICHARDSON, 2008). RUCKENSTEIN (1994) apresenta uma formulação que estima a camada limite hidrodinâmica para o escoamento de um fluido viscoelástico sobre uma placa plana em repouso. No entanto, para placas em estiramento contínuo as correlações são inexistentes na literatura atual. Além disso, o conhecimento estimado da espessura torna-se valioso para projetos de equipamentos térmicos e análise de transferência de calor e massa em fenômenos térmicos convectivos-difusivos.

RUCKENSTEIN (1994) apresenta uma análise bastante valiosa, no que diz respeito a busca de uma formulação que estime a camada limite hidrodinâmica de um fluido viscoelástico que apresente elasticidade moderada e escoando sobre uma placa

plana. O autor, usando argumentos de escala para avaliar os termos que compõe as equações da conservação da massa e quantidade de movimento, obteve uma equação que estima a espessura da camada limite. Assim, baseado no trabalho deste autor, buscar-se-á uma formulação para estimar a espessura de camada limite na placa em estiramento contínuo que induz o escoamento de um fluido viscoelástico de segundo grau sobre a mesma.

Para um melhor entendimento, obter-se-á inicialmente a estimativa da espessura na placa sem estiramento, ou seja, o fluido atacando a placa plana em repouso. Após este passo, obter-se-á a espessura que se busca.

Considere os termos das equações (3.19) e (3.26), sendo avaliados da seguinte forma:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_0^2}{x}; v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \delta \frac{u_0}{x} \frac{u_0}{\delta} = \frac{u_0^2}{x}; v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{vu_0}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \sim k_1 \left[ \frac{u_0^2}{x\delta^2} + \frac{u_0^2}{x\delta^2} + \frac{u_0^2}{x\delta^2} + \frac{u_0^2}{x\delta^2} \right] \sim k_1 \frac{u_0^2}{x\delta^2}$$

onde  $u_0$  é a velocidade externa na borda da camada limite.

Substituindo estas avaliações na equação da quantidade de movimento, obtêm-se com as devidas constantes multiplicativas.

$$\frac{u_0^2}{x} + \frac{u_0^2}{x} = \frac{vu_0}{\delta^2} + k_1 \frac{u_0^2}{x\delta^2} \tag{3.30}$$

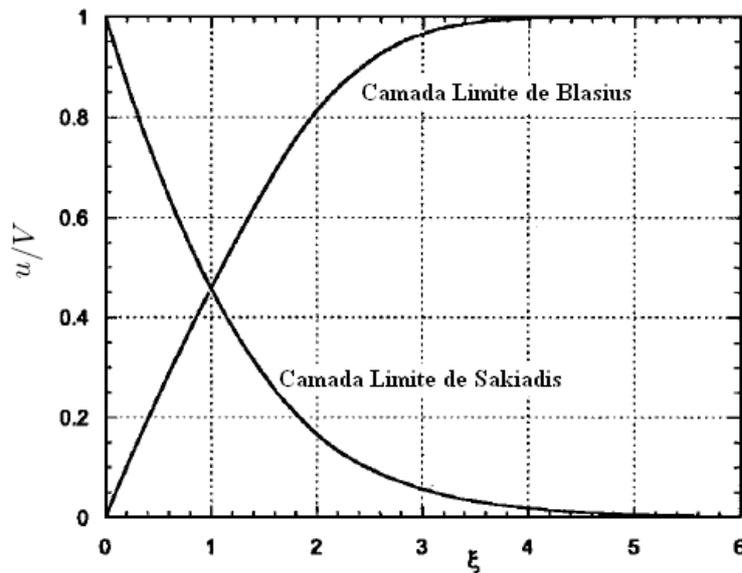
$$\delta^2 = A \frac{vx}{u_0} + Bk_1 \tag{3.31}$$

onde A e B são constantes que advêm da proporcionalidade entre os termos avaliados (RUCKENSTEIN, 1994).

Nota-se da equação (3.31) que a espessura da camada limite quando  $x = 0$  não é zero, como se verifica para escoamento de fluidos newtonianos.

Percebe-se ainda, da mesma equação, que o primeiro termo do lado direito é o termo correspondente a camada limite de Blasius, quando  $k_1 = 0$ , ou seja, sem contribuição elástica. Logo, a constante A pode ser facilmente determinada, encontrando um valor aproximado de 25 (SCHLICHTING, 1979).

No entanto, este valor não se aplica a camada limite de SAKIADIS, sendo necessária sua determinação. PAPANASTASIOU *et al.* (2000) apresentam os seguintes valores (ver figura 3.6) para as espessuras de camadas limites de BLASIUS e SAKIADIS, obtidos após solução da equação diferencial ordinária advinda das transformações de similaridade das equações do movimento para fluido newtoniano.



$\xi^* = \xi \sqrt{x}$	0	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$3.5\sqrt{2}$	$4.3\sqrt{2}$	$4.9\sqrt{2}$	$5.4\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$
$u/V$ , Blasius	0	0.46	0.82	0.97	0.99	0.999	.9999	.99999	.999999
$u/V$ , Sakiadis	1	0.45	0.16	0.055	0.031	0.013	.0063	.0036	.0018

Figura 3.6 - Perfis da componente de velocidade  $u$  adimensionalizada para as camadas limites hidrodinâmicas de BLASIUS e SAKIADIS (Fonte: PAPANASTASIOU *et al.*, 2000; adaptado).

Considerando a definição de espessura de camada limite (SCHLICHTING, 1979) e observando a figura 3.6, nota-se que a espessura da camada limite de Blasius

ocorre quando o parâmetro adimensional  $\xi^* \approx 5$ , ou seja, neste ponto a componente de velocidade  $u$  se encontra a 99% da velocidade da corrente principal. Por outro lado, aplicando a definição para a determinação da espessura da camada limite de Sakiadis, determina-se que na posição  $\xi^* \approx 6$  a componente de velocidade  $u$  se encontra a 1% de atingir a velocidade de estiramento da placa, ou seja, 99% da velocidade de estiramento. Portanto, na camada limite de Sakiadis o estabelecimento da camada ocorre num ponto ligeiramente superior ao de Blasius. Usando as formulações e métodos apresentados em PAPANASTASIOU *et al.*, 2000, a equação que estima a espessura de camada limite para fluido newtoniano escoando sobre uma placa plana em estiramento contínuo, pode ser dada por:

$$\delta \approx 6 \sqrt{\frac{vX}{u_0}} \quad \text{ou} \quad \delta^2 \approx 36 \frac{vX}{u_0} \quad (3.32)$$

Comparando a equação (3.32) com a equação (3.31), para  $k_1 = 0$ , conclui-se que a constante  $A \approx 36$ . Assim, (3.32) toma a seguinte forma:

$$\delta^2 = 36 \frac{vX}{u_0} + Bk_1 \quad (3.33)$$

No entanto, no presente trabalho  $u_0 = cX$ , pois a velocidade na borda da camada limite de BLASIUS é substituída pela velocidade da placa em estiramento contínuo linear, ou seja camada limite de SAKIADIS. Logo a equação (3.33) resulta:

$$\delta^2 = 36 \frac{v}{c} + Bk_1 \quad (3.34)$$

A equação (3.34) mostra que para  $k_1 = 0$ , a espessura da camada limite é independente da direção  $x$ . Isto está completamente de acordo com a análise feita por SCHLICHTING (1979) para o escoamento plano no ponto de estagnação. Vale ressaltar que, se desprezar o termo viscoso nesta mesma equação, a espessura de camada limite dependerá somente do parâmetro viscoelástico, o que está de acordo com a teoria desenvolvida por RAJAGOPAL *et al.* (1983).

A constante B presente na equação (3.34) não é de simples determinação (RUCKENSTEIN, 1994). Portanto, a mesma será considerada parâmetro de estudo, e após devida análise será proposto um valor para a constante B. Este procedimento será apresentado no item de resultados e discussões.

### 3.3.5-ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA

Os seguintes grupos adimensionais serão utilizados no processo de adimensionalização das equações da continuidade, quantidade de movimento e energia.

$$X = \frac{x}{L}, Y = y \frac{Re^{1/2}}{L}, U = \frac{u}{cL}, V = v \frac{Re^{1/2}}{cL}, Re = c \frac{L^2}{\nu}, \theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w}, K = k_1 \frac{Re}{L^2}, Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (3.35)$$

$$\delta^* = \delta \frac{Re^{1/2}}{L}$$

Após utilização dos grupos adimensionais, as equações que governam o problema tornam-se:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.36)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + K \left[ \frac{\partial}{\partial X} \left( U \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + V \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} \right] \quad (3.37)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (3.38)$$

com condições de contorno

$$U = X, V = V_0 \frac{Re^{1/2}}{cL} = F, \theta = 0 \text{ em } Y = 0 \quad (3.39.a, b, c)$$

$$U = 0, \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, \theta = 1 \text{ em } Y \rightarrow \infty \quad (3.40.a, b, c)$$

$$U = 0, \theta = 0 \text{ em } X = 0 \quad (3.41.a, b)$$

onde  $K$  e  $F$  são parâmetros de estudo, que representam respectivamente o comportamento viscoelástico do fluido e a situação de injeção ou sucção do fluido na placa estirada.

### 3.3.6-TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA

Das equações (3.39) e (3.40), percebe-se que o domínio da solução dos potenciais na direção  $Y$  varia de zero a infinito. Segundo PEREIRA (2000), não é recomendável trabalhar com este tipo de domínio, pois sempre ocorre algum tipo de erro ao se escolher a posição onde ocorrerá a condição de infinito. Para o problema em análise, este erro pode aparecer quando se assume conhecer uma espessura de camada limite abaixo do valor onde a mesma realmente ocorrerá. Assim, para evitar tais problemas, propõem-se uma mudança de variável, com objetivo de mudar o domínio semi-infinito  $[0, \infty[$  para um domínio finito  $[0, 1]$ , logo:

$$\eta = 1 - \frac{1}{e^{dY}} \quad (3.42)$$

Cujas derivadas necessárias para o problema são calculadas e podem ser apresentadas como uma função apenas de  $\eta$  e  $d$ , ou seja

$$\frac{\partial \eta}{\partial Y} = d(1 - \eta); \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial Y^2} = -d^2(1 - \eta); \quad \frac{\partial^3 \eta}{\partial Y^3} = d^3(1 - \eta) \quad (3.43.a, b, c)$$

O parâmetro  $d$  que aparece na equação (3.42) é um parâmetro de contração de escala e  $\eta$  a nova coordenada transversal. Este parâmetro assume valores ótimos que permitem a solução do sistema de equações que será obtido após aplicação da GITT. Tais valores serão apresentados nos resultados e discussões.

Após aplicação da regra da cadeia para o tratamento matemático dos gradientes na direção Y nas equações da conservação da massa, quantidade de movimento, energia, e condições de contorno, obtêm-se a formulação em função da nova coordenada e do parâmetro d. Assim:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + d(1-\eta)\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial X} + d(1-\eta)V \frac{\partial U}{\partial \eta} = & -d^2(1-\eta)\frac{\partial U}{\partial \eta} + d^2(1-\eta)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + K \left[ -d^2(1-\eta)\frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \right. \\ & d^2(1-\eta)^2 \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - d^2(1-\eta)U \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial \eta} + d^2(1-\eta)^2 U \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial \eta^2} - d^3(1-\eta)^2 \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \\ & \left. d^3(1-\eta)^3 \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + d^3(1-\eta)V \frac{\partial U}{\partial \eta} - 3d^3(1-\eta)^2 V \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + d^3(1-\eta)^3 V \frac{\partial^3 U}{\partial \eta^3} \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + d(1-\eta)V \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pr} \left[ -d^2(1-\eta)\frac{\partial \theta}{\partial \eta} + d^2(1-\eta)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right] \quad (3.46)$$

$$U = X, V = F, \theta = 0 \text{ em } \eta = 0 \quad (3.47.a, b, c)$$

$$U = 0, \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0, \theta = 1 \text{ em } \eta = 1 \quad (3.48.a, b, c)$$

$$U = 0, \theta = 0 \text{ em } X = 0 \quad (3.49.a, b)$$

### 3.3.7-SOLUÇÃO VIA GITT

Considerando as ideias da Técnica da Transformada Integral Generalizada (COTTA, 1993) já apresentadas, para a melhora do desempenho computacional é conveniente definir um filtro que homogeneíza as condições de contorno para o campo de velocidade e temperatura na direção  $\eta$ , a qual, posteriormente, será a coordenada escolhida para a definição do problema de autovalor. Portanto:

$$U(X, \eta) = \tilde{U}(X, \eta) + U_{\infty}(\eta; X) \quad (3.50)$$

$$\theta(X, \eta) = \tilde{\theta}(X, \eta) + \theta_p(\eta) \quad (3.51)$$

onde  $X$  em  $U_{\infty}(\eta; X)$  é considerado um parâmetro,  $\tilde{U}(X, \eta)$  e  $\tilde{\theta}(X, \eta)$  são os potenciais filtrados para os campos de velocidade e temperatura, respectivamente.

As formas para  $U_{\infty}(\eta; X)$  e  $\theta_p(\eta)$ , advêm da solução das equações diferenciais dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U_{\infty}(\eta; X)}{\partial \eta^3} &= 0 \\ U_{\infty}(0; X) &= X \\ U_{\infty}(1; X) &= 0 \\ \frac{\partial U_{\infty}(1; X)}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned} \quad (3.52.a, b, c, d)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \theta_p(\eta)}{d\eta^2} &= 0 \\ \theta_p(0) &= 0 \\ \theta_p(\eta) &= 1 \end{aligned} \quad (3.53.a, b, c)$$

O critério de composição das equações diferenciais para a obtenção da solução analítica do filtro foi a escolha do termo de mais alta ordem nas equações diferenciais e condições de contorno adimensionalizadas. Desta maneira, as soluções para (3.52) e (3.53) são:

$$U_{\infty}(\eta; X) = X(\eta^2 - 2\eta + 1) \quad (3.54)$$

$$\theta_p(\eta) = \eta \quad (3.55)$$

Substituindo (3.50), (3.51), (3.54), (3.55) nas equações (3.44) a (3.49), obtêm-se:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} + d(1-\eta) \frac{\partial V}{\partial \eta} = -g(\eta) \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} & (U_\infty + \tilde{U}) \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} + g(\eta) \right) + d(1-\eta) V \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) = -d^2(1-\eta) \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) + \\ & d^2(1-\eta)^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) + K \left[ -d^2(1-\eta) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) - \right. \\ & d^2(1-\eta) g(\eta) \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) + d^2(1-\eta)^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) + \\ & d^2(1-\eta)^2 g(\eta) \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) - d^2(1-\eta) (U_\infty + \tilde{U}) \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial X \partial \eta} - d^2(1-\eta) (U_\infty + \tilde{U}) h(\eta) + \\ & d^2(1-\eta)^2 (U_\infty + \tilde{U}) \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial X \partial \eta^2} + 2d^2(1-\eta)^2 (U_\infty + \tilde{U}) + \\ & - d^3(1-\eta)^2 \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) \frac{\partial V}{\partial \eta} + d^3(1-\eta)^3 \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \\ & d^3(1-\eta) V \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) - 3d^3(1-\eta)^2 V \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) + \\ & \left. d^3(1-\eta)^3 V \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} \right] \quad (3.57) \end{aligned}$$

$$(U_\infty + \tilde{U}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X} + d(1-\eta) V \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) = \frac{1}{Pr} \left[ -d^2(1-\eta) \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) + d^2(1-\eta)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \eta^2} \right] \quad (3.58)$$

$$\tilde{U} = 0, V = F, \tilde{\theta} = 0 \text{ em } \eta = 0 \quad (3.59.a, b, c)$$

$$\tilde{U} = 0, \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} = 0, \tilde{\theta} = 0 \text{ em } \eta = 1 \quad (3.60.a, b, c)$$

$$\tilde{U} = 0, \tilde{\theta} = -\eta \text{ em } X = 0 \quad (3.61.a, b)$$

onde  $g(\eta) = \eta^2 - 2\eta + 1$  e  $h(\eta) = 2\eta - 2$

Com objetivo de facilitar a transformação integral da equação da conservação da massa, a mesma será integrada no domínio de  $\eta$ . Assim:

$$\int_0^\eta \partial V = - \int_0^\eta \frac{g(\eta)}{d(1-\eta)} d\eta - \int_0^\eta \frac{1}{d(1-\eta)} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} d\eta \quad (3.62)$$

$$V(X, \eta) = V_0^*(\eta) - \frac{1}{d} \int_0^\eta \left( \frac{1}{1-\eta} \right) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} d\eta \quad (3.63)$$

onde

$$V_0^*(\eta) = F + \frac{1}{d} \left( \frac{\eta^2}{2} - \eta \right) \quad (3.64)$$

Diferenciando duas vezes a equação da continuidade em relação a  $\eta$ , pode-se obter ainda:

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\eta-1}{d} - \frac{1}{d(1-\eta)} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d(1-\eta)^2} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} - \frac{1}{d(1-\eta)} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial X \partial \eta} \quad (3.66)$$

Na aplicação da GITT para a integração das equações diferenciais parciais (3.56) a (3.61), a direção  $\eta$  é escolhida para o processo de transformação integral, devido as características homogêneas do problema na referida direção, característica esta que foi obtida após a aplicação do filtro. Assim, são propostos os problemas auxiliares para os campos de velocidade e temperatura, onde serão expandidos os potenciais de velocidade e temperatura em autofunções.

Para o campo de Velocidade

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_i}{d\eta^2} + \mu_i^2 \psi_i &= 0 \\ \psi_i(0) &= 0 \\ \psi_i(1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.67.a, b, c}$$

onde  $\psi_i(\eta)$  são autofunções do problema (3.67)

O problema (3.67) é então resolvido para obter-se a seguinte solução analítica.

$$\psi_i(\eta) = \text{Sen}(\mu_i \eta) \tag{3.68}$$

Os autovalores  $\mu_i$  são calculados a partir de (3.67.c) e (3.68), Logo:

$$\mu_i = i\pi \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{3.69}$$

As autofunções satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \text{Sen}(\mu_i \eta) \text{Sen}(\mu_j \eta) d\eta = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ N_i, & \text{se } i = j \end{cases} \tag{3.70}$$

A Norma  $N_i$  é calculada de

$$N_i = \int_0^1 [\text{Sen}(\mu_i \eta)]^2 d\eta = \frac{1}{2} \tag{3.71}$$

Sem perda de generalidade a autofunção será normalizada da seguinte forma:

$$\tilde{\psi}_i = \frac{\psi_i}{N_i^{1/2}} \tag{3.72}$$

Para o campo de Temperatura

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Gamma_i}{d\eta^2} + \lambda_i^2\Gamma_i &= 0 \\ \Gamma_i(0) &= 0 \\ \Gamma_i(1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.73.a, b, c)$$

Similarmente o problema (3.73) é resolvido analiticamente para fornecer as autofunções, equação transcendental para cálculo dos autovalores, propriedade de ortogonalidade e norma  $M_i$ .

$$\Gamma_i(\eta) = \text{Sen}(\lambda_i\eta) \quad \lambda_i = i\pi \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.74 \text{ e } 3.75)$$

$$\int_0^1 \text{Sen}(\lambda_i\eta)\text{Sen}(\lambda_j\eta)d\eta = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ M_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad M_i = \int_0^1 [\text{Sen}(\lambda_i\eta)]^2 d\eta = \frac{1}{2} \quad (3.76 \text{ e } 3.77)$$

Sem perda de generalidade a autofunção será normalizada da seguinte forma:

$$\tilde{\Gamma}_i = \frac{\Gamma_i}{M_i^{1/2}} \quad (3.78)$$

Definido os problemas de autovalor apresentados para o campo de velocidade e temperatura, definem-se então os pares transformada-inversa do problema.

Para o campo de Velocidade

$$\bar{U}_i(X) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta)\tilde{U}(X,\eta)d\eta, \text{ Transformada} \quad (3.79)$$

$$\tilde{U}(X,\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta)\bar{U}_i(X), \text{ Inversa} \quad (3.80)$$

Para o campo de Temperatura

$$\bar{\theta}_i(X) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(\eta) \tilde{\theta}_i(X, \eta) d\eta, \text{ Transformada} \quad (3.81)$$

$$\tilde{\theta}(X, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(\eta) \bar{\theta}_i(X), \text{ Inversa} \quad (3.82)$$

Após a definição dos pares transformada-inversa, o passo seguinte é iniciar o processo de transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais (3.56) a (3.61). Para o campo de velocidade a equação (3.57) é multiplicada pelo operador

$$\int_0^1 \tilde{\Psi}_i(\eta) d\eta. \text{ Assim, têm-se:}$$

$$\left. \begin{aligned} & \left( U_{\infty} + \tilde{U} \right) \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} + g(\eta) \right) + d(1-\eta) \mathbf{V} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) = -d^2(1-\eta) \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) + \\ & d^2(1-\eta)^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) + K \left[ -d^2(1-\eta) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) - \right. \\ & d^2(1-\eta) g(\eta) \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) + d^2(1-\eta)^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) + \\ & \left. d^2(1-\eta)^2 g(\eta) \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) - d^2(1-\eta) (U_{\infty} + \tilde{U}) \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial X \partial \eta} - d^2(1-\eta) (U_{\infty} + \tilde{U}) h(\eta) + \right. \\ & \left. d^2(1-\eta)^2 (U_{\infty} + \tilde{U}) \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial X \partial \eta^2} + 2d^2(1-\eta)^2 (U_{\infty} + \tilde{U}) - \right. \\ & d^3(1-\eta)^2 \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} + d^3(1-\eta)^3 \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \eta^2} + \\ & d^3(1-\eta) \mathbf{V} \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) - 3d^3(1-\eta)^2 \mathbf{V} \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) + \\ & \left. d^3(1-\eta)^3 \mathbf{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} \right] \end{aligned} \right\} d\eta \quad (3.83)$$

Substituindo a fórmula da Inversa (3.80) para o campo de velocidade em (3.83), obtêm-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}^* \frac{d\tilde{U}_j}{dX} = B_i \quad (3.84)$$

onde

$$\begin{aligned} A_{ij}^* = & \int_0^1 \tilde{\psi}_i \left[ (U_{\infty} + \tilde{U}) \left( \tilde{\psi}_j + d^2(1-\eta)K \frac{d\tilde{\psi}_j}{d\eta} - d^2(1-\eta)^2 K \frac{d^2\tilde{\psi}_j}{d\eta^2} \right) + \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) \left( A_j(\eta)(d^2(1-\eta)K - (1-\eta)) + d^2(1-\eta)K\tilde{\psi}_j + d^2(1-\eta)^2 K \frac{d\tilde{\psi}_j}{d\eta} \right) + \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) \left( -d^2(1-\eta)^2 K\tilde{\psi}_j - 3d^2(1-\eta)^2 KA_j(\eta) \right) + \right. \\ & \left. d^2(1-\eta)^3 KA_j(\eta) \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \eta^3} \right] d\eta \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} B_i = & \int_0^1 \tilde{\psi}_i \left[ (U_{\infty} + \tilde{U}) \left( -d^2(1-\eta)Kh(\eta) + 2d^2(1-\eta)^2 K - g(\eta) \right) + \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) \left( -d^2(1-\eta)(1 + Kg(\eta)) + 2d^2(1-\eta)(\eta-1)^2 K + d(1-\eta)V_0^*(d^2K - 1) \right) + \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) \left( d^2(1-\eta)^2 + d^2(1-\eta)^2 Kg(\eta) - 3d^3(1-\eta)^2 KV_0^*(\eta) \right) + \right. \\ & \left. d^3(1-\eta)^3 KV_0^*(\eta) \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \eta^3} \right] d\eta \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$A_j(\eta) = \int_0^{\eta} \frac{\tilde{\psi}_j}{1-\eta} d\eta \quad (3.87)$$

Observa-se da equação (3.87) que quando  $\eta$  é igual a 1, a integral torna-se imprópria. GRANVILLE *et al.* (1965) recomendam que neste caso é necessário examinar a existência da integral. Caso contrário, a inexistência da mesma levará a resultados errôneos. A prova da existência desta integral é demonstrada no apêndice II.

A transformação da condição de contorno em X é obtida, aplicando o mesmo operador na equação (3.61.a). Assim têm-se:

$$\widetilde{U}_i(0) = 0 \quad (3.88)$$

Com o objetivo de minimizar os múltiplos somatórios nos coeficientes que surgem naturalmente no processo de transformação integral do problema, os coeficientes  $A_{ij}^*$  e  $B_i$  serão avaliados através de uma semi-linearização de parte do integrando conforme mostrado abaixo (ARAÚJO, 2008).

$$A_{ij}^* = \sum_{m=1}^{N_m} \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \widetilde{\Psi}_i(a_m \eta + b_m) d\eta \quad (3.89)$$

$$A_{ij}^* = \sum_{m=1}^{N_m} a_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \widetilde{\Psi}_i \eta d\eta + \sum_{m=1}^{N_m} b_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \widetilde{\Psi}_i d\eta \quad (3.90)$$

Comparando as equações (3.89) e (3.90) com (3.85) e (3.86), observa-se que o fator que multiplica a autofunção é aproximado por uma função linear, onde m é o intervalo onde será avaliado a integral no domínio de  $\eta$ ,  $a_m$ , e  $b_m$  são os coeficientes da função e N a ordem do truncamento do somatório das integrais que avaliam os referidos coeficientes. Observa-se ainda, das equações, que com a aplicação desta metodologia há uma certa facilidade na integração dos termos, no que diz respeito a obtenção de uma forma analítica, o que de certa forma diminui o custo computacional para este problema. Assim:

$$a_m = \frac{F_j|_{\eta_m} - F_j|_{\eta_{m-1}}}{\Delta\eta}; b_m = F_j|_{\eta_m} - a_m \eta_m \quad (3.91.a, b)$$

$$\begin{aligned}
F_j(X, \eta, \tilde{U}) = & \left[ (U_\infty + \tilde{U}) \left( \tilde{\psi}_j + d^2(1-\eta)K \frac{d\tilde{\psi}_j}{d\eta} - d^2(1-\eta)^2 K \frac{d^2\tilde{\psi}_j}{d\eta^2} \right) + \right. \\
& \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) \left( A_j(\eta)(d^2(1-\eta)K - (1-\eta)) + d^2(1-\eta)K\tilde{\psi}_j + d^2(1-\eta)^2 K \frac{d\tilde{\psi}_j}{d\eta} \right) + \\
& \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) \left( -d^2(1-\eta)^2 K\tilde{\psi}_j - 3d^2(1-\eta)^2 KA_j(\eta) \right) + \\
& \left. d^2(1-\eta)^3 KA_j(\eta) \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \eta^3} \right]
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Sendo  $\Delta\eta$  o tamanho do intervalo onde são avaliadas as integrais.

Procedendo da mesma maneira para o coeficiente  $B_i$ , obtêm-se:

$$B_i = \sum_{m=1}^{N_m} \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \tilde{\psi}_i (c_m \eta + d_m) d\eta \tag{3.93}$$

$$B_i = \sum_{m=1}^{N_k} c_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \tilde{\psi}_i \eta d\eta + \sum_{m=1}^{N_k} d_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \tilde{\psi}_i d\eta \tag{3.94}$$

$$c_m = \frac{H|_{\eta_m} - H|_{\eta_{m-1}}}{\Delta\eta}; d_m = H|_{\eta_m} - c_m \eta_m \tag{3.95.a, b}$$

$$\begin{aligned}
H(X, \eta, \tilde{U}) = & \left[ (U_\infty + \tilde{U}) \left( -d^2(1-\eta)Kh(\eta) + 2d^2(1-\eta)^2 K - g(\eta) \right) + \right. \\
& \left( \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} + Xh(\eta) \right) \left( -d^2(1-\eta)(1 + Kg(\eta)) + 2d^2(1-\eta)(\eta-1)^2 K + d(1-\eta).V_0^*(d^2K - 1) \right) + \\
& \left( \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \eta^2} + 2X \right) \left( d^2(1-\eta)^2 + d^2(1-\eta)^2 Kg(\eta) - 3d^3(1-\eta)^2 KV_0^*(\eta) \right) + \\
& \left. d^3(1-\eta)^3 KV_0^*(\eta) \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \eta^3} \right]
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Para o campo de temperatura a equação (3.58) é multiplicada pelo operador

$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(\eta) d\eta$ . E, similarmente ao realizado para o campo de velocidade, encontra-se:

$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(\eta) \left[ (U_\infty + \tilde{U}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X} + d(1-\eta)V \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) = \frac{1}{\text{Pr}} \left[ -d^2(1-\eta) \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) + d^2(1-\eta)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \eta^2} \right] \right] d\eta \quad (3.97)$$

Substituindo a equação da conservação da massa integrada (3.63) em (3.97), obtêm-se:

$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(\eta) \left[ (U_\infty + \tilde{U}) \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X} + d(1-\eta) \left( V_0^* - \frac{1}{d} \int_0^\eta \frac{1}{1-\eta} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} d\eta \right) \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) = \frac{1}{\text{Pr}} \left[ -d^2(1-\eta) \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) + d^2(1-\eta)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \eta^2} \right] \right] d\eta \quad (3.98)$$

Substituindo a fórmula da Inversa (3.82) para a temperatura, obtêm-se para (3.98):

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \frac{d\tilde{\theta}_j}{dX} - \sum_{j=1}^{\infty} D_{ij} \frac{d\tilde{U}_j}{dX} = E_i \quad (3.99)$$

onde

$$C_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i [(\tilde{U} + U_\infty) \tilde{\Gamma}_j] d\eta \quad (3.100)$$

$$D_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left[ (1-\eta)A_j(\eta) \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) \right] d\eta \quad (3.101)$$

$$E_i = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left[ \left( \frac{d^2(1-\eta)}{Pr} - cV_o^*(1-\eta) \right) \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) + \frac{d^2(\eta-1)^2}{Pr} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \eta^2} \right] d\eta \quad (3.102)$$

A transformação da condição inicial é obtida, aplicando o mesmo operador na equação (3.61.b). Assim têm-se:

$$\tilde{\theta}_i(0) = - \int_0^1 \eta \tilde{\Gamma}_i(\eta) d\eta \quad (3.103)$$

Os coeficientes  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  e  $E_i$  serão semi-linearizados da mesma maneira como realizado para o campo de velocidade. Assim:

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} g_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \tilde{\Gamma}_i \eta d\eta + \sum_{m=1}^{N_m} h_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \tilde{\Gamma}_i d\eta \quad (3.104)$$

$$g_m = \frac{P_j|_{\eta_m} - P_j|_{\eta_{m-1}}}{\Delta \eta}; h_m = P_j|_{\eta_m} - g_m \eta_m \quad (3.105.a, b)$$

$$D_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} r_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \tilde{\Gamma}_i \eta d\eta + \sum_{m=1}^{N_m} s_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \tilde{\Gamma}_i d\eta \quad (3.106)$$

$$r_m = \frac{Q_j|_{\eta_m} - Q_j|_{\eta_{m-1}}}{\Delta \eta}; s_m = Q_j|_{\eta_m} - r_m \eta_m \quad (3.107.a, b)$$

$$E_i = \sum_{m=1}^{N_m} t_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \tilde{\Gamma}_i \eta d\eta + \sum_{m=1}^{N_m} u_m \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} \tilde{\Gamma}_i d\eta \quad (3.108)$$

$$t_m = \frac{R|_{\eta_m} - R|_{\eta_{m-1}}}{\Delta\eta}; u_m = R|_{\eta_m} - t_m \eta_m \quad (3.109.a, b)$$

onde

$$P_j(X, \eta, \tilde{U}) = (\tilde{U} + U_\infty) \tilde{\Gamma}_j \quad (3.110)$$

$$Q_j(X, \eta, \tilde{\theta}) = (1-\eta) A_j(\eta) \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) \quad (3.111)$$

$$R(X, \eta, \tilde{\theta}) = \left( \frac{d^2(1-\eta)}{\text{Pr}} - cV_0^*(1-\eta) \right) \left( \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \eta} + 1 \right) + \frac{d^2(\eta-1)^2}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \eta^2} \quad (3.112)$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado, dados pelas equações (3.84) e (3.99) é melhor visualizado em sua forma matricial, dada por:

$$\begin{bmatrix} [A_{ij}^*] & \cdot & [0]_{ij} \\ \dots & \dots & \dots \\ [-D_{ij}] & \cdot & [C_{ij}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{U}_j}{dX} \\ \frac{d\tilde{\theta}_j}{dX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_i \\ \dots \\ E_i \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

Para o desenvolvimento do código computacional, onde se implementou o sistema diferencial ordinário obtido, dados pelas equações (3.84) e (3.99), a subrotina DIVPAG da biblioteca IMSL (1989) foi utilizada. A utilização desta subrotina requer truncar a série infinita numa ordem suficientemente grande de termos (NV e NT para o campo de velocidade e temperatura, respectivamente) de maneira a atender o erro relativo na obtenção do potencial original. Esta subrotina resolve problemas de valor

inicial com comportamento rígido, com uma importante característica de controle automático de erro na solução do sistema de equações diferenciais ordinário obtido.

Uma vez calculado os potenciais  $\bar{U}_i$  e  $\bar{\theta}_i$ , o campo de velocidade e temperatura originais são obtidos através da substituição da fórmula de inversão dados pelas equações (3.80) e (3.82) nas equações (3.50), (3.51) e (3.63). Assim, têm-se:

$$U(X, \eta) = X[\eta^2 - 2\eta + 1] + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \bar{U}_i(X) \quad (3.114)$$

$$V(X, \eta) = V_0^*(\eta) - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{\infty} A_i(\eta) \frac{d\bar{U}_i(X)}{dX} \quad (3.115)$$

$$\theta(X, \eta) = \eta + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(\eta) \bar{\theta}_i(X) \quad (3.116)$$

### 3.3.8-ALGORITMO COMPUTACIONAL

O sistema de equações diferenciais ordinárias não-linear de primeira ordem, equações (3.84) e (3.99), juntamente com suas condições de contorno, equações (3.88) e (3.103), devem ser resolvidos por técnicas numéricas, devido a impossibilidade de se obter soluções analíticas. Tal característica confere o caráter híbrido numérico-analítico à GITT. A convergência da solução para um número prescrito de algarismos significativos é garantida para ordens de truncamento crescentes. Essa outra característica indica que a GITT funciona com precisão controlada, estabelecida automaticamente à medida que o truncamento nas expansões é realizado. Esse procedimento é similar ao que se segue caso se obtivesse uma solução exata através de uma técnica puramente analítica (QUARESMA, 1997).

A solução numérica desse sistema pode ser obtida através de rotinas matemáticas bem estabelecidas, como a DIVPAG da biblioteca IMSL (1989). Essa rotina é empregada na solução de problemas de valor inicial representado por equações

diferencias ordinárias não lineares de primeira ordem que possuem características rígidas no decaimento do potencial (comportamento rígido). O algoritmo da DIVPAG é baseado nos métodos de GEAR e ADAMS-MOULTON (IMSL, 1989).

A rotina DIVPAG resolve problemas do tipo

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y) \quad (3.117)$$

$$Y(0) = f(t, Y) \quad (3.118)$$

Para fazer uso da DIVPAG, é necessário reescrever as equações (3.84) e (3.99), juntamente com suas condições iniciais de uma maneira que se possa observar as ordens de truncamento a qual estas equações estarão sujeitas no processo de simulação. Além disso, as equações devem ser implementadas de maneira que a solução do sistema seja calculada simultaneamente. Assim, o sistema toma a seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^{NV} A_{ij}^* \frac{d\bar{U}_j}{dX} = B_i, \quad i = 1, NV \quad (3.119)$$

$$\sum_{j=Nv+1}^{NV+NT} C_{ij} \frac{d\bar{\theta}_j}{dX} - \sum_{j=1}^{NT} D_{ij} \frac{d\bar{U}_j}{dX} = E_i, \quad i = NV + 1, NV + NT \quad (3.120)$$

As condições iniciais para a velocidade e temperatura ficam

$$\bar{U}_i(0) = 0, \quad i = 1, NV \quad (3.121)$$

$$\bar{\theta}_i(0) = - \int_0^1 \eta \tilde{\Gamma}_i(\eta) d\eta, \quad i = NV + 1, NV + NT \quad (3.122)$$

A forma matricial do sistema (3.119) e (3.120) que atende ao tipo de configuração resolvível pela DIVPAG é

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{Y}) \frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \quad (3.123)$$

ou ainda

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{F}^*(\mathbf{Y})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \quad (3.124)$$

No vetor  $\mathbf{Y}$ , dos potenciais transformados, as primeiras posições são ocupadas por  $\bar{U}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, NV$ ) e as seguintes por  $\bar{\theta}_j$  ( $j = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT$ ). A matriz  $\mathbf{G}$  armazena os coeficientes  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, NV$ ) e  $E_i$  ( $i = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT$ ), e a matriz  $\mathbf{F}^*$  armazena os coeficientes  $A_{ij}^*$  ( $i = 1, 2, \dots, NV; j = 1, 2, \dots, NV$ ),  $C_{ij}$  ( $i = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT; j = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT$ ),  $D_{ij}$  ( $i = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT; j = 1, 2, \dots, NV$ ).

No código computacional desenvolvido no presente trabalho as ordens de truncamento foram assumidas iguais, ou seja,  $NV = NT$ . No entanto, é possível ter ordens diferentes. Vale ressaltar que nesta análise o potencial de temperatura é dependente do potencial da velocidade. Desta maneira, para ordens de truncamento muito diferentes, é necessário avaliar resultados para o campo de temperatura diante da ordem de truncamento assumida para o campo de velocidade. Pois é possível que uma pequena ordem de truncamento para o campo de velocidade leve a resultados errôneos no campo de temperatura, em virtude de resultados ainda não convergidos dentro da tolerância prescrita.

### 3.4-RESULTADOS E DISCUSSÃO

Resultados numéricos para os campos de velocidade e temperatura foram obtidos. O código computacional foi desenvolvido em linguagem de programação FORTRAN 2003 e executado em computadores com processadores Celeron 2.66-GHz e Intel 2.2 GHz. A subrotina DIVPAG da IMSL foi usada para aproximar numericamente a versão truncada do sistema diferencial ordinário, com um erro relativo prescrito pelo usuário de  $10^{-8}$  para os potenciais de velocidade e temperatura. Para o campo de velocidade, os resultados foram produzidos para diferentes ordens de truncamento ( $NV$

$\leq 14$ ) e diferentes valores dos parâmetros de estudo K e F. Similarmente, para o campo de temperatura, os resultados foram produzidos para  $NT \leq 30$  e diferentes valores dos parâmetros de estudo K, F e Pr.

### 3.4.1-CAMPO DE VELOCIDADE

Primeiramente mostra-se o comportamento da taxa de convergência para os componentes de velocidade U e V para alguns valores dos parâmetros K e  $F = 0$ . Salienta-se que, nos resultados gerados pelo código desenvolvido no presente trabalho, os valores dos potenciais de velocidade e temperatura serão listados e graficados em função da coordenada Y. Isto é possível ao invertermos a equação (3.42) na saída de resultados do código.

Os parâmetros físicos de entrada no código desenvolvido obedecem critérios de escolha que necessitam ser explicados, pois suas escolhas interferem no comportamento numérico do código, além de serem responsáveis diretamente pelas mudanças nas características físicas dos perfis de velocidade e temperatura no interior da camada limite em análise. O primeiro parâmetro refere-se a contribuição elástica no fluido, ou seja, o parâmetro K. RAJAGOPAL *et al.* (1983) citam em sua teoria de camada limite para escoamento de fluidos viscoelásticos que, para se garantir o desenvolvimento de uma camada limite no escoamento de tal fluido, dois grupos adimensionais necessitam satisfazer os seguintes critérios de desigualdade, simultaneamente:  $Re \gg 1$  e  $\frac{Re}{K} \gg 1$ . O primeiro grupo mostra a bem conhecida relação na qual a teoria de camada limite de Prandtl para um fluido newtoniano tem validade, e quanto maior o número de Reynolds, as equações de camada limite tornam-se mais adequada a observação experimental. A segunda desigualdade mostra uma relação entre os efeitos viscosos e elásticos. Então, para elevado valor do número de Reynolds, que no caso de escoamento externo e laminar sobre placa plana situa-se próximo de 60000 e o parâmetro viscoelástico assumindo valores maiores que zero ( $K > 0$ ), a teoria de RAJAGOPAL *et al.* (1983) torna-se mais precisa. Entretanto, é necessário observar que, quando os valores de K tornam-se elevados, menor é a validade da segunda desigualdade, o que do ponto de vista de simulação numérica necessita ser implementado como uma espécie de critério de observação dos resultados.

Ainda sobre o parâmetro K, PAKDEMIRLI (1994), demonstrando equações de camada limite de múltiplos ‘decks’ para fluidos de segundo e terceiro graus escoando sobre placas levemente curvadas, cita que a formação de camada limite convencional para fluido de segundo grau é verificada somente se os parâmetros viscoelásticos do fluido de segundo grau forem da mesma ordem do inverso do número de Reynolds. Isto em primeira análise parece contradizer a teoria de RAJAGOPAL *et al.* (1983), pois limita a escolha dos parâmetros viscoelásticos à valores próximos do valor  $1/Re$ . Entretanto, este trabalho só reafirma que a relação  $\frac{Re}{K} \gg 1$  é melhor satisfeita para pequenos valores dos parâmetros viscoelásticos. Neste capítulo, tais relações não foram observadas *a priori*, em virtude do processo de adimensionalização das equações governantes determinar uma equação de quantidade de movimento independente do número de Reynolds. Desta maneira, os valores de K foram assumidos maiores que zero e limitado superiormente em  $K = 10$ .

O segundo parâmetro refere-se a injeção ou sucção na placa plana (F). Embora possa parecer simples assumir qualquer valor para F, o mesmo segue critérios técnicos bem definidos. Os valores a serem assumidos para velocidade de sucção ou injeção de fluido na camada limite em desenvolvimento são limitados para não se comprometer a continuidade e a hipótese de não deslizamento. Para que o escoamento com injeção ou sucção na placa satisfaça as hipóteses simplificadoras da teoria de camada limite assumida no presente trabalho é necessário limitar  $V_0$  a ordem de magnitude de  $O\left(\frac{cx}{\sqrt{Re}}\right)$ . Isto foi demonstrado por SCHLICHTING (1979) para fluidos newtonianos, e foi assumido neste trabalho para efeito de análise do comportamento dos perfis de velocidade e temperatura diante de injeção ou sucção. Portanto, quando a velocidade de injeção ou sucção possui ordem de magnitude pequena, é possível desprezar a perda de massa no escoamento externo e desta maneira considerar que o escoamento não é afetado pela injeção ou sucção aplicada na superfície da placa. Com isso, pode-se assumir, em termos de valores, que  $V_0/cx$  situa-se no intervalo 0,0001 a 0,01 (SCHLICHTING, 1979). Vale salientar que é possível assumir outros valores para injeção ou sucção diferente do intervalo considerado. Assim, altas taxas de injeção requerem em tratar o modelo de forma completa, ou seja, sem consideração de camada

limite. Para baixas taxas de injeção ou sucção, o modelo pode ser tratado com a formulação em camada limite.

A convergência dos resultados dos potenciais de velocidade e temperatura são também determinados pelo tamanho do intervalo ( $\Delta\eta$ ) onde são avaliados os coeficientes integrais semilinearizados. Com isso se faz necessário uma análise de convergência dos resultados para os campos de velocidade e temperatura em função de  $\Delta\eta$ , antes da discussão principal. O objetivo desta análise é obter qual o valor de  $\Delta\eta$  a ser utilizado nos cálculos, pois é esperado que para um tamanho não muito grande de  $\Delta\eta$  os resultados numéricos se apresentem satisfatórios, tendo em vista que os coeficientes semilinearizados representam funções em primeira análise bem comportadas. Portanto nas tabelas 3.1 e 3.2 são mostrados a convergência dos potenciais em função dos parâmetros de interesse.

Tabela 3.1 – Convergência dos potenciais de velocidade e temperatura para em função de  $\Delta\eta$  para  $NV = NT = 48$ ,  $K = 0,01$ ,  $Rv = 0$ ,  $Pr = 1$ ,  $d = 0,35$  na posição  $X = 0,02$  e  $Y = 0,0179131$ .

Potencial	$\Delta\eta = 101$	$\Delta\eta = 201$	$\Delta\eta = 301$	$\Delta\eta = 401$	$\Delta\eta = 501$	$\Delta\eta = 601$
U	0,01965	0,01965	0,01965	0,01965	0,01965	0,01965
V	0,01776	0,01776	0,01776	0,01776	0,01776	0,01776
$\theta$	0,01043	0,01046	0,01046	0,01047	0,01047	0,01047

Tabela 3.2 – Convergência dos potenciais de velocidade e temperatura para em função de  $\Delta\eta$  para  $NV = NT = 48$ ,  $K = 10$ ,  $Rv = 0$ ,  $Pr = 1$ ,  $d = 0,14$  na posição  $X = 0,02$  e  $Y = 0,0447829$ .

Potencial	$\Delta\eta = 101$	$\Delta\eta = 201$	$\Delta\eta = 301$	$\Delta\eta = 401$	$\Delta\eta = 501$	$\Delta\eta = 601$
U	0,01973	0,01973	0,01973	0,01973	0,01973	0,01973
V	0,04448	0,04448	0,04448	0,04448	0,04448	0,04448
$\theta$	0,03252	0,03255	0,03255	0,03256	0,03256	0,03256

Nas tabelas 3.1 e 3.2 observa-se que os potenciais de velocidade U e V não variaram com o número de intervalos  $\Delta\eta$  testados, ou seja estão convergidos em seis algarismos significativos, porém para o potencial de temperatura adimensional  $\theta$ , observou-se uma convergência somente a partir de  $\Delta\eta = 401$ . Isto significa que assumindo valores para  $\Delta\eta < 401$  nos cálculos, a convergência dos resultados ficarão

prejudicadas. Assim, o valor de  $\Delta\eta = 401$  será utilizado no cálculo dos potenciais de velocidade e temperatura. É possível utilizar  $\Delta\eta$  maiores, no entanto o custo computacional ficará maior.

As tabelas 3.3 a 3.8 mostram o comportamento da convergência para as componentes de velocidade V e U em função dos parâmetros viscoelástico e injeção/sucção.

Tabela 3.3 - Convergência da componente de velocidade (-) V(X, Y) em função de Y para várias posições de X com  $K = 0,01$ ,  $F = 0$  e  $d = 0,495$ .

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0127	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126
1,0110	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375
2,0154	0,8698	0,8697	0,8697	0,8697	0,8697	0,8697	0,8697
5,0712	0,9988	0,9986	0,9985	0,9985	0,9985	0,9985	0,9985
7,0015	1,0042	1,0040	1,0040	1,0040	1,0040	1,0040	1,0040
8,0335	1,0048	1,0046	1,0046	1,0046	1,0046	1,0046	1,0046
10,2529	1,0050	1,0049	1,0049	1,0049	1,0049	1,0049	1,0049
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0127	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126
1,0110	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375
2,0154	0,8698	0,8697	0,8697	0,8697	0,8697	0,8697	0,8697
5,0712	0,9988	0,9986	0,9985	0,9985	0,9985	0,9985	0,9985
7,0015	1,0042	1,0040	1,0040	1,0040	1,0040	1,0040	1,0040
8,0335	1,0048	1,0046	1,0046	1,0046	1,0046	1,0046	1,0046
10,2529	1,0050	1,0049	1,0049	1,0049	1,0049	1,0049	1,0049
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0127	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126	0,0126
1,0110	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375	0,6375
2,0154	0,8698	0,8697	0,8697	0,8697	0,8697	0,8697	0,8697
5,0712	0,9988	0,9986	0,9985	0,9985	0,9985	0,9985	0,9985
7,0015	1,0042	1,0040	1,0040	1,0040	1,0040	1,0004	1,0040
8,0335	1,0048	1,0046	1,0046	1,0046	1,0046	1,0046	1,0046
10,2529	1,0050	1,0049	1,0049	1,0049	1,0049	1,0049	1,0049

Tabela 3.4 - Convergência da componente de velocidade U(X, Y) em função de Y para várias posições de X com  $K = 0,01$ ,  $F = 0$  e  $d = 0,495$ .

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0127	0,0197	0,0197	0,0197	0,0197	0,0197	0,0197	0,0197
1,0110	0,0073	0,0073	0,0073	0,0073	0,0073	0,0073	0,0073
2,0154	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027	0,0027
5,0712	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
7,0015	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8,0335	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10,2529	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0127	0,4937	0,4937	0,4937	0,4937	0,4937	0,4937	0,4937
1,0110	0,1828	0,1828	0,1828	0,1828	0,1828	0,1828	0,1828
2,0154	0,0674	0,0673	0,0673	0,0673	0,0673	0,0673	0,0673
5,0712	0,0032	0,0032	0,0032	0,0032	0,0032	0,0032	0,0032
7,0015	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005
8,0335	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
10,2529	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0127	0,9875	0,9875	0,9875	0,9875	0,9875	0,9875	0,9875
1,0110	0,3656	0,3657	0,3657	0,3657	0,3657	0,3657	0,3657
2,0154	0,1348	0,1346	0,1346	0,1346	0,1346	0,1346	0,1346
5,0712	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064	0,0064
7,0015	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009	0,0009
8,0335	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
10,2529	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Observa-se da tabela 3.3 e 3.4 que há uma excelente taxa de convergência para os resultados das componentes de velocidade U e V, quando o parâmetro viscoelástico assume valor  $K = 0,01$ , sem injeção ou sucção ( $F = 0$ ). Observa-se também que isto ocorre para pequenas ordens de truncamento  $NV \leq 14$ , o que determinou um baixo custo computacional. Adicionalmente, quando o parâmetro viscoelástico K assume o valor  $K = 10$  percebe-se, também, uma excelente convergência, com ordens de truncamento  $NV \leq 14$ , para as componentes de velocidade U e V, o que pode ser observado nas tabelas 3.5 e 3.6. Salienta-se que as excelentes taxas de convergências

foram determinadas pela escolha adequada do parâmetro  $d$  (parâmetro de contração de escala). Isto não significa que o código não simule para valores de  $d$  muito afastado do ideal, mas é recomendável que quando se trabalha com contração de escala, investigar o parâmetro de ajuste até que se consiga resultados satisfatórios. Outro ponto a ser comentado, é que quando o parâmetro de ajuste está muito afastado do ideal a taxa de convergência se torna muito lenta, até mesmo proibitiva.

Tabela 3.5 - Convergência da componente de velocidade (-)  $V(X, Y)$  em função de  $Y$  para várias posições de  $X$  com  $K = 10$ ,  $F = 0$  e  $d = 0,1507$ .

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0416	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413
1,0298	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853
2,0205	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131
5,0278	2,5885	2,5884	2,5884	2,5884	2,5884	2,5883	2,5883
7,0859	2,9254	2,9252	2,9252	2,9252	2,9251	2,9251	2,9251
8,1289	3,0311	3,031	3,0309	3,0309	3,0308	3,0308	3,0308
10,0851	3,1587	3,1585	3,1584	3,1583	3,1583	3,1583	3,1583
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0416	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413
1,0298	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853
2,0205	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131
5,0278	2,5885	2,5884	2,5884	2,5884	2,5884	2,5883	2,5883
7,0859	2,9254	2,9252	2,9252	2,9252	2,9251	2,9251	2,9251
8,1289	3,0311	3,031	3,0309	3,0309	3,0308	3,0308	3,0308
10,0851	3,1587	3,1585	3,1584	3,1583	3,1583	3,1583	3,1583
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0416	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413	0,0413
1,0298	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853	0,8853
2,0205	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131	1,5131
5,0278	2,5885	2,5884	2,5884	2,5884	2,5884	2,5883	2,5883
7,0859	2,9254	2,9252	2,9252	2,9252	2,9251	2,9251	2,9251
8,1289	3,0311	3,031	3,0309	3,0309	3,0308	3,0308	3,0308
10,0851	3,1587	3,1585	3,1584	3,1583	3,1583	3,1583	3,1583

Tabela 3.6 - Convergência da componente de velocidade  $U(X, Y)$  em função de  $Y$  para várias posições de  $X$  com  $K = 10$ ,  $F = 0$  e  $d = 0,1507$ .

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0416	0,0198	0,0198	0,0198	0,0198	0,0198	0,0198	0,0198
1,0298	0,0147	0,0147	0,0147	0,0147	0,0147	0,0147	0,0147
2,0205	0,0109	0,0109	0,0109	0,0109	0,0109	0,0109	0,0109
5,0278	0,0044	0,0044	0,0044	0,0044	0,0044	0,0044	0,0044
7,0859	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024
8,1289	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017	0,0017
10,0851	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010	0,0010
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0416	0,4938	0,4938	0,4938	0,4938	0,4938	0,4938	0,4938
1,0298	0,3666	0,3665	0,3665	0,3665	0,3665	0,3665	0,3665
2,0205	0,2719	0,2719	0,2719	0,2719	0,2719	0,2719	0,2719
5,0278	0,1098	0,1098	0,1098	0,1098	0,1098	0,1098	0,1098
7,0859	0,0591	0,0591	0,0591	0,0591	0,059	0,059	0,059
8,1289	0,0431	0,0431	0,0431	0,0431	0,0431	0,0431	0,0431
10,0851	0,0239	0,0239	0,0239	0,0239	0,0239	0,0239	0,0239
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0416	0,9875	0,9875	0,9875	0,9875	0,9875	0,9875	0,9875
1,0298	0,7331	0,7331	0,7331	0,7331	0,7331	0,7331	0,7331
2,0205	0,5438	0,5438	0,5438	0,5438	0,5438	0,5438	0,5438
5,0278	0,2197	0,2196	0,2196	0,2196	0,2196	0,2196	0,2196
7,0859	0,1181	0,1181	0,1181	0,1181	0,1181	0,1181	0,1181
8,1289	0,0863	0,0863	0,0862	0,0862	0,0862	0,0862	0,0862
10,0851	0,0479	0,0479	0,0478	0,0478	0,0478	0,0478	0,0478

Nota-se, também, que mesmo quando o parâmetro viscoelástico assume valor bastante significativo ( $K = 10$ ), o que torna o problema mais rígido, a taxa de convergência foi excelente. Assim, a GITT mostrou-se uma técnica com potencial na solução deste tipo de problema, pois resultados com até quatro algarismos significativos foram conseguidos para as componentes de velocidade; com  $K$  assumindo valor de 0,01, muito próximo a condição de fluido newtoniano e  $K = 10$ , com forte influência das tensões normais (contribuição elástica).

Nota-se ainda das tabelas 3.3 e 3.5 que os valores para as componentes de velocidade  $V$  praticamente não variam com a posição  $X$ , mostrando que o modelo desenvolvido está de acordo com a teoria da camada limite usual, onde os gradientes da componente de velocidade  $V$  pouco variam com a direção  $X$ . Das tabelas 3.4 e 3.6, observa-se que a medida que  $X$  aumenta os gradientes da componente de velocidade  $U$  tornam mais acentuados, mostrando que estes gradientes são bastantes significativos nesta direção. Isto é melhor visualizado nas figuras 3.8 e 3.9, onde resultados para a componente de velocidade  $U$  foram gerados em função do parâmetro viscoelástico  $K$ .

Resultados para a componente de velocidade  $V$  também foram produzidos para situações em que há injeção ou sucção na placa estirada, ou seja,  $F$  diferente de zero. Neste caso o parâmetro viscoelástico assumiu valor  $K = 1$ . As tabelas 3.7 e 3.8 mostram o comportamento da convergência da componente de velocidade  $V$ .

Observa-se, das tabelas 3.7 e 3.8, uma excelente taxa de convergência para os resultados da componente de velocidade  $V$  para  $F = -1$  e  $F = 0,1$ , ou seja, placa sujeita a sucção e injeção, respectivamente. Observa-se também que isto ocorre para pequenas ordens de truncamento  $NV \leq 14$ , mostrando o baixo custo computacional. Vale salientar, mais uma vez, que as excelentes convergências são atribuídas a escolha adequada do parâmetro de contração de escala  $d$ .

Tabela 3.7 - Convergência da componente de velocidade (-) V(X, Y) em função de Y para várias posições de X com K = 1, F = -1 (placa com sucção) e d = 0,2775.

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0226	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775
1,0068	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287
2,0336	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190
5,0869	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949
7,1500	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679
8,0791	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816
10,371	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0226	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775
1,0068	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287
2,0336	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190
5,0869	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949
7,1500	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679
8,0791	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816
10,371	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0226	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775	-0,9775
1,0068	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287	-0,2287
2,0336	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190	0,2190
5,0869	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949	0,6949
7,1500	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679	0,7679
8,0791	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816	0,7816
10,371	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962	0,7962

Tabela 3.8 - Convergência da componente de velocidade (-)  $V(X, Y)$  em função de  $Y$  para várias posições de  $X$  com  $K = 1$ ,  $F = 0,1$  (placa com injeção) e  $d = 0,36$ .

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0174	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173
1,0157	0,8206	0,8206	0,8207	0,8207	0,8207	0,8207	0,8207
2,0316	1,1677	1,1678	1,1678	1,1678	1,1678	1,1678	1,1678
5,0474	1,4530	1,4531	1,4532	1,4532	1,4533	1,4533	1,4533
7,1952	1,4819	1,4820	1,4820	1,4821	1,4821	1,4822	1,4822
8,3215	1,4862	1,4863	1,4864	1,4864	1,4864	1,4865	1,4865
10,2469	1,4888	1,4889	1,4889	1,4890	1,4890	1,4890	1,4890
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0174	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173
1,0157	0,8206	0,8206	0,8207	0,8207	0,8207	0,8207	0,8207
2,0316	1,1677	1,1678	1,1678	1,1678	1,1678	1,1678	1,1678
5,0474	1,4530	1,4531	1,4532	1,4532	1,4533	1,4533	1,4533
7,1952	1,4819	1,482	1,482	1,4821	1,4821	1,4822	1,4822
8,3215	1,4862	1,4863	1,4864	1,4864	1,4864	1,4865	1,4865
10,2469	1,4888	1,4889	1,4889	1,4890	1,4890	1,4890	1,4890
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 2</b>	<b>NV = 4</b>	<b>NV = 6</b>	<b>NV = 8</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 12</b>	<b>NV = 14</b>
0,0174	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173	0,1173
1,0157	0,8206	0,8206	0,8207	0,8207	0,8207	0,8207	0,8207
2,0316	1,1677	1,1678	1,1678	1,1678	1,1678	1,1678	1,1678
5,0474	1,453	1,4531	1,4532	1,4532	1,4533	1,4533	1,4533
7,1952	1,4819	1,482	1,482	1,4821	1,4821	1,4822	1,4822
8,3215	1,4862	1,4863	1,4864	1,4864	1,4864	1,4865	1,4865
10,2469	1,4888	1,4889	1,4889	1,4890	1,4890	1,4890	1,4890

De maneira a validar o código desenvolvido, resultados para a componente de velocidade  $V$  foram comparados com os trabalhos de outros autores e são mostrados na figura 3.7.

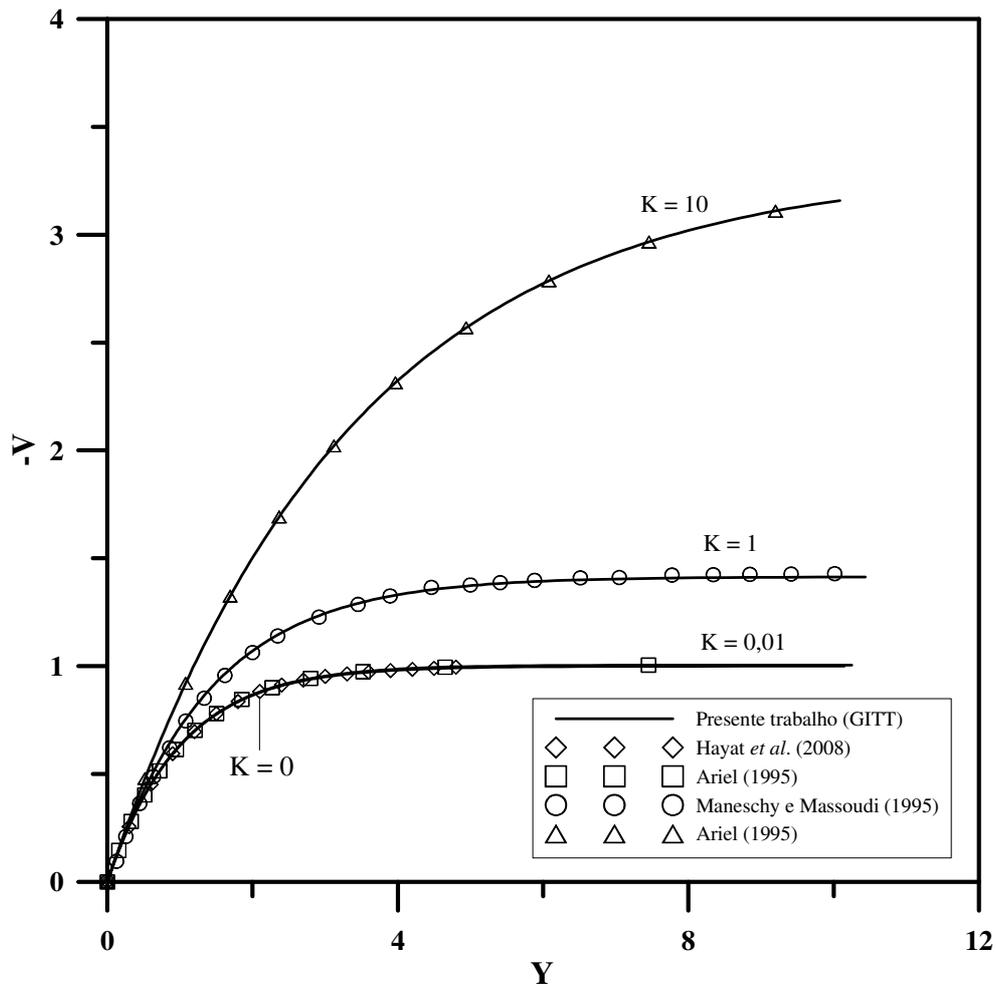


Figura 3.7 - Comparação entre perfis de velocidade da componente  $V$  calculados no presente trabalho e disponíveis na literatura para vários valores de  $K$  na posição  $X = 1$ .

Observa-se da figura 3.7 uma excelente concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e os disponíveis na literatura. Nota-se, ainda, que os resultados para a componente de velocidade  $V$ , com valores de parâmetro viscoelástico  $K = 0,01$  a  $K = 10$  estão em perfeita concordância com os resultados exatos obtido por ARIEL (1995). Além disso, quando  $K = 0$ , ou seja, fluido newtoniano, os resultados também se encontram em perfeita concordância com o trabalho de HAYAT *et al.* (2008). Uma vez validado o código, continuam-se as discussões dos resultados obtidos. A seguir mostra-se o comportamento dos perfis de velocidade  $U$  na direção  $Y$  para várias posições de  $X$ .

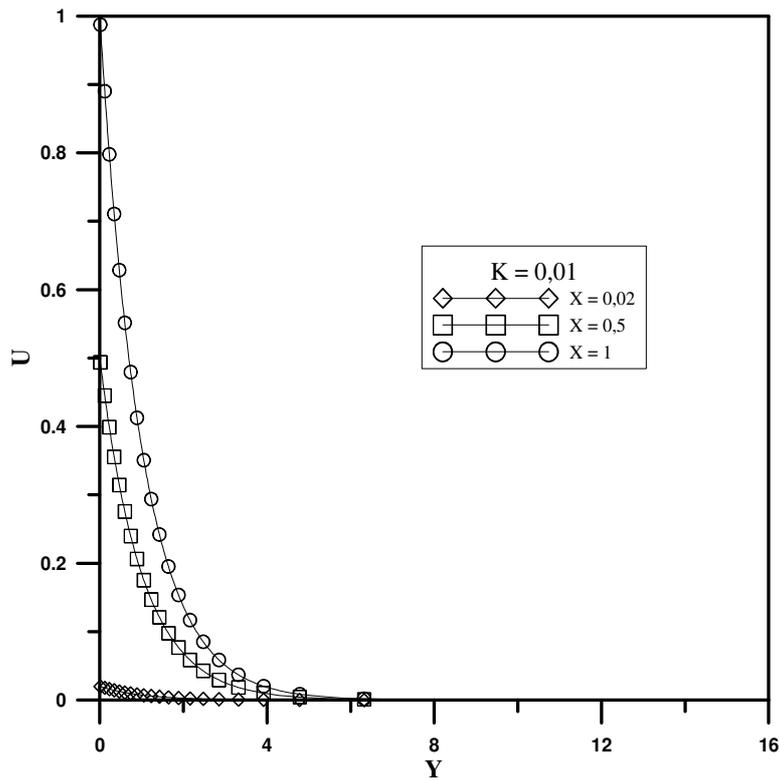


Figura 3.8 - Perfis de velocidade da componente U para as posições  $X = 0,02$ ,  $X = 0,5$  e  $X = 1$ , com  $K = 0,01$  e  $F = 0$ .

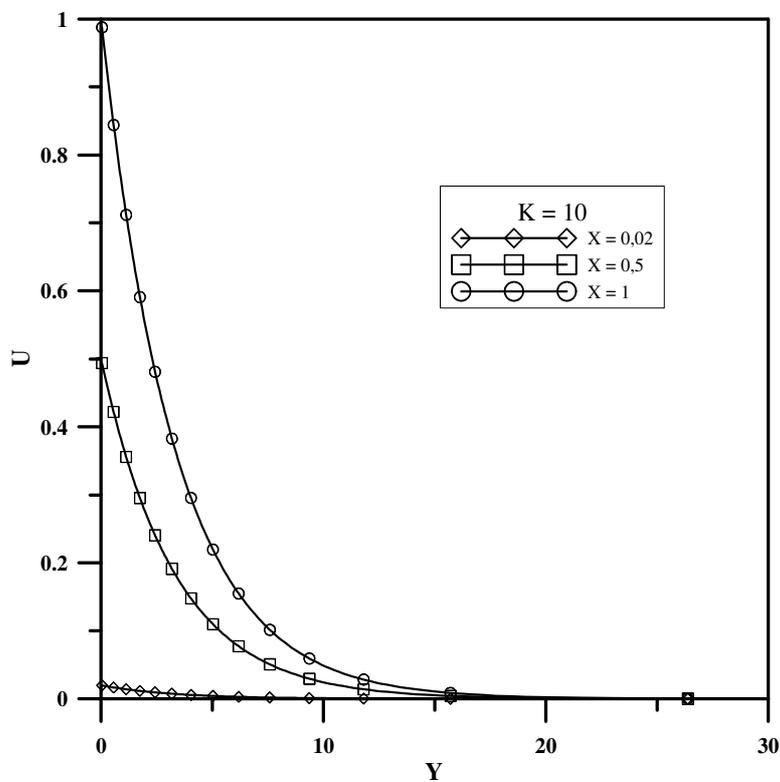


Figura 3.9 - Perfis de velocidade da componente U para as posições  $X = 0,02$ ,  $X = 0,5$  e  $X = 1$ , com  $K = 10$  e  $F = 0$ .

Nota-se das figuras 3.8 e 3.9 que a medida que a placa plana é estirada, o perfil de velocidade  $U$  tende assintoticamente à velocidade de estiramento. Este comportamento físico está totalmente de acordo com o trabalho de PAPANASTASIOU *et al.* (2000), como discutido no item 3.3.4.

A seguir mostram-se os perfis da componente de velocidade  $V$  para vários valores de  $F$  diferentes de zero, ou seja, placa sujeita a injeção ou sucção.

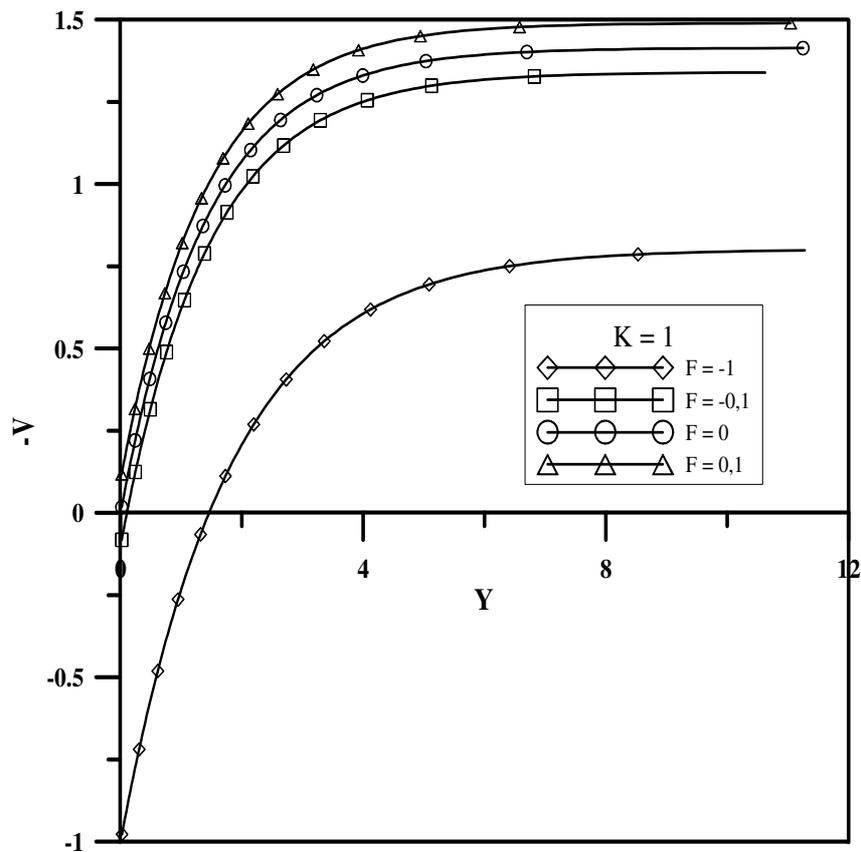


Figura 3.10 - Perfis de velocidade da componente  $V$  para vários valores de  $F$  e  $K = 1$ .

Da figura 3.10 observa-se que a medida que o parâmetro  $F$  cresce a espessura de camada limite aumenta. Isto mostra, que é possível controlar a espessura de camada limite para o problema em análise com injeção ou sucção de fluido viscoelástico. Esta observação é verificada não apenas para fluidos viscoelásticos, mas para qualquer fluido newtoniano e não newtoniano.

### 3.4.2-CAMPO DE TEMPERATURA

Assim como feito para o campo de velocidade, são mostradas a seguir tabelas de convergências com os resultados obtidos para o campo de temperatura adimensional no interior da camada limite para diversos valores dos parâmetros K, F e Pr.

Tabela 3.9 - Convergência do potencial de temperatura adimensional  $\Theta(X, Y)$  em função de Y para várias posições de X com K = 0,01, F = 0, Pr = 1 e d = 0,35.

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0179	0,0106	0,0105	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104
1,0190	0,5224	0,5216	0,5213	0,5213	0,5213	0,5212	0,5212
2,0163	0,8055	0,8042	0,8038	0,8037	0,8037	0,8036	0,8036
5,0838	0,9924	0,9913	0,9908	0,9908	0,9907	0,9907	0,9906
7,1720	1,0012	0,9997	0,9992	0,9991	0,9991	0,9991	0,9990
8,2227	1,0016	1,0006	1,0001	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998
10,5396	1,0010	1,0006	1,0004	1,0003	1,0003	1,0002	1,0002
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0179	0,0106	0,0105	0,0105	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104
1,0190	0,5226	0,5218	0,5215	0,5215	0,5214	0,5214	0,5214
2,0163	0,8056	0,8043	0,8040	0,8039	0,8038	0,8038	0,8037
5,0838	0,9924	0,9913	0,9908	0,9908	0,9907	0,9907	0,9906
7,1720	1,0012	0,9997	0,9992	0,9991	0,9991	0,9991	0,9990
8,2227	1,0016	1,0006	1,0001	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998
10,5396	1,0010	1,0006	1,0004	1,0003	1,0003	1,0002	1,0002
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0179	0,0106	0,0105	0,0105	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104
1,0190	0,5226	0,5218	0,5215	0,5215	0,5214	0,5214	0,5214
2,0163	0,8056	0,8043	0,8040	0,8039	0,8038	0,8038	0,8037
5,0838	0,9924	0,9913	0,9908	0,9908	0,9907	0,9907	0,9906
7,1720	1,0012	0,9997	0,9992	0,9991	0,9991	0,9991	0,9990
8,2227	1,0016	1,0006	1,0001	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998
10,5396	1,0010	1,0006	1,0004	1,0003	1,0003	1,0002	1,0002

Tabela 3.10 - Convergência do potencial de temperatura adimensional  $\Theta(X, Y)$  em função de  $Y$  para várias posições de  $X$  com  $K = 10$ ,  $F = 0$ ,  $Pr = 1$  e  $d = 0,14$ .

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0447	0,0330	0,0327	0,0326	0,0326	0,0325	0,0325	0,0325
1,0049	0,6334	0,6319	0,6311	0,6310	0,6310	0,6309	0,6309
2,0548	0,9296	0,9266	0,9255	0,9253	0,9251	0,9249	0,9249
5,0409	1,0074	1,0026	1,0014	1,0011	1,001	1,0008	1,0007
7,0059	1,0065	1,0027	1,0015	1,0012	1,001	1,0009	1,0008
8,0280	1,0074	1,0028	1,0015	1,0012	1,0011	1,0009	1,0008
10,0829	1,0088	1,0026	1,0015	1,0012	1,0011	1,0009	1,0008
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0447	0,0335	0,0332	0,0330	0,0330	0,0330	0,0329	0,0329
1,0049	0,6406	0,6380	0,6369	0,6367	0,6366	0,6366	0,6365
2,0548	0,9340	0,9299	0,9286	0,9283	0,9281	0,9280	0,9279
5,0409	1,0076	1,0027	1,0014	1,0012	1,0010	1,0008	1,0007
7,0059	1,0071	1,0028	1,0015	1,0013	1,0010	1,0009	1,0008
8,0280	1,0075	1,0028	1,0015	1,0012	1,0011	1,0009	1,0008
10,0829	1,0078	1,0027	1,0015	1,0012	1,0011	1,0009	1,0008
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0447	0,0335	0,0332	0,0330	0,0330	0,0330	0,0329	0,0329
1,0049	0,6406	0,6380	0,6369	0,6367	0,6366	0,6366	0,6365
2,0548	0,9340	0,9299	0,9286	0,9283	0,9281	0,9280	0,9279
5,0409	1,0076	1,0027	1,0014	1,0012	1,001	1,0008	1,0007
7,0059	1,0071	1,0028	1,0015	1,0013	1,001	1,0009	1,0008
8,0280	1,0075	1,0028	1,0015	1,0012	1,0011	1,0009	1,0008
10,0829	1,0078	1,0027	1,0015	1,0012	1,0011	1,0009	1,0008

Observa-se das tabelas 3.9 e 3.10 uma excelente taxa de convergência, onde resultados para os potenciais de temperatura foram gerados com até três algarismos significativos. Por outro lado, o número de termos usado nas séries (NT e NV) assumiram valores menor ou igual a 30, o que determinou um aumento do custo computacional em relação aos resultados do campo de velocidade. Salienta-se que na solução do sistema assumiu-se  $NT = NV$ , o que de certa forma melhora os resultados para o campo de temperatura, tendo em vista que o potencial de temperatura é dependente do potencial de velocidade. No entanto, o código desenvolvido no presente

trabalho pode assumir valores diferente para NT e NV. Caso isto seja necessário deve-se atentar para o compromisso entre a dependência dos potenciais, pois valores de NT e NV muito diferentes levarão a resultados errôneos.

Tabela 3.11 - Convergência do potencial de temperatura adimensional  $\Theta(X, Y)$  em função de Y para várias posições de X com  $K = 1$ ,  $F = -1$ ,  $Pr = 0.5$  e  $d = 0,35$ .

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0179	0,0242	0,0246	0,0248	0,0248	0,0249	0,0249	0,0249
1,0190	0,8096	0,8138	0,8152	0,8153	0,8155	0,8157	0,8158
2,0163	0,9654	0,9710	0,9726	0,9730	0,9732	0,9734	0,9735
5,0838	0,9911	0,9956	0,9978	0,9981	0,9983	0,9985	0,9987
7,1720	0,9886	0,9956	0,9979	0,9983	0,9985	0,9986	0,9987
8,2227	0,9902	0,9952	0,9975	0,9979	0,9983	0,9986	0,9988
10,5396	0,9949	0,9968	0,9978	0,9981	0,9982	0,9984	0,9986
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0179	0,0242	0,0246	0,0248	0,0248	0,0249	0,0249	0,0249
1,0190	0,8096	0,8138	0,8152	0,8153	0,8155	0,8157	0,8158
2,0163	0,9654	0,9710	0,9726	0,9730	0,9732	0,9734	0,9735
5,0838	0,9911	0,9956	0,9978	0,9981	0,9983	0,9985	0,9987
7,1720	0,9886	0,9956	0,9979	0,9983	0,9985	0,9986	0,9987
8,2227	0,9902	0,9952	0,9975	0,9979	0,9983	0,9986	0,9988
10,5396	0,9949	0,9968	0,9978	0,9981	0,9982	0,9984	0,9986
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0179	0,0242	0,0246	0,0248	0,0248	0,0249	0,0249	0,0249
1,0190	0,8096	0,8138	0,8152	0,8153	0,8155	0,8157	0,8158
2,0163	0,9654	0,9710	0,9726	0,973	0,9732	0,9734	0,9735
5,0838	0,9911	0,9956	0,9978	0,9981	0,9983	0,9985	0,9987
7,1720	0,9886	0,9956	0,9979	0,9983	0,9985	0,9986	0,9987
8,2227	0,9902	0,9952	0,9975	0,9979	0,9983	0,9986	0,9988
10,5396	0,9949	0,9968	0,9978	0,9981	0,9982	0,9984	0,9986

Observa-se da tabela 3.11 uma convergência para os resultados quando a placa esta sujeita a sucção com até três algarismos significativos. Por outro lado, quando a placa está sujeita a injeção, os resultados para o potencial de temperatura se apresentam com até quatro algarismos significativos (tabela 3.12). Embora a precisão dos resultados

para as situações de injeção e sucção estejam suavemente diferentes, os mesmos não comprometem suas utilizações no âmbito da engenharia. Pois resultados com até três algarismos significativos são bastante valiosos em engenharia aplicada.

Tabela 3.12 - Convergência do potencial de temperatura adimensional  $\Theta(X, Y)$  em função de Y para várias posições de X com  $K = 1$ ,  $F = 0,1$ ,  $Pr = 1$  e  $d = 0.35$ .

<b>X = 0,02</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0179	0,0105	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104
1,0190	0,5396	0,5389	0,5386	0,5386	0,5386	0,5385	0,5385
2,0163	0,8363	0,8349	0,8345	0,8344	0,8344	0,8343	0,8343
5,0838	0,9988	0,9975	0,9969	0,9968	0,9968	0,9967	0,9967
7,1720	1,0029	1,0009	1,0003	1,0002	1,0001	1,0001	1,0001
8,2227	1,0026	1,0012	1,0006	1,0005	1,0004	1,0003	1,0002
10,5396	1,0014	1,0008	1,0005	1,0005	1,0004	1,0004	1,0003
<b>X = 0,5</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0179	0,0106	0,0105	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104
1,0190	0,5399	0,5391	0,5389	0,5389	0,5388	0,5388	0,5388
2,0163	0,8365	0,8351	0,8347	0,8346	0,8346	0,8345	0,8345
5,0838	0,9988	0,9975	0,9969	0,9968	0,9968	0,9967	0,9967
7,1720	1,0029	1,0009	1,0003	1,0002	1,0001	1,0001	1,0001
8,2227	1,0026	1,0012	1,0006	1,0005	1,0004	1,0003	1,0002
10,5396	1,0014	1,0008	1,0005	1,0005	1,0004	1,0004	1,0003
<b>X = 1</b>							
<b>Y</b>	<b>NV = 10</b>	<b>NV = 16</b>	<b>NV = 22</b>	<b>NV = 24</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 28</b>	<b>NV = 30</b>
0,0179	0,0106	0,0105	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104	0,0104
1,0190	0,5399	0,5391	0,5389	0,5389	0,5388	0,5388	0,5388
2,0163	0,8365	0,8351	0,8347	0,8346	0,8346	0,8345	0,8345
5,0838	0,9988	0,9975	0,9969	0,9968	0,9968	0,9967	0,9967
7,1720	1,0029	1,0009	1,0003	1,0002	1,0001	1,0001	1,0001
8,2227	1,0026	1,0012	1,0006	1,0005	1,0004	1,0003	1,0003
10,5396	1,0014	1,0008	1,0005	1,0005	1,0004	1,0004	1,0004

Com objetivo de comparar os resultados aqui apresentados e os disponíveis na literatura, bem como, discutir a física do problema, gráficos mostrando os perfis de temperatura em função dos parâmetros K, F e Pr são apresentados a seguir.

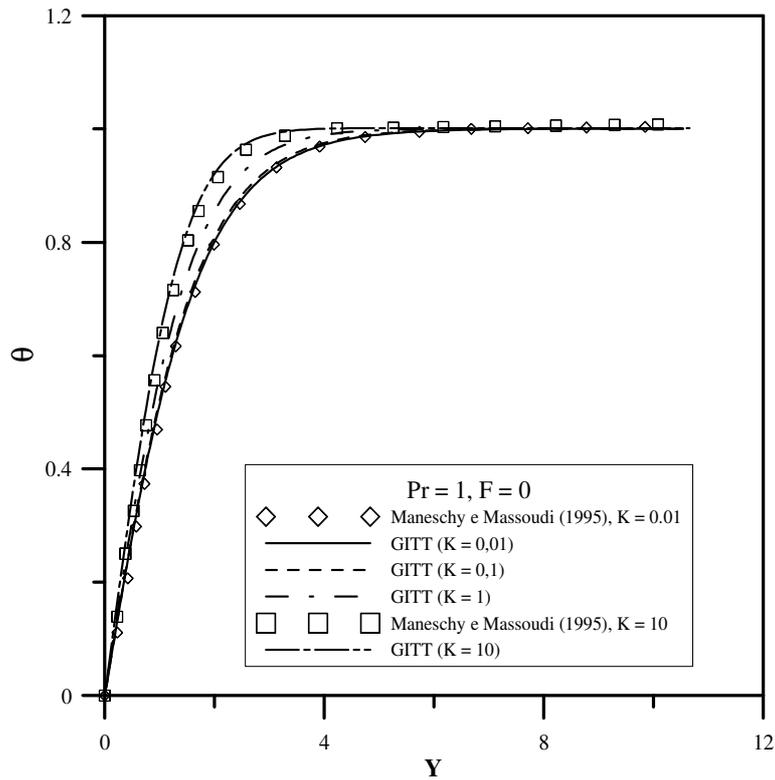


Figura 3.11 - Comparação entre os perfis de temperatura adimensional obtidos pela GITT e a literatura disponível para vários valores de  $K$  com  $Pr = 1$  e  $F = 0$ .

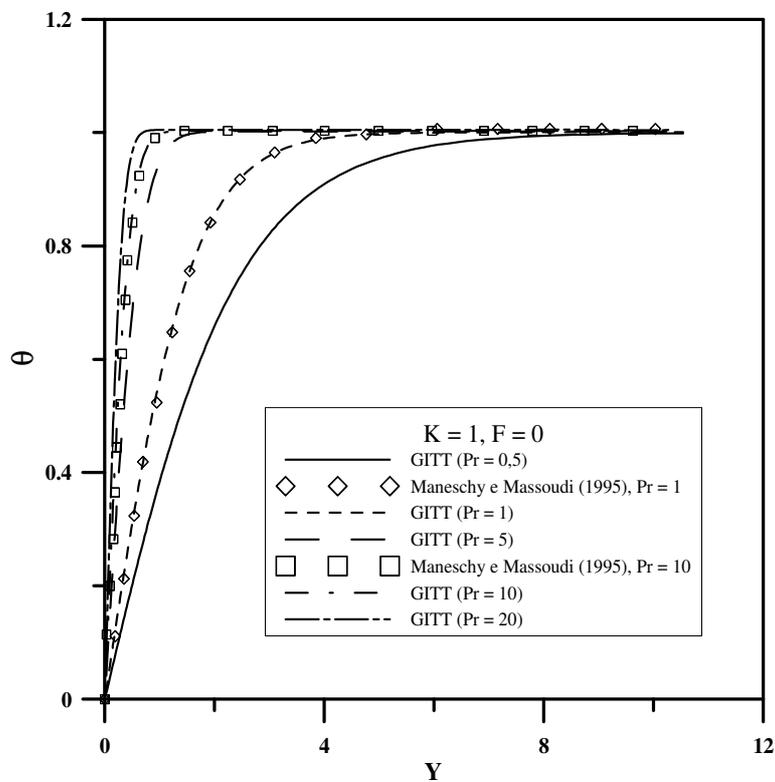


Figura 3.12 - Comparação entre os perfis de temperatura adimensional obtidos pela GITT e a literatura disponível para vários valores de  $Pr$  com  $K = 1$  e  $F = 0$ .

Na figura 3.11 observa-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos no presente trabalho e os da literatura disponível. Além disso, observa-se que aumentando o valor do parâmetro viscoelástico  $K$ , há uma diminuição na espessura da camada limite térmica.

Na figura 3.12 também observa-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos, e os da literatura disponível. Observa-se nesta mesma figura que a medida que o número de  $Pr$  aumenta há uma diminuição na espessura da camada limite térmica, o que já era esperado do ponto de vista físico.

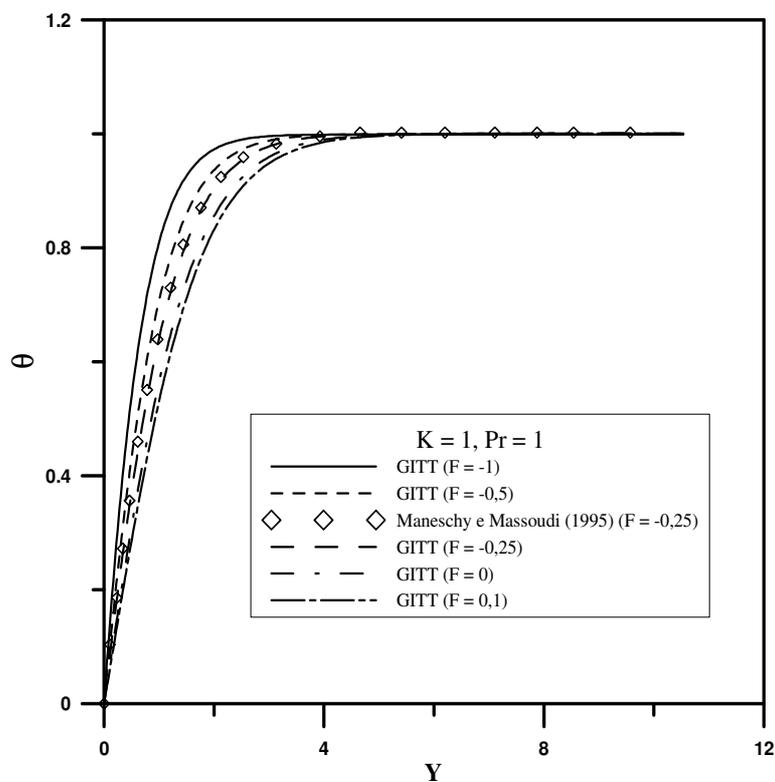


Figura 3.13 - Perfil de temperatura em função da velocidade de injeção/sucção com  $K = 1$  e  $Pr = 1$ .

Na figura 3.13, observa-se que a medida que o parâmetro  $F$  aumenta há um aumento da espessura da camada limite térmica. Observa-se também que os resultados gerados pela GITT para  $F = -0,25$ , estão em perfeito acordo com a literatura disponível; o que mais uma vez demonstra a potencialidade da GITT em tratar problemas fortemente não lineares.

Os resultados mostrados neste capítulo só foram possíveis com a quebra de singularidade na posição de referência inicial de integração. Isto significa que foi adotado um valor próximo de zero ( $X = 0,00001$ ) para a posição inicial exigida pela DIVPAG. Este procedimento foi adotado em virtude do sistema de equações dado pelas equações (3.119) e (3.120) não ser resolvível pela DIVPAG com posição inicial  $X = 0$ , pois partindo deste valor, os valores dos potenciais para o campo de velocidade tornam-se zero no início da integração numérica. Com os potenciais zero a matriz  $\mathbf{F}^*$  torna-se nula e o processo de inversão da matriz inviável. Esta quebra de singularidade determinou o uso de uma tolerância prescrita de  $10^{-8}$  o que tornou o sistema mais rígido, mas com maior precisão nos resultados. Esta precisão é confirmada pelos resultados alcançados e já discutidos.

O procedimento acima adotado para viabilizar a integração numérica do sistema pela DIVPAG poderia ser evitado considerando as condições de contorno simétricas  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  em  $x = 0$ . Mas adotando estas condições de contorno, o uso da subrotina DIVPAG torna-se inviável, pois a mesma resolve problema de valor inicial. Uma proposta para a solução deste mesmo problema seria o uso de outras subrotinas como a DBVPFD (IMSL, 1989), que resolve problemas de valor de contorno.

Com objetivo de mostrar que o procedimento adotado é confiável, uma discussão das condições de contorno simétricas é conduzida. Para obter as condições de contorno simétricas em função dos potenciais transformados, é necessário adimensionalizar tais condições de acordo com os grupos adimensionais já apresentados, aplicar os filtros (equações 3.54 e 3.55) e usar as fórmulas de inversão para os campos de velocidade e temperatura, dadas pelas equações 3.80 e 3.82, respectivamente. A tabela 3.13 mostra os resultados para as condições de contorno simétricas em várias situações de parâmetros viscoelástico, injeção e número de Prandtl.

Tabela 3.13 - Resultados para as condições de contorno simétricas em  $X = 0,00001$  e  $\eta = 0,00001$ .

Casos simulados	$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{d\tilde{U}_i(0)}{dX} + [\eta^2 - 2\eta + 1] = 0$	$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(\eta) \frac{d\tilde{\theta}_i(0)}{dX} = 0$
K=0,01, F=0, Pr=1	$0,2478223 \cdot 10^{-10}$	$0,3552423 \cdot 10^{-13}$
K=1, F=-1, Pr = 0,5	$0,2038546 \cdot 10^{-9}$	$0,3445973 \cdot 10^{-12}$
K = 10, F = 0, Pr = 1	$0,5100195 \cdot 10^{-10}$	$0,228286 \cdot 10^{-12}$
K = 1, F = 0, Pr = 1	$0,1340572 \cdot 10^{-11}$	$0,7991370 \cdot 10^{-15}$

A tabela 3.13 mostra que em todas as situações simuladas, as condições de contorno simétricas  $\frac{\partial u(0)}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial T(0)}{\partial x} = 0$  para velocidade e temperatura praticamente assumem valor de zero numérico na posição  $X = 0,00001$  e  $\eta = 0,00001$ . Isto mostra que o uso das condições de contorno assumidas no problema  $u(0) = 0$  e  $T(0) = T_w$  não afetam de forma significativa os campos analisados. Portanto, pode-se usar o código desenvolvido e ainda obter resultados precisos.

### 3.4.3-ESTIMATIVA DE ESPESSURA DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA

Como já explicado no item 3.3.4, resultados para a componente de velocidade  $V$  serão gerados em função do parâmetro viscoelástico  $K$  com objetivo de se estimar o valor da constante  $B$ . Conhecendo-se este valor pode-se usar a equação 3.34 para estimar a espessura da camada limite hidrodinâmica (com  $F = 0$ ).

Inicialmente, valores de espessura de camada limite para escoamento de fluidos de segundo grau sobre placas planas estiradas foram determinadas e tabeladas a partir da solução analítica exata (equação 3.125) proposta por ARIEL (1995) para alguns valores de parâmetro viscoelástico  $K$ .

$$V(Y) = \frac{1}{b} (e^{-bY} - 1) \quad (3.125)$$

$$b = +\sqrt{\frac{1}{1+K}}$$

Para analisar os resultados gerados pela solução analítica de ARIEL (1995) e compor o processo de estimativa com a equação proposta no presente trabalho, é necessário adimensionalizar a equação (3.34). Então, usando os grupos adimensionais

$$K = k_1 \frac{Re}{L^2} \text{ e } \delta^* = \delta \frac{Re^{1/2}}{L} \text{ a equação torna-se:}$$

$$\delta^{*2} = 36 + BK \quad (3.126)$$

Nota-se, da tabela 3.14, que os valores correspondentes ao estabelecimento da espessura de camada limite iniciam-se a partir de um determinado valor de Y, ou seja, a partir deste valor, não se verifica mais significativas mudanças na componente de velocidade V no terceiro dígito após a vírgula. Esta observação é baseada na determinação da espessura de camada limite para um fluido newtoniano escoando sobre uma placa plana (SCHLICHTING, 1979), onde a componente de velocidade V se encontra a 99% da velocidade estabelecida. Assim, para K = 0 e Y = 5, tem-se para a espessura de camada limite hidrodinâmica observada nos resultados de ARIEL (1995),  $\delta^*_{ariel} \approx 5$ ; para K = 1 e Y = 9, tem-se  $\delta^*_{ariel} \approx 9$ , para K = 7 e Y = 17, tem-se  $\delta^*_{ariel} \approx 17$  e assim por diante. Observa-se também da tabela 3.14, que a medida que K aumenta a espessura de camada limite aumenta; e como trata-se da solução exata, os resultados servem como referência para a análise da constante de estudo B.

O intervalo escolhido para o parâmetro viscoelástico K foi de 0 a 10, ou seja, os limites do intervalo situam-se entre situações bem distintas. Pois quando K = 0, o fluido tem um comportamento totalmente newtoniano, por outro lado, quando K = 10, as diferenças de tensões normais que correspondem aos efeitos elásticos são bastantes significativas. Outros intervalos podem ser escolhidos, porém optou-se por este, devido a literatura especializada analisar intervalos que tem limite superior para K, geralmente em torno de 10, como pode ser verificado no trabalhos de MANESCHY e MASSOUDI (1995) e ARIEL (1995).

Tabela 3.14 - Valores da componente de velocidade V em função do parâmetro viscoelástico K obtidos por solução exata (ARIEL, 1995).

-V(Y)							
Y	K = 0	K = 0,01	K = 1	K = 3	K = 5	K = 7	K = 10
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,63212	0,63343	0,71691	0,78694	0,82104	0,84234	0,86332
2	0,86466	0,86762	1,07039	1,26424	1,36687	1,43382	1,50192
3	0,95021	0,9542	1,24469	1,55374	1,72975	1,84915	1,97429
4	0,98168	0,98621	1,33063	1,72933	1,971	2,14079	2,3237
5	0,99326	0,99805	1,373	1,83583	2,13138	2,34558	2,58216
6	0,99752	1,00242	1,39389	1,90043	2,23801	2,48937	2,77334
7	0,99909	1,00404	1,40419	1,93961	2,30889	2,59035	2,91476
8	0,99966	1,00464	1,40927	1,96337	2,35602	2,66125	3,01936
9	0,99988	1,00486	1,41178	1,97778	2,38735	2,71104	3,09674
10	0,99995	1,00494	1,41301	1,98652	2,40818	2,746	3,15398
11	0,99998	1,00497	1,41362	1,99183	2,42202	2,77055	3,19631
12	0,99999	1,00498	1,41392	1,99504	2,43123	2,78778	3,22763
13	1,00000	1,00499	1,41407	1,99699	2,43735	2,79989	3,2508
14	1,00000	1,00499	1,41414	1,99818	2,44142	2,80839	3,26793
15	1,00000	1,00499	1,41418	1,99889	2,44412	2,81436	3,28061
16	1,00000	1,00499	1,4142	1,99933	2,44592	2,81855	3,28998
17	1,00000	1,00499	1,41421	1,99959	2,44712	2,82149	3,29692
18	1,00000	1,00499	1,41421	1,99975	2,44791	2,82356	3,30205
19	1,00000	1,00499	1,41421	1,99985	2,44844	2,82501	3,30584
20	1,00000	1,00499	1,41421	1,99991	2,44879	2,82602	3,30865
21	1,00000	1,00499	1,41421	1,99994	2,44903	2,82674	3,31072
22	1,00000	1,00499	1,41421	1,99997	2,44918	2,82724	3,31226
23	1,00000	1,00499	1,41421	1,99998	2,44929	2,8276	3,3134
24	1,00000	1,00499	1,41421	1,99999	2,44935	2,82784	3,31424
25	1,00000	1,00499	1,41421	1,99999	2,4494	2,82802	3,31486
26	1,00000	1,00499	1,41421	2,0000	2,44943	2,82814	3,31532
27	1,00000	1,00499	1,41421	2,0000	2,44945	2,82822	3,31566
28	1,00000	1,00499	1,41421	2,0000	2,44946	2,82829	3,31591
29	1,00000	1,00499	1,41421	2,0000	2,44947	2,82833	3,3161
30	1,00000	1,00499	1,41421	2,0000	2,44948	2,82836	3,31623

De posse dos valores de espessura de camada limite hidrodinâmica calculadas a partir da equação (3.125) e mostradas na tabela 3.14, o processo de estimativa da constante B é resolvido através da minimização do resíduo da norma de mínimos quadrados, dada por (MACEDO, 1998)

$$\sum_{K=0}^{K=10} (\delta^*_{\text{ariel}}(K) - \delta^*(B, K))^2 = 0 \quad (3.127)$$

onde K é o parâmetro viscoelástico de entrada.

Ou seja, o processo consta na busca de um valor ótimo para B, de modo que a soma dos quadrados da diferença entre as espessuras de camada limite hidrodinâmica exata e a proposta, dada pela equação (3.126), tenda para zero. Este processo de estimativa foi amplamente discutido no trabalho de MACEDO (1998), e segundo o autor a utilização do método de LEVENBERG-MARQUARDT se aplica à solução deste tipo de problema.

Diversas implementações do método de LEVENBERG-MARQUARDT estão disponíveis em pacotes comerciais incluindo a subrotina DBCLSJ da biblioteca científica IMSL (1989) e o mesmo foi utilizado neste problema para a determinação da estimativa do parâmetro B.

Para tal estimativa um código em linguagem de programação FORTRAN 2003 foi desenvolvido onde a subrotina DBCLSJ foi implementada. Esta subrotina requer um chute inicial para B, que para o presente caso foi adotado o valor de 55,991. Assim, após os cálculos via código computacional, o valor estimado encontrado para B foi de 42,564. Desta maneira, a equação (3.126) torna-se

$$\delta^{*2} = 36 + 42,564K \quad (3.128)$$

Após a determinação da equação proposta que calcula a espessura de camada limite, uma análise de erro será conduzida. Este erro quantifica quanto a espessura da

camada limite calculada pela equação (3.128) se afastará da solução exata proposta por ARIEL (1995). O erro a ser avaliado é o erro relativo e o cálculo deste erro é suficiente para a observação desejada.

$$\text{Err}(\%) = 100 \left| \frac{\delta^*_{\text{ariel}} - \delta^*}{\delta^*_{\text{ariel}}} \right| \quad (3.129)$$

Tabela 3.15 - Erros relativos da espessura de camada limite hidrodinâmica entre os valores de ARIEL (1995) e os calculados pela equação (3.128) para vários valores de K.

<b>K</b>	<b><math>\delta^*</math> Ariel (<math>\approx</math>)</b>	<b><math>\delta^*</math> (equação 3.148)</b>	<b>Err(%)</b>
0	6	6	0
0,01	6	6,42	7,0
1	9	8,86	1,55
3	11	12,79	16,2
5	14	15,77	12,6
7	17	18,27	7,4
10	21	21,48	2,2

Observa-se da tabela 3.15 que o erro relativo para  $K = 3$  e  $K = 5$ , apresentaram-se bastante significativos, o que num primeiro momento inviabilizaria a utilização da equação proposta neste trabalho, no entanto, para  $K = 4$ ,  $K = 1$ ,  $K = 5$ ,  $K = 7$  e  $K = 10$ , os erros estão dentro da aceitação para fins práticos em engenharia. Além disso, a média percentual dos erros é 6,7%, o que do ponto do vista prático torna a equação proposta aceitável, para sua utilização na estimativa de espessura de camada limite hidrodinâmica no escoamento de fluido de segundo grau sobre uma placa plana estirada. Logicamente a utilização desta equação está condicionada as considerações sobre erros realizadas neste trabalho. Assim, tem-se:

$$\delta^{*2} \approx 36 + 42,564K \quad , \quad \text{onde } K \in [0,10] \quad (3.130)$$

Embora a equação determinada para estimativa da espessura de camada limite hidrodinâmica seja apenas uma aproximação, a mesma torna-se de grande valia quando

utilizada como valor de entrada para códigos que necessitam desta espessura como parâmetro de entrada. Além disso deve-se observar que os valores de referência utilizados para a espessura de camada limite hidrodinâmica são advindos de solução analítica exata (ARIEL, 1995), o que dá mais confiabilidade aos resultados apresentados.

### 3.5-CONCLUSÃO

A metodologia utilizada (GITT) no presente trabalho mostrou-se adequada na obtenção dos campos de velocidade e temperatura para o problema analisado. Isto é demonstrado pelas excelentes taxas de convergência obtidas para os casos estudados e a excelente concordância com a literatura disponível. Ou seja, a GITT mostrou-se uma técnica que embora ainda em desenvolvimento, consegue tratar problemas de escoamento de fluidos que apresentam na sua formulação gradientes de ordem elevada, que naturalmente são problemas que apresentam alto grau de complexidade na sua solução.

Os parâmetros de estudo que representam a viscoelasticidade e injeção ou sucção se mostraram bastante influentes nos perfis de velocidade e temperatura no interior da camada limite. Para o campo de velocidade, o parâmetro viscoelástico  $K$  teve influência significativa na espessura de camada limite a partir da posição  $Y \approx 1$ , ou seja, os efeitos da viscoelasticidade são bastante pronunciados a partir desta posição, como pode ser visto na figura 3.7. Isto se deve a influência das tensões normais, que correspondem aos efeitos elásticos do fluido. Tal parâmetro também influenciou diretamente na espessura da camada limite: para  $K$  pequeno, onde os efeitos da viscoelasticidade são pouco pronunciados levou a espessura de camada limite a valores próximos a condição de escoamento de fluido newtoniano, para altos  $K(s)$ , os efeitos são bastantes pronunciados levando a uma espessura de camada limite bastante significativa.

O parâmetro que representa a injeção ou sucção em conjunto com o parâmetro  $K$ , mostrou-se também bastante influente nas espessuras de camada limite. Para valores de  $F$  pequenos, ou seja sucção, a espessura de camada limite ficou abaixo da espessura

de camada limite determinada somente pelos efeitos viscoelásticos como pode ser visto na figura 3.8, para casos de  $F$  assumir valores maiores, ou seja, injeção, a espessura de camada limite ficou acima da espessura determinada somente pelos efeitos viscoelásticos. Assim para valores moderados de  $K$ , a injeção e sucção podem ser usadas no controle do desenvolvimento da camada limite. O que tem muita aplicação na indústria, como exemplo: os valores de depressão a ser aplicados na formação do vácuo em mesa plana na produção da folha de celulose ou papel.

Para o campo de temperatura, além dos parâmetros  $K$  e  $F$ , o número de Prandtl influenciou diretamente nos perfis de temperatura no interior da camada limite. Observou-se que, aumentando o valor do parâmetro viscoelástico  $K$ , há uma diminuição na espessura da camada limite térmica (figura 3.11). O aumento do número de Prandtl determinou uma diminuição na espessura da camada limite térmica (figura 3.12) e o aumento da valor do parâmetro  $F$  determinou um aumento na espessura de camada limite térmica (figura 3.13). De uma maneira geral, o número de Prandtl foi o parâmetro que realmente determinou uma maior influência na espessura da camada limite térmica.

A obtenção de uma formulação analítica para a estimativa da espessura de camada limite hidrodinâmica no escoamento de um fluido viscoelástico de segundo grau, a partir da análise de escala e posterior validação com resultados obtidos a partir de solução analítica exata, mostrou-se como mais uma ferramenta na análise deste tipo de problema, pois geralmente não são disponíveis na literatura tais informações.

O parâmetro de estudo  $B$ , que faz parte da equação que estima a espessura de camada limite hidrodinâmica, foi determinado com considerações puramente teóricas, embora os valores usados para as espessuras de camada limite de referência no processo de estimativa foram calculados a partir de solução exata. Assim sugere-se para futuros trabalhos a determinação experimental deste parâmetro.

## CAPÍTULO 4

### ESCOAMENTO E TRANSFERÊNCIA DE CALOR DE UM FLUIDO DE TERCEIRO GRAU NA REGIÃO DE ENTRADA DE UM CANAL DE PLACAS PARALELAS COM INJEÇÃO E SUÇÃO SIMULTÂNEAS

#### 4.1-INTRODUÇÃO

Neste capítulo é analisada a influência dos parâmetros viscoelásticos nos campos de velocidade e temperatura na região de entrada de um canal de placas paralelas com injeção e sucção simultâneas para escoamento incompressível, bidimensional, em regime laminar e permanente de um fluido de terceiro grau. Para este problema, a taxa de fluido injetado em uma parede é a mesma succionada na parede oposta. A realização desta análise consta, inicialmente, de uma apresentação sucinta sobre o fluido de terceiro grau. Em seguida discutem-se as principais contribuições existentes na literatura sobre este problema. Após isto, é apresentada a formulação matemática do problema, o tratamento via GITT e finalmente são apresentados resultados do problema e comparação com a literatura disponível.

Da mesma maneira como realizado para o fluido de segundo grau é conveniente realizar uma apresentação sucinta de um fluido de terceiro grau. O modelo de um fluido de terceiro grau é utilizado para prever o “afinamento do cisalhamento” ou “espessamento do cisalhamento”, que aparecem em muitas situações de escoamentos de fluidos. O “afinamento do cisalhamento” ou comportamento pseudoplástico é caracterizado pela diminuição da viscosidade com o aumento da taxa de cisalhamento (BIRD *et al.*, 1987). Por outro lado, o “espessamento do cisalhamento” ou comportamento dilatante é caracterizado pelo aumento da viscosidade simultaneamente com o aumento da taxa de cisalhamento (HUGHES e BRIGHTON, 1974). A figura 4.1 mostra o comportamento qualitativo de fluidos pseudoplásticos e dilatantes em relação ao comportamento de fluidos newtonianos.

Embora os fluidos de segundo e terceiro grau derivem da mesma equação constitutiva para fluidos do tipo diferencial (TRUESDALL e NOLL, 2004), os

fenômenos que cada modelo representa no escoamento são bastante diferenciados, enquanto o modelo de segundo grau mostra a influência da primeira e segunda diferença de tensões normais, o modelo de terceiro grau mostra, predominantemente, o comportamento pseudoplástico ou dilatante do fluido que se manifesta em diversas situações de escoamento. Salienta-se que o modelo de fluido de segundo grau não apresenta bons resultados quando o mesmo é usado para identificar a influência do comportamento pseudoplástico ou dilatante presente no escoamento de alguns fluidos não newtonianos (ASGHAR *et al.*, 2003).

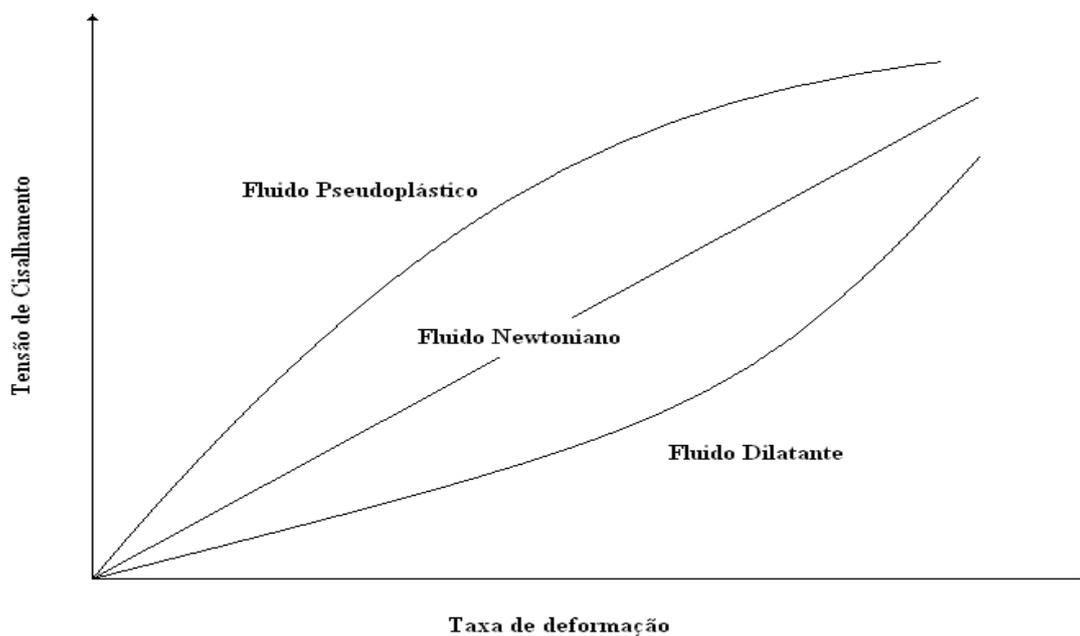


Figura 4.1 - Relações típicas entre tensão de cisalhamento e taxa de deformação em fluidos não newtonianos com comportamento pseudoplástico ou dilatante.

## 4.2-REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Com o avanço na tecnologia dos processadores nas últimas duas décadas e o advento/melhora de técnicas analíticas, híbridas e numéricas para tratar problemas não lineares, os reologistas se motivaram a investigar com mais profundidade modelos de fluidos não newtonianos de alta complexidade, que é o caso de um fluido de terceiro grau. Diante deste fato, ainda é tímida a disponibilidade de trabalhos que envolvam o escoamento de fluido de terceiro grau. No entanto, vale salientar que é vasta a

quantidade de trabalhos que tratam do escoamento na região de entrada de canais de placas paralelas e uma excelente revisão bibliográfica é encontrada no trabalho de MAGNO (1998). No presente trabalho serão citadas somente as contribuições mais relevantes no que se refere a escoamento interno de fluidos de terceiro grau.

Para um escoamento incompressível, laminar, permanente e completamente desenvolvido de um fluido de terceiro grau no interior de um duto, MASSOUDI e CHRISTIE (1995) analisaram os efeitos da viscosidade variável e dissipação viscosa nos campos de velocidade e temperatura. As equações obtidas foram discretizadas usando o método das diferenças finitas. Resultados para o campo de velocidade e temperatura são obtidos para vários parâmetros de interesse do problema.

TALAY AKYILDIZ (2001) investigou a transferência de calor de um fluido de terceiro grau em condições de escoamento incompressível, laminar e completamente desenvolvido num canal de placas paralelas aquecidas. Soluções analíticas foram obtidas para a equação da energia considerando fluxo de calor constante nas paredes. Os resultados obtidos pela formulação analítica são comparados com resultados numéricos de outros autores e se mostraram em razoável concordância.

YÜRÜSOY e PAKDEMIRLI (2002) investigaram a transferência de calor em um fluido de terceiro grau em condições de escoamento incompressível, laminar e completamente desenvolvido em um duto. Modelos de viscosidade constante, e viscosidade segundo Reynolds e Vogel são também investigados neste trabalho. Soluções analíticas aproximadas para a equação da energia são obtidas usando o método da perturbação. Os resultados para os perfis de velocidade e temperatura gerados são comparados com o trabalho de MASSOUDI e CHRISTIE (1995) e se mostraram em boa concordância.

ARIEL (2003) analisou o escoamento permanente, laminar e completamente desenvolvido de um fluido de terceiro grau num canal de placas paralelas porosas, quando a taxa de injeção do fluido num contorno é igual a taxa de saída de fluido no contorno oposto. Dois esquemas numéricos foram desenvolvidos para obter a solução apropriada do problema de valor de contorno. No primeiro esquema, o problema é

resolvido assumindo que a solução é conhecida nas proximidades de  $K = 0$ , onde  $K$  é o parâmetro viscoelástico adimensional do fluido de segundo grau. Este esquema é prático somente para certos valores do parâmetro viscoelástico de terceiro grau. O segundo esquema permite valores arbitrários do parâmetro de terceiro grau, mas é restrito a pequenos valores de  $K$  e  $Ret$  (número de Reynolds transversal). A solução por perturbação, válida para pequenos valores do parâmetro de terceiro grau, é também obtida. Finalmente duas soluções aproximadas, baseadas no esquema iterativo de Collatz, com diferentes soluções para aproximações iniciais distintas, são obtidas. Uma comparação é feita dos resultados calculados para os vários métodos e conclusões apropriadas são obtidas.

Em algumas situações industriais, o modelo de fluido de segundo grau não consegue prever as características do escoamento observado. Este fato ainda é potencializado quando se considera forças de campo no modelo como, campo elétrico e campo magnético. Nesta linha de raciocínio, HAYAT e KARA (2006) investigaram soluções analíticas para escoamento incompressível, laminar, transiente e completamente desenvolvido no interior de um canal anular (escoamento de Couette) para um fluido de terceiro grau sujeito a campo magnético variável. O método teórico de grupos é utilizado para analisar o problema não linear e a solução para o campo de velocidade é obtido analiticamente.

SIDDIQUI *et al.* (2008) estudaram o escoamento e a transferência de calor entre placas paralelas aquecidas para um fluido de terceiro grau, assumindo viscosidade dinâmica constante no modelo. Três modelos para o escoamento foram analisados nesse trabalho: escoamento plano de Couette, escoamento plano de Poiseuille e escoamento plano de Couette-Poiseuille. Nos três casos citados, as equações da quantidade de movimento e da energia foram resolvidas usando o método da perturbação homotópica, expressões analíticas para os campos de velocidade e temperatura também foram obtidos.

Outra contribuição importante no que diz respeito a consideração dos efeitos de campo magnético é mostrado no trabalho de FEIZ-DIZAJI *et al.* (2008). Neste trabalho, os autores analisaram o escoamento de um fluido de terceiro grau, no interior de um

canal anular em rotação sujeita a um campo magnético variável. Prova da existência de solução usando o teorema do ponto fixo de Schauder's é discutida. As equações do movimento foram discretizadas usando o método das diferenças finitas. Efeitos do parâmetro viscoelástico, velocidade de rotação dos cilindros e intensidade do campo magnético também são analisados.

HAYAT *et al.* (2008) investigaram o escoamento de um fluido de terceiro grau no interior de um canal de placas paralelas sujeito a campo magnético. Efeitos de injeção e sucção também são investigados. Expressões analíticas para o campo de velocidade são determinadas pelo método da análise homotópica. Resultados foram produzidos para vários parâmetros de interesse do problema.

SIDDIQUI *et al.* (2009) investigaram o escoamento de um fluido de terceiro grau no interior de um canal de placas paralelas em regime permanente e completamente desenvolvido. Situações de escoamento plano de Couette, Poiseuille e Couette-Poiseuille foram analisados. As equações diferenciais obtidas são tratadas mediante o método semi-analítico da decomposição Adomian. O método consiste em separar os operadores da equação diferencial ordinária nas suas partes não linear, linear inversível e linear não inversível, isolar na equação a função incógnita, através da parte linear inversível do operador e aproximar os termos envolvidos por uma série de polinômios que serão obtidos recursivamente. Soluções numéricas para as equações diferenciais não lineares também foram obtidas usando o método espectral de Chebyshev. A comparação entre o método semi-analítico e o numérico mostrou a eficiência da decomposição Adomian.

### **4.3-DEFINIÇÃO DO PROBLEMA**

Considere o escoamento de um fluido de terceiro grau na região de entrada de um canal de placas paralelas sujeitas à injeção uniforme na parede inferior com velocidade  $V_0$  e sucção igual na parede superior, conforme mostra a figura 4.2. Nesta região percebe-se a formação de uma camada limite hidrodinâmica e térmica próxima a parede superior e inferior do canal. É conhecido da literatura que as bordas das camadas limites formadas convergem até um determinado ponto. Antes deste ponto o

escoamento se encontra em desenvolvimento, a partir do mesmo o escoamento é verificado completamente desenvolvido.

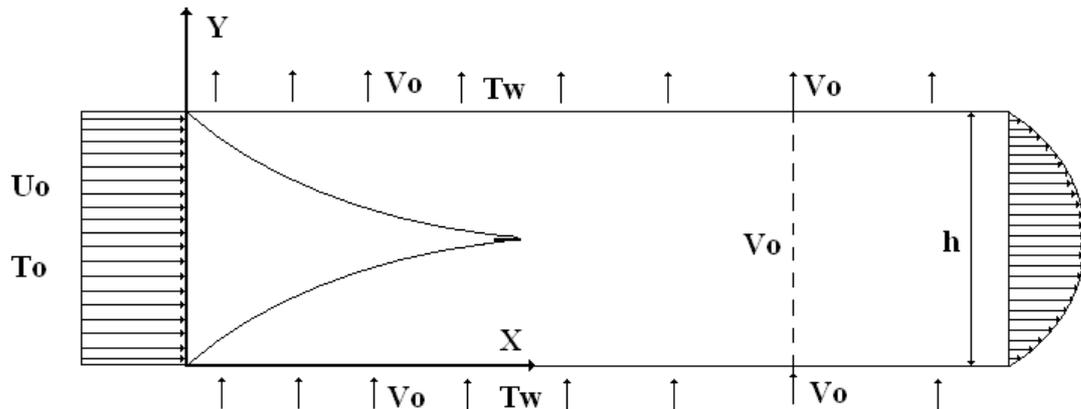


Figura 4.2 - Geometria da formação da camada limite e sistema de coordenadas do problema analisado.

Para a análise do problema as seguintes hipóteses são consideradas:

- Escoamento bidimensional descrito em coordenadas cartesianas;
- Escoamento incompressível em regime laminar e permanente;
- Força de corpo não considerada;
- É considerada a dissipação viscosa e trabalho devido à deformação elástica;
- Canal sujeito a velocidade transversal constante ( $V_0$ ) (ARIEL, 2003).

Vale comentar que, embora a velocidade transversal do canal seja assumida constante, nada se pode afirmar sobre o campo de velocidade das componentes longitudinal e transversal na região de entrada do canal. Por outro lado, na região de escoamento completamente desenvolvido é razoável esperar que a velocidade transversal assumo o valor constante  $V_0$  (ARIEL, 2003).

Com a definição do problema, iniciar-se-á a obtenção do modelo matemático que governa o escoamento no interior do canal.

### 4.3.1-EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA UM FLUIDO VISCOELÁSTICO DE TERCEIRO GRAU

A equação constitutiva para um fluido de terceiro grau é obtida substituindo os tensores cinemáticos  $\mathbf{S}$  dados pelas equações (3.4), (3.5) e (3.6) na equação (3.3). Assim, têm-se:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta_1\mathbf{A}_3 + \beta_2(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_1 \quad (4.1)$$

onde  $\mu$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$  são, respectivamente, a viscosidade dinâmica, parâmetro material referente a primeira diferença de tensão normal, parâmetro material referente a segunda diferença de tensão normal, parâmetros materiais do fluido de terceiro grau.  $\mathbf{A}_1$  e  $\mathbf{A}_2$  são tensores definidos pelas equações (3.7) e (3.8).

### 4.3.2-EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO DA MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA PARA O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO DE TERCEIRO GRAU

Similarmente ao realizado para o fluido de segundo grau, as equações diferenciais da conservação da massa, quantidade de movimento e energia para o escoamento do fluido de terceiro grau em análise requerem restrições termodinâmicas. Segundo DUNN e FOSDICK (1974), para um fluido de terceiro grau, a compatibilidade termodinâmica no sentido de que todos os movimentos de fluidos satisfazem a desigualdade de Clausius–Duhem e supondo que a energia específica livre de Helmholtz é mínima quando o fluido está em repouso requer que:

$$\mu \geq 0; \quad \alpha_1 \geq 0; \quad |\alpha_1 + \alpha_2| \leq \sqrt{24\mu\beta_3}; \quad \beta_1 = 0; \quad \beta_2 = 0; \quad \beta_3 \geq 0 \quad (4.2.a, b, c, d, e, f)$$

Com a substituição do modelo constitutivo para um fluido de terceiro grau nas equações invariantes da conservação da massa, quantidade de movimento e energia (capítulo 3), consideração das hipóteses do problema e restrições termodinâmicas, as equações diferenciais do problema se apresentam como (ver apêndice I)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( 13 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right) \right. \\ & + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left. \right] + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\ & + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left. \right] + \frac{\beta_3}{\rho} \left[ 40 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\ & + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 8 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ & \left. + 6 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 6 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \left( 13 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} \right) \right. \\ & + v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left. \right] + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\ & + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left. \right] + \frac{\beta_3}{\rho} \left[ 40 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 24 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\ & + 24 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & \left. + 6 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 6 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = & k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left( 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \\
+ \alpha_1 \left( 4u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
+ v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left. \right) + \beta_3 \left[ 34 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 + 34 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 6 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right. \\
+ 8 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 8 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 8 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + 4 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\
+ 8 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^4 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\
\left. \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (4.6)
\end{aligned}$$

#### 4.3.3-EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA

As equações de camada limite para o problema em análise são obtidas mediante uma avaliação da ordem de grandeza dos termos que compõe as equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia (SCHLICHTING, 1979).

Usando as considerações usuais de camada limite, onde  $u, x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial p}{\partial x}, T$  são da  $O(1)$  e  $v$  e  $y$  da  $O(\delta)$  ( $\delta$  é a espessura de camada limite) (SAJID *et al.*, 2009) e notando que  $\nu (= \mu/\rho)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2$  são da  $O(\delta^2)$  e  $\beta_3$  da  $O(\delta^4)$  (SAJID *et al.*, 2007), as equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia para o escoamento ficam:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + \\
& 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\beta_3}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \left( \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.9)$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \alpha_1 \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2\beta_3 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^4 \quad (4.10)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$u = 0, v = V_0, T = T_w \quad \text{em } y = 0 \quad (4.11.a, b, c)$$

$$u = 0, v = V_0, T = T_w \quad \text{em } y = h \quad (4.12.a, b, c)$$

$$u = U_0, T = T_0 \quad \text{em } x = 0 \quad (4.13.a, b)$$

Os dois últimos termos da equação (4.10) representam, respectivamente, o trabalho devido a deformação elástica do fluido de segundo grau e terceiro grau (DANDAPAT e GUPTA, 1989).

Considerando a geometria apresentada na figura 4.2 e a hipótese de velocidade transversal constante na seção transversal do canal, verifica-se que, se  $V_0 > 0$ , há injeção na parede inferior do canal e sucção na parede superior do canal com a mesma velocidade, por outro lado, se  $V_0 < 0$ , há sucção na parede inferior do canal e injeção na parede superior com a mesma velocidade.

#### **4.3.4-ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA**

Os seguintes grupos adimensionais serão utilizados no processo de adimensionalização das equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia.

$$\begin{aligned}
X &= \frac{x}{h}, Y = \frac{y}{h}, U = \frac{u}{U_0}, V = \frac{v}{U_0}, Re = \frac{U_0 h}{\nu}, K_1 = \frac{k_1}{h^2}, K_2 = \frac{k_2}{h^2}, K_3 = \frac{\beta_3 U_0}{\rho h^3}, R_v = \frac{V_0}{U_0} \\
K_4 &= 2(2K_1 + K_2), \theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, Pe = \frac{U_0 h}{a_d}, Ec = \frac{U_0^2}{c_p (T_0 - T_w)}, P = \frac{p}{\rho U_0^2}, q_{va} = \frac{Q}{U_0 h}, \\
Pe &= Re Pr, Pr = \frac{\mu}{a_d \rho U_0 h}, k_1 = \frac{\alpha_1}{\rho}, k_2 = \frac{\alpha_2}{\rho}, a_d = \frac{k}{\rho c_p}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Após utilização dos grupos adimensionais, as equações que governam o problema tornam-se:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + K_1 \left( U \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + 3 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} \right) \\
+ 2K_2 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + 6K_3 \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial Y} + K_4 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{Ec}{Re} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 + K_1 Ec \left( U \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \\
2K_3 Ec \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^4
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Com condições de contorno

$$U = 0, V = mR_v, \theta = 0 \text{ em } Y = 0 \tag{4.19.a, b, c}$$

$$U = 0, V = mR_v, \theta = 0 \text{ em } Y = 1 \tag{4.20.a, b, c}$$

$$U = 1, \theta = 1 \text{ em } X = 0 \tag{4.21.a, b}$$

Nas condições de contorno (4.19.b) e (4.20.b), o fator  $m$  define como está ocorrendo a injeção e sucção simultânea no canal. Se  $m = 1$ , significa que há injeção na placa inferior do canal e sucção na placa superior. Se  $m = -1$  significa que há sucção na placa inferior do canal e injeção na placa superior.

Percebe-se que o gradiente de pressão na direção  $Y$  não é zero. No entanto é possível, através de uma mudança no termo da pressão eliminar esta equação e obter somente uma equação da quantidade de movimento que represente o escoamento no interior da camada limite (TALAY AKYILDIZ, 2001).

Definindo a pressão modificada por:

$$P^* = P - (2K_1 + K_2) \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \quad (4.22)$$

Diferenciando (4.22) em relação a  $X$  e  $Y$  obtêm-se:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P^*}{\partial X} + 4K_1 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + 2K_2 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial P^*}{\partial Y} + 2(2K_1 + K_2) \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (4.24)$$

Substituindo as equações (4.23) e (4.24) em (4.16) e (4.17) respectivamente obtém-se:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + K_1 \left( U \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} \right) + 6K_3 \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial Y} = 0 \quad (4.26)$$

Desta maneira as equações de camada limite hidrodinâmica e térmica que governam o problema em análise são:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.27)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + K_1 \left( U \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} \right) + 6K_3 \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial Y} = 0 \quad (4.29)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{Ec}{Re} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 + K_1 Ec \left( U \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + 2K_3 Ec \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^4 \quad (4.30)$$

$$U = 0, V = mR_v, \theta = 0 \text{ em } Y = 0 \quad (4.31.a, b, c)$$

$$U = 0, V = mR_v, \theta = 0 \text{ em } Y = 1 \quad (4.32.a, b, c)$$

$$U = 1, \theta = 1 \text{ em } X = 0 \quad (4.33.a, b)$$

#### 4.3.5-FORMULAÇÃO DA CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA POR FUNÇÃO CORRENTE

Antes de iniciar o processo de transformação integral das equações de camada limite, as mesmas serão apresentadas em termos de função corrente. O objetivo deste procedimento são as vantagens computacionais conseguidas com este tipo de análise (FIGUEIRA DA SILVA *et al.*, 1996), além do que este tipo de formulação proporciona a verificação automática da equação da conservação da massa. Assim:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad ; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4.34.a, b)$$

A fim de expressar as equações da quantidade de movimento em termos de função corrente, a equação (4.29) é diferenciada em relação a X e a equação (4.28) é diferenciada em relação a Y; os resultados são subtraídos e a definição de função corrente é introduzida no resultado. Para a equação da energia e condições de contorno a definição da função corrente é também substituída, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} + K_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^5 \psi}{\partial X \partial Y^4} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^5 \psi}{\partial Y^5} \right) + 12K_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \left( \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} \right)^2 \\ + 6K_3 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right)^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right)^2 + K_1 \text{Ec} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} \right) \\ + 2K_3 \text{Ec} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0, \psi = -mR_v X + G_1, \theta = 0 \quad \text{em } Y = 0 \quad (4.37.a, b, c)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0, \psi = -mR_v X + G_2, \theta = 0 \quad \text{em } Y = 1 \quad (4.38.a, b, c)$$

$$\psi = Y + G_1, \theta = 1 \quad \text{em } X = 0 \quad (4.39.a, b)$$

As constantes de integração  $G_1$  e  $G_2$  representam a função corrente nas paredes do canal. Para o cálculo destas constantes, verifica-se que a vazão por profundidade unitária que passa entre as linhas de corrente satisfaz o balanço de massa global, de modo que a seguinte relação é satisfeita.

$$q_{va} = G_2 - G_1 \quad (4.40)$$

Observa-se que, a equação da quantidade de movimento no modelo proposto é uma equação de quinta ordem, com somente quatro condições de contorno na direção Y. Isto é conhecido na literatura como um problema de perturbação singular (SURMA DEVI e NATH, 1990). As técnicas comumente usadas para contornar esta dificuldade são expansão por perturbação regular dos potenciais, válida somente para valores pequenos dos parâmetros viscoelásticos, utilização de condições de contorno extras com objetivo de completar o problema, e utilização de técnicas analíticas que buscam soluções em série para os potenciais do problema. Evidentemente, não existe técnica mais indicada para tratar este tipo de problema, pois sua característica singular permite encontrar infinitas soluções. Portanto a aplicação da GITT à solução deste problema é vista como uma técnica que possui grande potencial de solução, pois suas características híbridas permitem resolver o problema sem assumir demasiadas hipóteses.

#### 4.3.6-SOLUÇÃO VIA GITT

Considerando as idéias da Técnica da Transformada Integral Generalizada (COTTA, 1993) já apresentadas, para a melhora do desempenho computacional é conveniente definir um filtro que homogeneíza as condições de contorno para o campo de velocidade na direção Y, a qual posteriormente será a coordenada escolhida para a definição do problema de autovalor. Portanto:

$$\psi(X, Y) = \psi_{\infty}(Y; X) + \phi(X, Y) \quad (4.41)$$

COTTA (1993) discute, ainda, que o filtro ideal para problemas de escoamento na região de entrada de dutos é o perfil do campo de velocidade quando o escoamento se encontra completamente desenvolvido. A determinação deste filtro é uma tarefa simples quando o fluido que escoar é newtoniano em geometrias também simples (placa paralelas, dutos, anulares), pois possuem solução analítica exata. Quando se trata de escoamento de fluidos não newtonianos, a tarefa se torna mais complexa, pois as ordens elevadas das componentes do tensor tensão juntamente com as não linearidades e ausência de condições de contorno que completem o problema, podem inviabilizar uma solução analítica exata.

Para o presente problema se buscará uma solução analítica exata, embora seja inviável obter tal solução considerando todos os aspectos da formulação aqui desenvolvida, ou seja, termos convectivos, difusivos, de segundo e terceiro graus na equação da quantidade de movimento. Esta dificuldade tornou-se objeto de estudo para diversos pesquisadores utilizando as mais variadas técnicas analíticas, híbridas e numéricas (TALAY AKYILDIZ, 2001; ARIEL, 2003).

Analisando as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento nas direções  $x$  e  $y$ , e considerando a hipótese de velocidade transversal constante e o fato da componente de velocidade  $u$  depender somente da direção  $y$  na região de escoamento completamente desenvolvido (FOX e MCDONALD, 1995), têm-se para as equações:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ pois } v = V_0 = \text{constante} \quad (4.42)$$

$$V_0 \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{\alpha_1}{\rho} V_0 \frac{d^3 u}{dy^3} + 6 \frac{\beta_3}{\rho} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (4.43)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 4 \frac{\alpha_1}{\rho} \frac{du}{dy} \frac{d^2 u}{dy^2} + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \frac{du}{dy} \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (4.44)$$

Definindo a seguinte pressão modificada (ARIEL, 2002); com objetivo de se ter somente uma equação da quantidade de movimento que represente o escoamento na região completamente desenvolvida.

$$p = p_0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad (4.45)$$

Substituindo (4.45) nas equações (4.43) e (4.44), e observando que a equação da continuidade está satisfeita, obtêm-se:

$$V_0 \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{\alpha_1}{\rho} V_0 \frac{d^3u}{dy^3} + 6 \frac{\beta_3}{\rho} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \frac{d^2u}{dy^2} \quad (4.46)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (4.47)$$

Segundo ARIEL (2003), a equação (4.46) não possui solução analítica exata, o que é esperado, pois o termo que multiplica o parâmetro viscoelástico do terceiro grau possui uma não linearidade que dificulta em demasia qualquer tratamento analítico.

Desta maneira, a proposta para o filtro que homogeneíza as condições de contorno do problema ficará sem esta não linearidade, o que de certa forma retira o rigor físico do filtro se o mesmo representa o campo de velocidade na região completamente desenvolvida, mas não implicará nos resultados finais, pois o rigor matemático permanece tendo em vista que o filtro que será proposto possui solução analítica exata. Além disso, um tratamento deste problema via GITT implicaria em outro trabalho, que é deixado como sugestão para investigação e comparação com outras técnicas que já analisaram tal problema. Assim têm-se:

$$V_0 \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{\alpha_1}{\rho} V_0 \frac{d^3u}{dy^3} \quad (4.48)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (4.49)$$

Com condições de contorno

$$u = 0, v = V_0 \text{ em } y = 0 \quad (4.50.a, b)$$

$$u = 0, v = V_0 \text{ em } y = h \quad (4.51.a, b)$$

Nota-se que a equação (4.48), representa o campo de velocidade para um fluido de segundo grau na região completamente desenvolvida. Após adimensionalização,

eliminação do termo de pressão e tratamento via função corrente, a solução do filtro proposto é dado por (A demonstração da solução deste problema é discutida no apêndice III):

$$\psi_{\infty}(Y; X) = -mR_v X + G_1 - \frac{q_{va}}{a_1} - \frac{r_2 q_{va}}{a_1} Y + \frac{q_{va} r_2}{2a_1} (1 - e^{r_2}) Y^2 + \frac{q_{va}}{a_1} e^{r_2 Y} \quad (4.52)$$

onde X é considerado parâmetro e,

$$a_1 = e^{r_2} - \frac{r_2}{2} e^{r_2} - 1 - \frac{r_2}{2} \quad (4.53)$$

$$r_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4K_1 Re_T^2}}{2K_1 Re_T} \quad (4.54)$$

$$Re_T = \frac{V_0 h}{\nu} \quad (4.55)$$

A equação (4.55) representa o numero de Reynolds transversal, que surge naturalmente no processo de adimensionalização da equação (4.48)

Substituindo (4.41) e (4.52) nas equações (4.35) a (4.39), obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial X \partial Y^2} - K_1 \frac{\partial^5 \phi}{\partial X \partial Y^4} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial X} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) + K_1 \frac{\partial \phi}{\partial X} \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial Y^5} + F_5(Y) \right) \\ & = \frac{1}{Re} \frac{\partial^4 \phi}{\partial Y^4} + \frac{F_4(Y)}{Re} + 12K_3 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right)^2 - mR_v \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) \\ & + 6K_3 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^2 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial Y^4} + F_4(Y) \right) + mK_1 R_v \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial Y^5} + F_5(Y) \right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \varphi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - K_1 Ec \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X \partial Y^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \right. \\
& \left. - \frac{\partial \varphi}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) \right] = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} - mR_v \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{Ec}{Re} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^2 \quad (4.57) \\
& + mK_1 Ec R_v \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) + 2K_3 Ec \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^4
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y} = 0, \varphi = 0, \theta = 0 \quad \text{em } Y = 0 \quad (4.58.a, b, c)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y} = 0, \varphi = 0, \theta = 0 \quad \text{em } Y = 1 \quad (4.59.a, b, c)$$

$$\varphi = Y + G_1 - \psi_\infty(Y), \theta = 1 \quad \text{em } X = 0 \quad (4.60.a, b)$$

onde

$$\begin{aligned}
F_1(Y) &= -\frac{r_2 q_{va}}{a_1} + \frac{r_2 q_{va}}{a_1} (1 - e^{r_2 Y}) + \frac{r_2 q_{va}}{a_1} e^{r_2 Y} \\
F_2(Y) &= \frac{r_2 q_{va}}{a_1} (1 - e^{r_2 Y}) + \frac{r_2^2 q_{va}}{a_1} e^{r_2 Y} \\
F_3(Y) &= \frac{r_2^3 q_{va}}{a_1} e^{r_2 Y} \\
F_4(Y) &= \frac{r_2^4 q_{va}}{a_1} e^{r_2 Y} \\
F_5(Y) &= \frac{r_2^5 q_{va}}{a_1} e^{r_2 Y}
\end{aligned} \quad (4.61.a, b, c, d, e)$$

Na aplicação da GITT para a integração das equações diferenciais parciais (4.56) e (4.57), a direção Y é escolhida para o processo de transformação integral devido à característica homogênea do problema na referida direção, característica esta que foi obtida após a aplicação do filtro.

Os problemas de autovalor apropriados na aplicação da transformação integral das equações (4.56) a (4.60) são aqueles discutidos no trabalho de PEREZ GUERRERO (1991) e são dados por:

Para o campo de função corrente

$$\frac{d^4\Omega_i(Y)}{dY^4} = \mu_i^4\Omega_i(Y), \quad i = 1,2,3,\dots \quad (4.62)$$

$$\Omega_i(0) = 0, \quad \frac{d\Omega_i(0)}{dY} = 0 \quad (4.62.a, b)$$

$$\Omega_i(1) = 0, \quad \frac{d\Omega_i(1)}{dY} = 0 \quad (4.62.c, d)$$

O problema (4.62) é então resolvido para obter-se a seguinte solução analítica.

$$\Omega_i(Y) = \frac{\cos\mu_i\left(Y - \frac{1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} - \frac{\cosh\mu_i\left(Y - \frac{1}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} \quad i = 1,3,5\dots \quad (4.63)$$

$$\Omega_i(Y) = \frac{\sen\mu_i\left(Y - \frac{1}{2}\right)}{\sen\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} - \frac{\sinh\mu_i\left(Y - \frac{1}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\mu_i}{2}\right)} \quad i = 2,4,6\dots \quad (4.64)$$

Os autovalores  $\mu_i$  são calculados pelas seguintes equações transcendentais.

$$\operatorname{tgh} \frac{\mu_i}{2} = \begin{cases} -\operatorname{tg} \frac{\mu_i}{2}, & i = 1,3,5\dots \\ \operatorname{tg} \frac{\mu_i}{2}, & i = 2,4,6\dots \end{cases} \quad (4.65.a, b)$$

As autofunções satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$\int_0^1 \Omega_i(Y)\Omega_j(Y)dY = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ N_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.66)$$

A Norma  $N_i$  é calculada de

$$N_i = \int_0^1 (\Omega_i)^2 dY = 1 \quad (4.67)$$

Sem perda de generalidade a autofunção será normalizada da seguinte forma:

$$\tilde{\Omega}_i = \frac{\Omega_i}{N_i^{1/2}} \quad (4.68)$$

Para o campo de Temperatura

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Gamma_i(Y)}{dY^2} + \lambda_i^2 \Gamma_i(Y) &= 0 \\ \Gamma_i(0) &= 0 \\ \Gamma_i(1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.69.a, b, c)$$

Similarmente o problema (4.69) é resolvido analiticamente para fornecer as autofunções, equação transcendental para cálculo dos autovalores, propriedade de ortogonalidade e Norma  $M_i$ .

$$\Gamma_i(Y) = \text{sen}(\lambda_i Y) \quad \lambda_i = i\pi \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.70 \text{ e } 4.71)$$

$$\int_0^1 \Gamma_i(Y) \Gamma_j(Y) dY = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ M_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad M_i = \int_0^1 [\Gamma_i(Y)]^2 dY = \frac{1}{2} \quad (4.72 \text{ e } 4.73)$$

Sem perda de generalidade a autofunção será normalizada da seguinte forma:

$$\tilde{\Gamma}_i = \frac{\Gamma_i}{M_i^{1/2}} \quad (4.74)$$

De posse dos problemas de autovalor apresentados para o campo de função corrente e temperatura, definem-se então os seguintes pares transformada-inversa.

Para o campo de função corrente

$$\tilde{\varphi}_i(X) = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i(Y) \varphi(X, Y) dY, \text{ Transformada} \quad (4.75)$$

$$\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_i(Y) \tilde{\varphi}_i(X), \text{ Inversa} \quad (4.76)$$

Para o campo de Temperatura

$$\tilde{\theta}_i(X) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) \theta(X, Y) dY, \text{ Transformada} \quad (4.77)$$

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(Y) \tilde{\theta}_i(X), \text{ Inversa} \quad (4.78)$$

Após a definição dos pares transformada-inversa, o passo seguinte é iniciar o processo de transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais. Para o

campo de função corrente a equação (4.69) é multiplicada pelo operador  $\int_0^1 \tilde{\Omega}_i(Y) dY$ .

Assim, têm-se:

$$\int_0^1 \tilde{\Omega}_i(Y) \left\{ \begin{array}{l} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X \partial Y^2} - K_1 \frac{\partial^5 \varphi}{\partial X \partial Y^4} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial X} \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) + K_1 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} + F_5(Y) \right) \right) \\ \left( \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial Y^4} + \frac{F_4(Y)}{\text{Re}} + 12K_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right)^2 - mR_v \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) \right) \\ \left( + 6K_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^2 \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial Y^4} + F_4(Y) \right) + mK_1 R_v \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} + F_5(Y) \right) \right) \end{array} \right\} dY \quad (4.79)$$

Substituindo a fórmula de inversão (4.76) para o campo de função corrente em (4.79), obtêm-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\tilde{\varphi}_j}{dX} = \frac{\mu_i^4 \tilde{\varphi}_i(X)}{\text{Re}} + B_i \quad (4.80)$$

onde

$$A_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \left( \frac{d^2 \tilde{\Omega}_j}{dY^2} - K_1 \frac{d^4 \tilde{\Omega}_j}{dY^4} \right) - \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) + K_1 \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} + F_5(Y) \right) \right] dY \quad (4.81)$$

$$B_i = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i \left[ 12K_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right)^2 - mR_v \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) + 6K_3 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^2 \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial Y^4} + F_4(Y) \right) + mK_1 R_v \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} + F_5(Y) \right) + \frac{F_4(Y)}{\text{Re}} \right] dY \quad (4.82)$$

A transformação da condição de contorno em X é obtida, aplicando o mesmo operador na equação (4.60.a). Assim têm-se:

$$\tilde{\varphi}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i [Y + G_1 - \psi_{\infty}(Y)] dY \quad (4.83)$$

Com o objetivo de minimizar os múltiplos somatórios nos coeficientes que surgem naturalmente no processo de transformação integral do problema, os coeficientes  $A_{ij}$  e  $B_i$  serão avaliados através de uma semi-linearização do integrando conforme mostrado no capítulo 3. Assim:

$$A_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i (a_m Y + b_m) dY \quad (4.84)$$

$$A_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} a_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_m} b_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i dY \quad (4.85)$$

$$a_m = \frac{F_j|_{Y_m} - F_j|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; b_m = F_j|_{Y_m} - a_m Y_m \quad (4.86.a, b)$$

$$F_j(X, Y, \varphi) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \left( \frac{d^2 \tilde{\Omega}_j}{dY^2} - K_1 \frac{d^4 \tilde{\Omega}_j}{dY^4} \right) - \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) + K_1 \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} + F_5(Y) \right) \quad (4.87)$$

Sendo  $\Delta Y$  o tamanho do intervalo onde são avaliadas as integrais.

Procedendo da mesma maneira para o coeficiente  $B_i$ , obtêm-se:

$$B_i = \sum_{m=1}^{N_m} \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i (c_m Y + d_m) dY \quad (4.88)$$

$$B_i = \sum_{m=1}^{N_k} c_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_k} d_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i dY \quad (4.89)$$

$$c_m = \frac{H|_{Y_m} - H|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; d_m = H|_{Y_m} - c_m Y_m \quad (4.90.a, b)$$

$$\begin{aligned}
H = & 12K_3 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right)^2 - mR_v \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) + \\
& 6K_3 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^2 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial Y^4} + F_4(Y) \right) + mK_1 R_v \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial Y^5} + F_5(Y) \right) + \frac{F_4(Y)}{Re}
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Para o campo de temperatura a equação (4.57) é multiplicada pelo operador

$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) dY$ . E, similarmente ao realizado para o campo de função corrente, encontra-se:

$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - K_1 Ec \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial X \partial Y^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial \phi}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) \right] = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} - mR_v \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{Ec}{Re} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^2 \\ & \left. + mK_1 Ec R_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) + 2K_3 Ec \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^4 \right] dY \tag{4.92}
\end{aligned}$$

Substituindo a fórmula de Inversão (4.78) para a temperatura, obtêm-se para (4.92):

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \frac{d\tilde{\theta}_j}{dX} - \sum_{j=1}^{\infty} D_{ij} \frac{d\tilde{\phi}_j}{dX} = -\frac{\tilde{\theta}_i \lambda_i^2}{Pe} + E_i \tag{4.93}$$

onde

$$C_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \tilde{\Gamma}_j \right] dY \tag{4.94}$$

$$D_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left[ \tilde{\Omega}_j \frac{\partial \theta}{\partial Y} + K_1 Ec \left[ \frac{d^2 \tilde{\Omega}_j}{dY^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. - \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) \right] \right] dY \quad (4.95)$$

$$E_i = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left\{ -mR_v \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{Ec}{Re} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^2 + mK_1 Ec R_v \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) \right. \\ \left. + 2K_3 Ec \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^4 \right\} dY \quad (4.96)$$

A transformação da condição inicial é obtida, aplicando o mesmo operador na equação (4.60.b). Assim têm-se:

$$\tilde{\theta}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) dY \quad (4.97)$$

Os coeficientes  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  e  $E_i$  serão semi-linearizados da mesma maneira como realizado para o campo de função corrente. Assim:

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} g_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_m} h_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i dY \quad (4.98)$$

$$g_m = \frac{P_j|_{Y_m} - P_j|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; h_m = P_j|_{Y_m} - g_m Y_m \quad (4.99.a, b)$$

$$D_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} r_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_m} s_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i dY \quad (4.100)$$

$$r_m = \frac{Q_j|_{Y_m} - Q_j|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; s_m = Q_j|_{\eta_m} - r_m Y_m \quad (4.101.a, b)$$

$$E_i = \sum_{m=1}^{N_m} t_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_m} u_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i dY \quad (4.102)$$

$$t_m = \frac{R|_{Y_m} - R|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; u_m = R|_{Y_m} - t_m Y_m \quad (4.103.a, b)$$

onde

$$P_j(X, Y, \varphi) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \tilde{\Gamma}_j \quad (4.104)$$

$$Q_j(X, Y, \theta, \varphi) = \tilde{\Omega}_j \frac{\partial \theta}{\partial Y} + K_1 Ec \left[ \frac{d^2 \tilde{\Omega}_j}{dY^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) - \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) \right] \quad (4.105)$$

$$R(X, Y, \theta, \varphi) = -m R_v \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{Ec}{Re} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^2 + m K_1 Ec R_v \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right) \cdot \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} + F_3(Y) \right) + 2 K_3 Ec \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + F_2(Y) \right)^4 \quad (4.106)$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado, dados pelas equações (4.80) e (4.93) é melhor visualizado em sua forma matricial, dada por:

$$\begin{bmatrix} [A_{ij}] & \cdot & [0]_{ij} \\ \dots & \dots & \dots \\ [-D_{ij}] & \cdot & [C_{ij}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{\varphi}_j}{dX} \\ \frac{d\tilde{\theta}_j}{dX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu_i^4 \tilde{\varphi}_i(X)}{Re} + B_i \\ \dots \\ -\frac{\lambda_i^2 \tilde{\theta}_i(X)}{Pe} + E_i \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Para o desenvolvimento do código computacional, onde se implementou o sistema diferencial ordinário obtido, dados pelas equações (4.80) e (4.93), a rotina DIVPAG da biblioteca IMSL (1989) foi utilizada. As características de solução desta rotina já foram apresentadas no capítulo 3.

Uma vez calculado os potenciais  $\tilde{\varphi}_i$  e  $\tilde{\theta}_i$ , o campo de velocidade original é obtido pela substituição da fórmula de inversão (4.76) no filtro (equação 4.41) e em seguida na definição de função corrente para as componentes de velocidade U e V. A fórmula de inversão (4.78) define o campo de temperatura original, logo

$$U(X, Y) = \frac{\partial \psi_\infty}{\partial Y} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\tilde{\Omega}_i(Y)}{dY} \tilde{\varphi}_i(X) \quad (4.108)$$

$$V(X, Y) = mR_v - \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_i(Y) \frac{d\tilde{\varphi}_i(X)}{dX} \quad (4.109)$$

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(Y) \tilde{\theta}_i(X) \quad (4.110)$$

#### 4.3.7-ALGORITMO COMPUTACIONAL

O sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares de primeira ordem, equações (4.80) e (4.93), juntamente com suas condições de contorno, equações (4.83) e (4.97), devem ser resolvidos por técnicas numéricas, devido a impossibilidade de se

obter soluções analíticas. A rotina matemática DIVPAG da biblioteca IMSL (1989) foi utilizada para a solução numérica deste problema de valor inicial.

Como apresentado no capítulo 3, o uso da rotina DIVPAG requer que o sistema de equações dado pelas equações (4.80) e (4.93), seja reescrito da seguinte forma

$$\sum_{j=1}^{NV} A_{ij} \frac{d\tilde{\varphi}_j}{dX} = \frac{\mu_i^4 \tilde{\varphi}_i(X)}{Re} + B_i, \quad i=1, NV \quad (4.111)$$

$$\sum_{j=Nv+1}^{NV+NT} C_{ij} \frac{d\tilde{\theta}_j}{dX} - \sum_{j=1}^{NT} D_{ij} \frac{d\tilde{\varphi}_j}{dX} = -\frac{\tilde{\theta}_i \lambda_i^2}{Pe} + E_i, \quad i = NV + 1, NV + NT \quad (4.112)$$

As condições de entrada transformadas para a velocidade e temperatura resultam

$$\tilde{\varphi}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i [Y + G_1 - \psi_\infty(Y)] dY, \quad i=1, NV \quad (4.113)$$

$$\tilde{\theta}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) dY, \quad i = NV + 1, NV + NT \quad (4.114)$$

A forma matricial do sistema (4.111) e (4.112) que atende ao tipo de configuração resolvível pela DIVPAG é

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{Y}) \frac{d\mathbf{Y}}{dX} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \quad (4.115)$$

ou ainda

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dX} = \mathbf{F}^*(\mathbf{Y})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \quad (4.116)$$

No vetor  $\mathbf{Y}$ , dos potenciais transformados, as primeiras posições são ocupadas por  $\tilde{\varphi}_i$  ( $j = 1, 2, \dots, NV$ ) e as seguintes por  $\tilde{\theta}_j$  ( $j = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT$ ). A matriz  $\mathbf{G}$  armazena os coeficientes  $B_i + \frac{\mu_i^4 \tilde{\varphi}_i(\mathbf{X})}{Re}$  ( $i = 1, 2, \dots, NV$ ) e  $E_i - \frac{\tilde{\theta}_i \lambda_i^2}{Pe}$  ( $i = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT$ ), e a matriz  $\mathbf{F}^*$  armazena os coeficientes  $A_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, NV; j = 1, 2, \dots, NV$ ),  $C_{ij}$  ( $i = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT; j = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT$ ),  $D_{ij}$  ( $i = NV + 1, NV + 2, \dots, NV + NT; j = 1, 2, \dots, NV$ ).

No código computacional desenvolvido no presente trabalho, as ordens de truncamento foram assumidas iguais, ou seja,  $NV = NT$ . No entanto, é possível ter ordens diferentes. Vale ressaltar que nesta análise o potencial de temperatura é dependente do potencial da velocidade. Desta maneira, para ordens de truncamento muito diferentes, é necessário avaliar resultados para o campo de temperatura diante da ordem de truncamento assumida para o campo de velocidade, pois é possível que uma pequena ordem de truncamento para o campo de velocidade leve a resultados errôneos no campo de temperatura, em virtude de resultados ainda não convergidos dentro da tolerância prescrita.

#### 4.4-RESULTADOS E DISCUSSÃO

Resultados numéricos para os campos de velocidade e temperatura foram obtidos. O código computacional foi desenvolvido em linguagem de programação FORTRAN 2003 e executado em computadores com processadores Intel I3 2.13 GHz e Intel 2.2 GHz do laboratório de simulação do Programa de Doutorado em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia da Universidade Federal do Pará. A subrotina DIVPAG da IMSL foi usada para aproximar numericamente a versão truncada do sistema diferencial ordinário, com um erro relativo prescrito pelo usuário de  $10^{-6}$  para os potenciais de velocidade e temperatura. Para o campo de velocidade, os resultados foram produzidos para diferentes ordens de truncamento ( $NV \leq 48$ ) e diferentes valores dos parâmetros de estudo  $K_1$ ,  $K_3$  e  $R_V$ . Similarmente, para o campo de temperatura, os resultados foram produzidos para  $NT \leq 48$  e diferentes valores dos parâmetros de estudo  $K_1$ ,  $K_3$ ,  $R_V$ ,  $Pr$  e  $Ec$ . Como o sistema diferencial depende do número de Reynolds, os resultados foram obtidos para  $Re = 1000$ .

#### 4.4.1-CAMPO DE VELOCIDADE

Primeiramente mostra-se o comportamento da convergência para a componente de velocidade  $U$  em função dos parâmetros viscoelásticos de segundo e terceiro grau com influência da injeção e sucção simultânea.

Os valores de entrada assumidos para os parâmetros de estudo do fluido de segundo grau e velocidade de injeção ou sucção já foram discutidos no capítulo 3. Entretanto, nesse capítulo, o parâmetro do fluido de terceiro é também analisado. PAKDEMIRLI (1994) cita que a formação de camada limite convencional para fluido de terceiro grau é verificada somente se os parâmetros viscoelásticos do fluido de segundo grau forem da mesma ordem do inverso do número de Reynolds e o parâmetro do fluido de terceiro grau for da ordem do quadrado do inverso do número de Reynolds. Sendo assim, os valores assumidos para o parâmetro viscoelástico do terceiro grau ficaram na ordem entre  $10^{-5}$  e  $10^{-6}$ , uma vez que, todos os resultados foram calculados para Reynolds  $Re = 1000$ .

Os resultados apresentados nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 mostraram de uma maneira geral, uma excelente convergência em três algarismos significativos para todas as posições axiais consideradas. Observa-se também destas tabelas que a partir da posição  $X = 20$ , a taxa de convergência da componente de velocidade aumenta para quatro algarismos significativos em todas as situações simuladas. A baixa taxa de convergência na região de entrada do canal é atribuída principalmente aos efeitos do parâmetro viscoelástico de segundo grau, pois as tensões normais que o mesmo transporta tornam-se relevante quando comparadas aos efeitos difusivos presentes no escoamento. Não se observou uma influência significativa em termos de convergência dos resultados, do parâmetro de injeção e sucção, isto era esperado, pois os valores de  $R_v$  usados na simulação atendem as recomendações propostas por SCHLICHTING (1979) de não comprometer a continuidade, já que a formulação utilizada para analisar a região de entrada do canal foi a formulação em camada limite.

Tabela 4.1 – Convergência da componente de velocidade U no centro do canal para  $K_1 = 0,0001$ ,  $K_3 = 0$  e vários valores de Rv.

<b>Rv = 0,001</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0495	1,0517	1,0550	1,0537	1,0532	1,0525	1,0517	1,0507
10	1,2907	1,2935	1,2944	1,2946	1,2946	1,2945	1,2944	1,2941
20	1,4012	1,4025	1,4029	1,4031	1,4030	1,4030	1,4029	1,4028
50	1,4854	1,4855	1,4855	1,4855	1,4855	1,4855	1,4855	1,4854
70	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922
90	1,4936	1,4936	1,4935	1,4936	1,4936	1,4936	1,4936	1,4936
200	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938
7000	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938
<b>Rv = 0,005</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0655	1,0711	1,0750	1,0760	1,0764	1,0765	1,0766	1,0766
10	1,3098	1,3129	1,3142	1,3147	1,3151	1,3152	1,3152	1,3153
20	1,4028	1,4035	1,4038	1,4039	1,4040	1,4041	1,4041	1,4041
50	1,3997	1,3995	1,3994	1,3995	1,3994	1,3994	1,3994	1,3994
70	1,3886	1,3886	1,3885	1,3886	1,3885	1,3885	1,3885	1,3885
90	1,3847	1,3847	1,3847	1,3847	1,3847	1,3846	1,3847	1,3846
200	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830
7000	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830	1,3830
<b>Rv = 0,01</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0662	1,0742	1,0773	1,0781	1,0785	1,0785	1,0785	1,0783
10	1,3434	1,3452	1,3459	1,3465	1,3466	1,3466	1,3466	1,3465
20	1,3637	1,3626	1,3624	1,3621	1,3621	1,3622	1,3620	1,3620
50	1,2477	1,2475	1,2475	1,2474	1,2474	1,2474	1,2474	1,2474
70	1,2364	1,2364	1,2364	1,2364	1,2364	1,2364	1,2364	1,2364
90	1,2352	1,2352	1,2352	1,2352	1,2352	1,2352	1,2352	1,2352
200	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353
7000	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353	1,2353

Tabela 4.2 – Convergência da componente de velocidade U no centro do canal para  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 0$  e vários valores de  $R_v$ .

<b><math>R_v = 0,001</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0495	1,0517	1,0550	1,0537	1,0532	1,0525	1,0517	1,0507
10	1,2907	1,2935	1,2944	1,2946	1,2946	1,2945	1,2944	1,2941
20	1,4012	1,4025	1,4029	1,4031	1,4030	1,4030	1,4029	1,4028
50	1,4854	1,4855	1,4855	1,4855	1,4855	1,4855	1,4855	1,4854
70	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922	1,4922
90	1,4936	1,4936	1,4935	1,4936	1,4936	1,4936	1,4936	1,4936
200	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938
7000	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938
<b><math>R_v = 0,005</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0494	1,0525	1,0553	1,0541	1,0535	1,0527	1,0518	1,0507
10	1,3050	1,3073	1,3081	1,3081	1,3081	1,3079	1,3077	1,3074
20	1,4018	1,4024	1,4026	1,4026	1,4026	1,4026	1,4026	1,4025
50	1,4007	1,4006	1,4005	1,4007	1,4006	1,4006	1,4006	1,4006
70	1,3894	1,3893	1,3893	1,3893	1,3893	1,3893	1,3893	1,3893
90	1,3852	1,3852	1,3852	1,3852	1,3852	1,3852	1,3852	1,3852
200	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834
7000	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834	1,3834
<b><math>R_v = 0,01</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0496	1,0550	1,0566	1,0555	1,0546	1,0535	1,0523	1,0510
10	1,3397	1,3407	1,3411	1,3410	1,3407	1,3405	1,3401	1,3398
20	1,3675	1,3669	1,3668	1,3669	1,3671	1,3671	1,3674	1,3676
50	1,2503	1,2502	1,2502	1,2502	1,2502	1,2502	1,2503	1,2503
70	1,2386	1,2386	1,2386	1,2386	1,2386	1,2386	1,2386	1,2386
90	1,2373	1,2373	1,2373	1,2373	1,2373	1,2373	1,2373	1,2373
200	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375
7000	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375	1,2375

Tabela 4.3 – Convergência da componente de velocidade U no centro do canal para  $K_1 = 0,0003$ ,  $K_3 = 0$  e vários valores de  $R_v$ .

<b><math>R_v = 0,001</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0352	1,0368	1,0360	1,0327	1,0310	1,0292	1,0274	1,0258
10	1,2858	1,2879	1,2883	1,2881	1,2878	1,2874	1,2870	1,2866
20	1,3983	1,3993	1,3994	1,3994	1,3992	1,3990	1,3988	1,3986
50	1,4849	1,4850	1,4850	1,4850	1,4850	1,4850	1,4850	1,4850
70	1,4921	1,4921	1,4921	1,4921	1,4921	1,4921	1,4921	1,4921
90	1,4935	1,4935	1,4935	1,4935	1,4935	1,4935	1,4935	1,4935
200	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938
7000	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938	1,4938
<b><math>R_v = 0,005</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0351	1,0373	1,0360	1,0328	1,0311	1,0292	1,0275	1,0258
10	1,3000	1,3015	1,3017	1,3013	1,3007	1,3003	1,2997	1,2992
20	1,4007	1,4011	1,4012	1,4012	1,4010	1,4010	1,4009	1,4008
50	1,4018	1,4018	1,4017	1,4017	1,4018	1,4018	1,4019	1,4019
70	1,3901	1,3901	1,3900	1,3901	1,3901	1,3901	1,3901	1,3901
90	1,3857	1,3857	1,3857	1,3857	1,3857	1,3858	1,3858	1,3858
200	1,3839	1,3838	1,3838	1,3838	1,3838	1,3838	1,3839	1,3838
7000	1,3838	1,3838	1,3838	1,3838	1,3838	1,3838	1,3838	1,3838
<b><math>R_v = 0,01</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0350	1,0388	1,0361	1,0334	1,0314	1,0294	1,0275	1,0258
10	1,3357	1,3360	1,3353	1,3346	1,3337	1,3330	1,3320	1,3313
20	1,3714	1,3710	1,3714	1,3718	1,3721	1,3725	1,3728	1,3731
50	1,2528	1,2528	1,2529	1,2529	1,2530	1,2531	1,2532	1,2532
70	1,2407	1,2407	1,2407	1,2407	1,2407	1,2407	1,2407	1,2408
90	1,2394	1,2394	1,2394	1,2394	1,2394	1,2394	1,2394	1,2394
200	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396
7000	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396	1,2396

Tabela 4.4 – Convergência da componente de velocidade U no centro do canal para  $K_1 = 0,0001$ ,  $K_3 = 1.10^{-5}$  e vários valores de Rv.

<b>Rv = 0,001</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,3259	1,3306	1,3304	1,3310	1,3309	1,3312	1,3312	1,3313
10	1,6712	1,6727	1,6732	1,6734	1,6735	1,6736	1,6736	1,6736
20	1,6860	1,6882	1,6890	1,6893	1,6894	1,6895	1,6895	1,6895
50	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6897	1,6897	1,6897
70	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6897	1,6897	1,6897
90	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6897	1,6897	1,6897
200	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6897	1,6897	1,6897
7000	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6897	1,6897	1,6897
<b>Rv = 0,005</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,3265	1,3306	1,3306	1,3311	1,3312	1,3314	1,3314	1,3315
10	1,6609	1,6607	1,6605	1,6604	1,6603	1,6603	1,6604	1,6603
20	1,6708	1,6703	1,6701	1,6699	1,6698	1,6697	1,6697	1,6697
50	1,6707	1,6703	1,6700	1,6697	1,6696	1,6696	1,6696	1,6695
70	1,6707	1,6703	1,6700	1,6697	1,6696	1,6696	1,6696	1,6695
90	1,6707	1,6703	1,6700	1,6697	1,6696	1,6696	1,6696	1,6695
200	1,6707	1,6703	1,6700	1,6697	1,6696	1,6696	1,6696	1,6695
7000	1,6707	1,6703	1,6700	1,6697	1,6696	1,6696	1,6696	1,6695
<b>Rv = 0,01</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,3288	1,3307	1,3316	1,3317	1,3318	1,3320	1,3321	1,3321
10	1,6337	1,6309	1,6307	1,6307	1,6306	1,6307	1,6307	1,6306
20	1,6335	1,6311	1,6306	1,6306	1,6307	1,6307	1,6306	1,6307
50	1,6330	1,6306	1,6302	1,6302	1,6302	1,6303	1,6302	1,6302
70	1,6330	1,6306	1,6302	1,6302	1,6302	1,6303	1,6302	1,6302
90	1,6330	1,6306	1,6302	1,6302	1,6302	1,6303	1,6302	1,6302
200	1,6330	1,6306	1,6302	1,6302	1,6302	1,6303	1,6302	1,6302
7000	1,6330	1,6306	1,6302	1,6302	1,6302	1,6303	1,6302	1,6302

Tabela 4.5 – Convergência da componente de velocidade U no centro do canal para  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1.10^{-5}$  e vários valores de Rv.

<b>Rv = 0,001</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,3248	1,3292	1,3292	1,3295	1,3297	1,3298	1,3299	1,3300
10	1,6703	1,6717	1,6722	1,6724	1,6724	1,6724	1,6725	1,6725
20	1,6860	1,6881	1,6889	1,6892	1,6893	1,6894	1,6894	1,6894
50	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
70	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
90	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
200	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
7000	1,6862	1,6884	1,6892	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
<b>Rv = 0,005</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,3253	1,3293	1,3295	1,3298	1,3299	1,3300	1,3301	1,3302
10	1,6601	1,6598	1,6597	1,6595	1,6595	1,6595	1,6595	1,6594
20	1,6706	1,6701	1,6698	1,6696	1,6695	1,6694	1,6694	1,6696
50	1,6705	1,6700	1,6697	1,6694	1,6693	1,6693	1,6692	1,6692
70	1,6705	1,6700	1,6697	1,6694	1,6693	1,6693	1,6692	1,6692
90	1,6705	1,6700	1,6697	1,6694	1,6693	1,6693	1,6692	1,6692
200	1,6705	1,6700	1,6697	1,6694	1,6693	1,6693	1,6692	1,6692
7000	1,6705	1,6700	1,6697	1,6694	1,6693	1,6693	1,6692	1,6692
<b>Rv = 0,01</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,3276	1,3295	1,3303	1,3304	1,3305	1,3306	1,3307	1,3308
10	1,6332	1,6305	1,6303	1,6302	1,6304	1,6306	1,6302	1,6302
20	1,6330	1,6305	1,6301	1,6301	1,6302	1,6302	1,6301	1,6301
50	1,6325	1,6300	1,6296	1,6296	1,6297	1,6297	1,6297	1,6296
70	1,6325	1,6300	1,6296	1,6296	1,6297	1,6297	1,6297	1,6296
90	1,6325	1,6300	1,6296	1,6296	1,6297	1,6297	1,6297	1,6296
200	1,6325	1,6300	1,6296	1,6296	1,6297	1,6297	1,6297	1,6296
7000	1,6325	1,6300	1,6296	1,6296	1,6297	1,6297	1,6297	1,6296

Tabela 4.6 – Convergência da componente de velocidade U no centro do canal para  $K_1 = 0,0003$ ,  $K_3 = 1.10^{-5}$  e vários valores de Rv.

<b>Rv = 0,001</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,3237	1,3278	1,328	1,3283	1,3285	1,3285	1,3286	1,3286
10	1,6693	1,6706	1,671	1,6712	1,6713	1,6713	1,6713	1,6713
20	1,6859	1,6881	1,6889	1,6892	1,6893	1,6893	1,6894	1,6894
50	1,6862	1,6883	1,6891	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
70	1,6862	1,6883	1,6891	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
90	1,6862	1,6883	1,6891	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
200	1,6862	1,6883	1,6891	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
7000	1,6862	1,6883	1,6891	1,6895	1,6896	1,6896	1,6897	1,6897
<b>Rv = 0,005</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,3242	1,3279	1,3283	1,3285	1,3287	1,3287	1,3288	1,3288
10	1,6593	1,659	1,6589	1,6587	1,6587	1,6586	1,6586	1,6586
20	1,6704	1,6698	1,6695	1,6692	1,6691	1,6691	1,6691	1,669
50	1,6703	1,6697	1,6694	1,6691	1,669	1,6689	1,6689	1,6689
70	1,6703	1,6697	1,6694	1,6691	1,669	1,6689	1,6689	1,6689
90	1,6703	1,6697	1,6694	1,6691	1,669	1,6689	1,6689	1,6689
200	1,6703	1,6697	1,6694	1,6691	1,669	1,6689	1,6689	1,6689
7000	1,6703	1,6697	1,6694	1,6691	1,669	1,6689	1,6689	1,6689
<b>Rv = 0,01</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,3264	1,3282	1,3291	1,3291	1,3293	1,3293	1,3294	1,3294
10	1,6328	1,63	1,63	1,6298	1,6298	1,6299	1,6298	1,6298
20	1,6325	1,63	1,6296	1,6296	1,6297	1,6297	1,6296	1,6295
50	1,6319	1,6295	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291
70	1,6319	1,6295	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291
90	1,6319	1,6295	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291
200	1,6319	1,6295	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291
7000	1,6319	1,6295	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291	1,6291

Observa-se das tabelas 4.4, 4.5 e 4.6, excelentes taxas de convergência em quatro algarismos significativos para todas as posições axiais consideradas. Esta melhora da convergência dos resultados em relação as posições iniciais do canal é atribuída aos efeitos do parâmetro viscoelástico de terceiro grau. Nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 os valores da componente de velocidade U foram calculados com  $K_3 = 0$ , e os

efeitos do parâmetro viscoelástico do segundo grau, somados aos efeitos difusivos determinaram uma baixa taxa de convergência nas posições iniciais. Com  $K_3 = 1.10^{-5}$ , mantendo-se os mesmos valores de  $K_1$ , os resultados mostrados nas tabelas 4.4, 4.5 e 4.6 indicam que a influência do parâmetro de terceiro grau oblitera os outros efeitos presentes no escoamento, ou seja, viscoelasticidade, difusão e injeção e sucção simultânea, principalmente na região de entrada.

Deve-se salientar que os resultados apresentados nas tabelas de convergência foram calculados para situações limites dos parâmetros de estudo, com objetivo de testar a potencialidade do código desenvolvido, atendendo as recomendações citadas na literatura para os valores assumidos dos parâmetros.

A seguir, mostram-se gráficos dos perfis de velocidade da componente U para os vários parâmetros de estudo do presente capítulo. Inicialmente, a figura 4.3 mostra uma comparação entre os resultados gerados pelo código desenvolvido e o trabalho de ARIEL (2003) na região completamente desenvolvida de um fluido newtoniano sujeito a injeção e sucção simultânea.

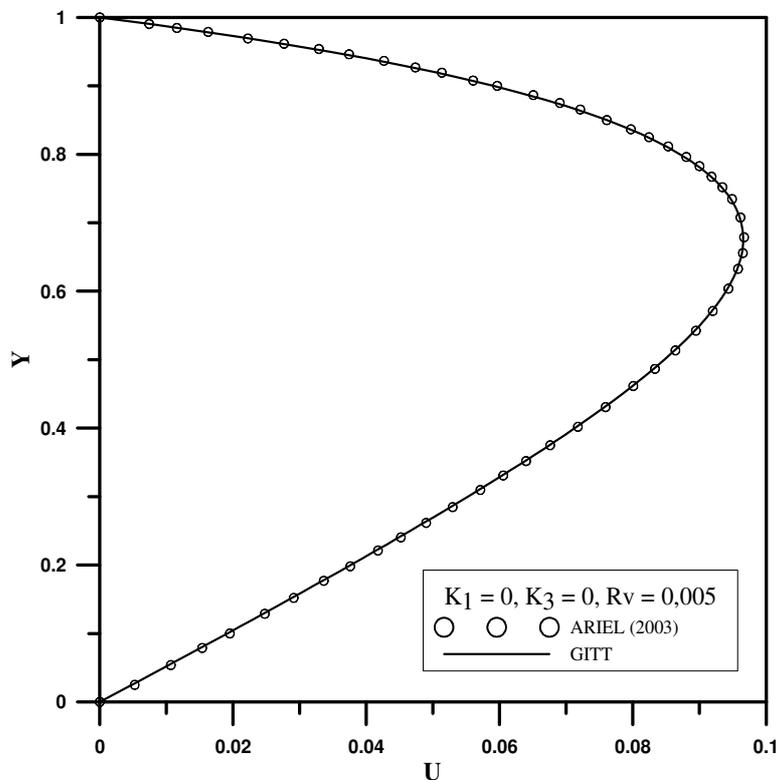


Figura 4.3 - Comparação entre o perfil de velocidade completamente desenvolvido obtido pela GITT e o trabalho de ARIEL (2003) para o caso newtoniano e  $R_v = 0,005$ .

A figura 4.3 mostra que os resultados obtidos pela GITT estão em perfeito acordo com a literatura disponível para o caso newtoniano. Além disso, observa-se que a injeção de fluido na parede inferior do canal e sucção na parede superior desloca o valor máximo de  $U$ .

A figura 4.4 mostra os perfis de velocidade desde a região de entrada do canal até a região completamente desenvolvida. Nestes perfis, mostra-se a influência do parâmetro viscoelástico do fluido de segundo grau para uma determinada condição de injeção e sucção, sem considerar os efeitos do parâmetro de terceiro grau. Vale ressaltar que o comprimento de entrada na região completamente desenvolvida é afetada pela influência do parâmetro viscoelástico do segundo grau e também pela injeção e sucção simultâneas, isto pode ser observado nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3. Para  $K_1 = 0,0001$ ,  $K_3 = 0$  e  $Rv = 0,001$  o comprimento de entrada se encontra na faixa de  $50 < X < 70$ , no caso de  $K_1 = 0,0003$ ,  $K_3 = 0$  e  $Rv = 0,01$  o comprimento de entrada fica na faixa de  $70 < X < 90$ .

Observa-se também na figura 4.4 que o efeito do parâmetro viscoelástico de segundo grau tem influência marcante nos perfis de velocidade nas posições iniciais do canal e a medida que o escoamento se desenvolve este efeito desaparece. Esta observação, em primeira análise, contrapõe as conclusões de ARIEL (2002), que afirma que tal parâmetro tem influência significativa na região de escoamento completamente desenvolvido. O autor obteve seus resultados usando uma formulação na região de escoamento completamente desenvolvido para altas taxas de injeção e sucção simultânea e um intervalo de parâmetro  $K_1$  considerável ( $K_1 = 0$  a  $K_1 = 1$ ). Entretanto, o uso de valores altos para  $K$ , em uma formulação de camada limite para escoamento interno, parece um pouco fora da realidade física, uma vez que, tal formulação é baseada numa aproximação onde a mesma se torna mais válida a medida que número de Reynolds aumenta. Na literatura sobre camada limite para fluidos viscoelásticos de segundo grau, podem-se destacar os trabalhos de PAKDEMIRLI (1994) que afirma que este parâmetro necessita ser da ordem do inverso do número de Reynolds e WALTERS (1970) que cita a formulação em camada limite ser válida para fluidos levemente elásticos. Estes dois últimos autores realizaram suas análises para escoamento externo. A análise presente é escoamento interno. A utilização da formulação em camada limite para estudar escoamento laminar em regiões de entrada de dutos necessita ter números

de Reynolds muito maior que a unidade, porém menor que  $Re = 2300$ , onde inicia a zona de transição para o escoamento turbulento. Este valor do número de Reynolds no escoamento interno necessariamente determina um valor baixo para  $K_1$ , se considerarmos o trabalho de PAKDEMIRLI (1994) e WALTERS (1970). No caso do escoamento externo, a zona de transição de escoamento laminar para turbulento acontece para  $Re = 60000$ , isto determina o uso de  $K_1$  mais altos, o que está de acordo com a teoria de RAJAGOPAL *et al.* (1983) já apresentada e as observações de PAKDEMIRLI (1994) e WALTERS (1970). Podem-se destacar também os resultados obtidos no primeiro problema, que embora as formulações não dependessem do número de Reynolds, mas o escoamento é laminar e externo, e admitiram valores de  $K_1$  mais altos.

A influência do parâmetro viscoelástico de segundo grau na região de entrada, se deve ao efeito da tensão normal presente neste tipo de fluido. Outra marcante observação que se verifica na posição  $X = 1$  é que, com o aumento de  $K_1$ , o efeito de injeção e sucção simultânea praticamente desaparece, ou seja, os consideráveis gradientes de velocidade que ocorrem nas paredes do canal são anulados pela presença da viscoelasticidade do fluido.

Embora os efeitos de injeção e sucção simultânea não se pronunciarem na região de entrada, tais efeitos podem ser observados a medida que o escoamento se desenvolve. Nas posições  $X = 120$  e  $X = 1000$ , é perfeitamente visível que o perfil de velocidade se distorce, ou seja, a injeção de fluido na parede inferior e sucção na parede superior simultâneas causam este tipo de efeito.

As observações realizadas sobre os resultados mostrados na figura 4.4 são para um fluido de segundo grau, embora o efeito que se objetiva investigar neste capítulo é o efeito devido ao fluido de terceiro grau. Isto se justifica devido tal fluido ser bastante investigado, e muitas vezes utilizado para testar técnicas analíticas, numéricas e híbridas de solução de escoamento de fluidos viscoelásticos. Além disso, os efeitos de tensão normal que aparecem em um fluido de terceiro grau são devidos aos gradientes de velocidade que caracterizam o fluido de segundo grau.

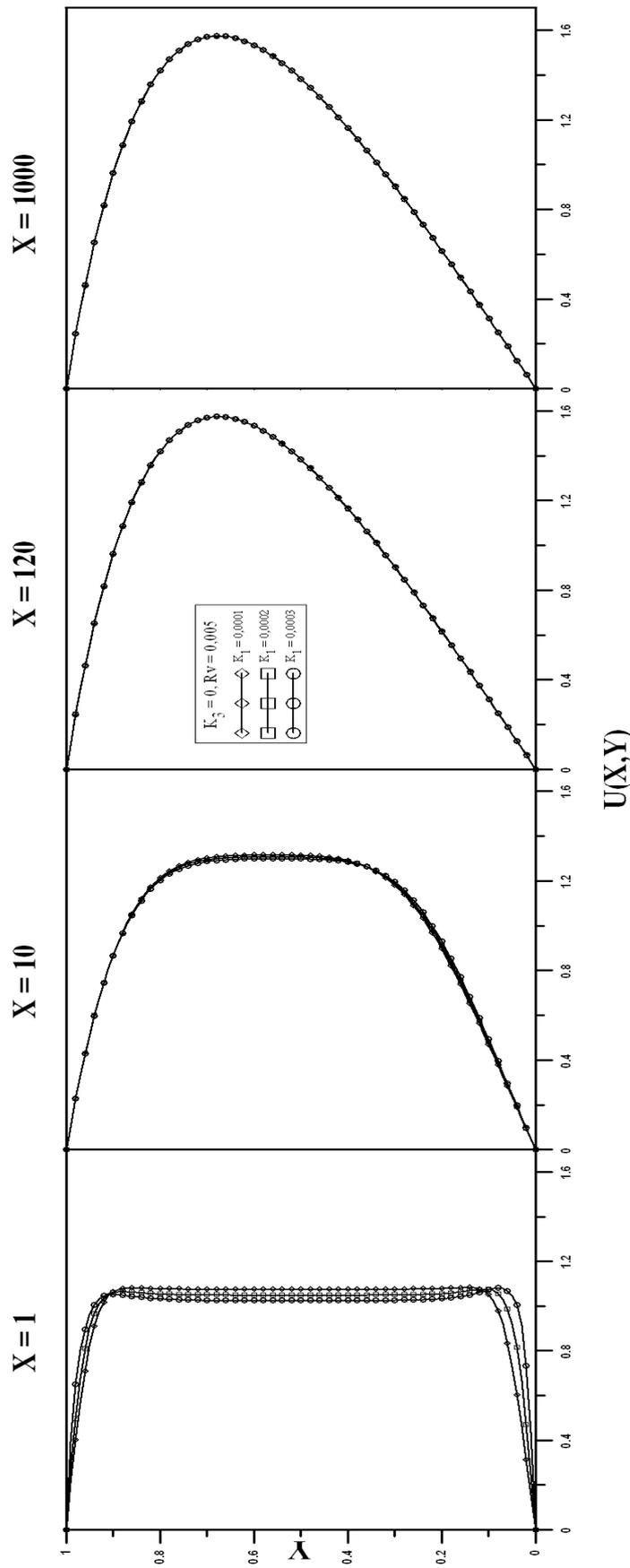


Figura 4.4 - Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores do parâmetro viscoelástico  $K_1$ , com  $K_3 = 0$  e  $Rv = 0,005$ .

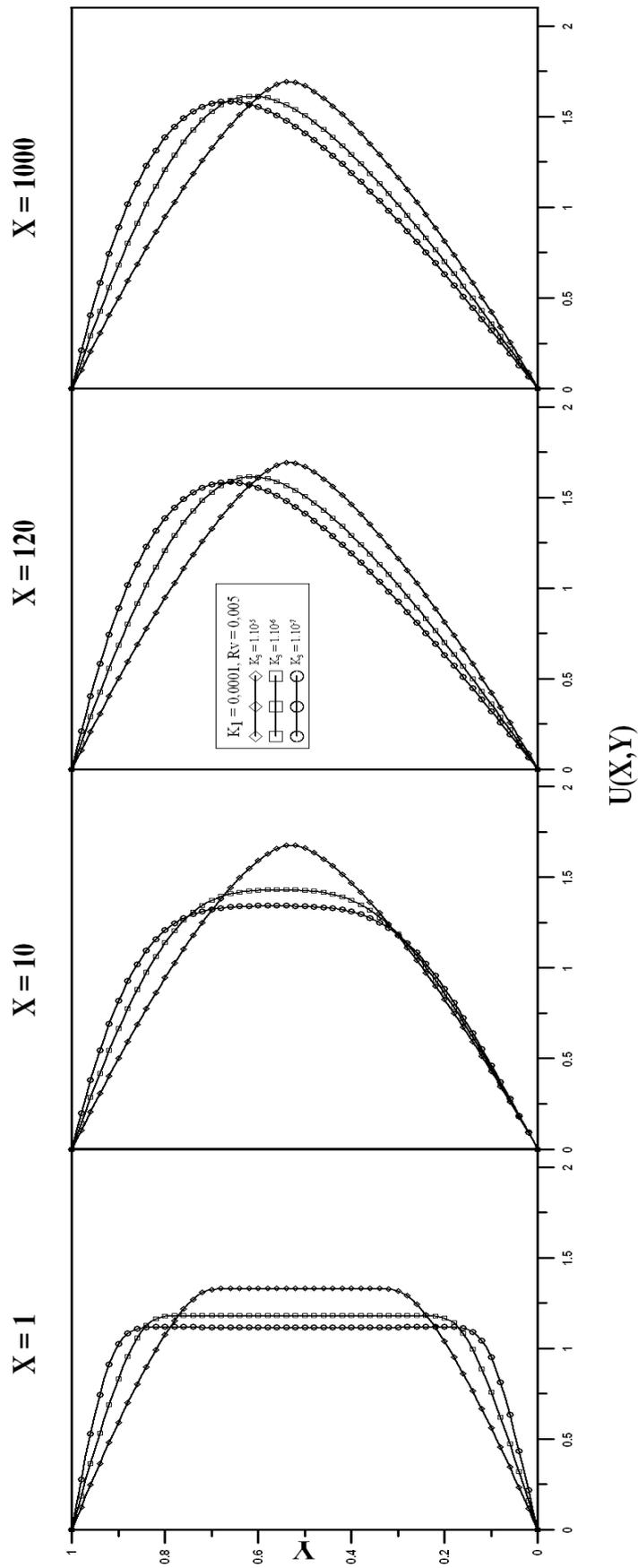


Figura 4.5 - Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores do parâmetro viscoelástico  $K_3$ , com  $K_1 = 0,0001$  e  $Rv = 0,005$ .

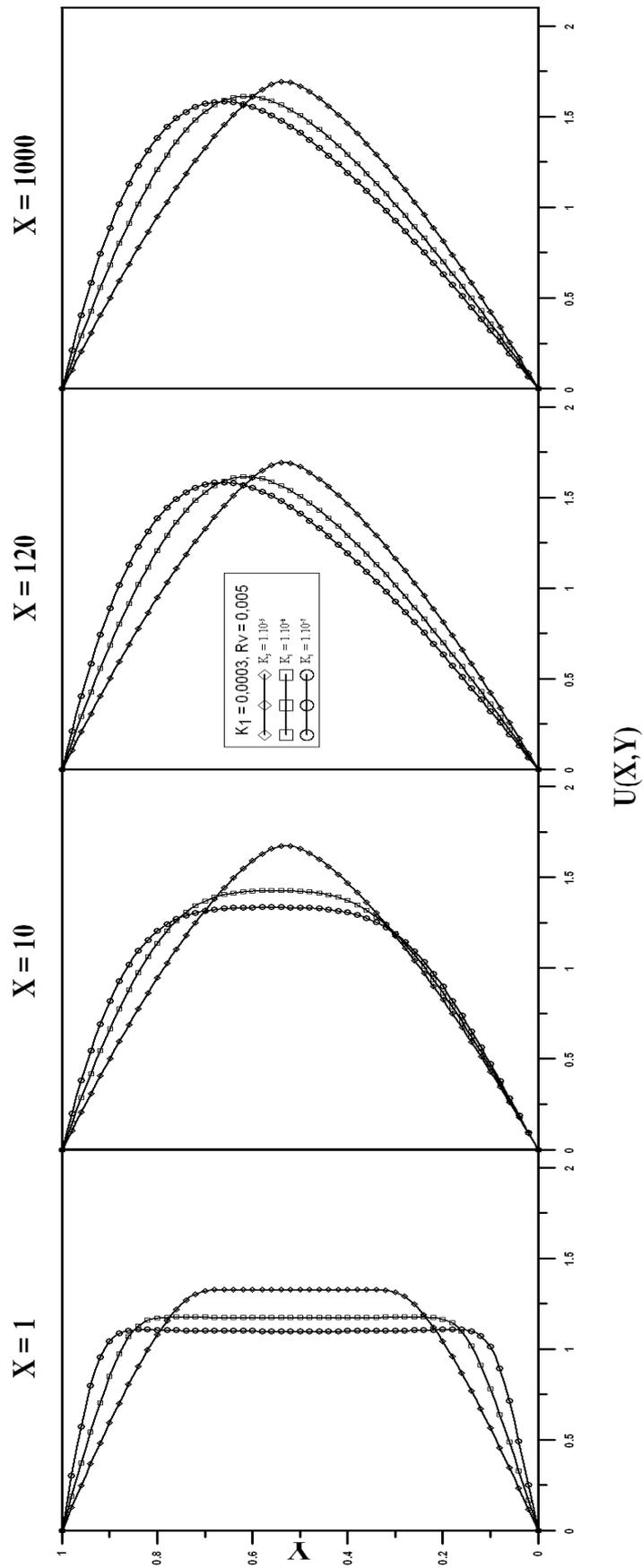


Figura 4.6 - Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores do parâmetro viscoelástico  $K_3$ , com  $K_1 = 0,0003$  e  $Rv = 0,005$ .

As figuras 4.5 e 4.6 mostram os perfis de velocidade desde a região de entrada do canal até a região completamente desenvolvida. Nestes perfis mostram-se a influência do parâmetro viscoelástico do fluido de terceiro grau para uma determinada condição de injeção e sucção, com  $K_1$  assumindo dois valores distintos.

Observa-se da figura 4.5, uma marcante influência do parâmetro viscoelástico de terceiro grau nos perfis de velocidade, tanto na região de entrada do canal, quanto na região completamente desenvolvida. Na posição  $X = 1$ , nota-se que o perfil de velocidade tende ao caso newtoniano com injeção e sucção simultânea a medida que o valor do parâmetro de terceiro grau diminui. Esta característica se mantém até a região completamente desenvolvida. Outro efeito marcante notado na figura 4.5 é quando  $K_3 = 1.10^{-5}$ , pois as influências da injeção e sucção simultâneas praticamente não são notadas. Isto é atribuído ao efeito dilatante que este tipo de fluido modela e mostra-se muito maior em ordem de magnitude, que os efeitos devido ao parâmetro viscoelástico de segundo grau, efeitos difusivos e injeção ou sucção. Por outro lado, quando este valor torna-se menor, principalmente, os efeitos devido a injeção e sucção são notados.

Na figura 4.6 os efeitos do parâmetro viscoelástico do fluido de terceiro grau são praticamente os mesmos observados na figura 4.5. Porém na região de entrada, na posição  $X = 1$  é possível notar uma sensível influência do parâmetro  $K_1$ , principalmente quando  $K_3$  assume valores menores. Portanto na entrada do canal, os efeitos do parâmetro viscoelástico do segundo grau parecem assumir a mesma ordem de magnitude que o parâmetro viscoelástico de terceiro grau.

Tanto a figura 4.5 quanto a 4.6 mostram que o aumento de valor do parâmetro  $K_3$  tende a obliterar os efeitos difusivos, efeitos devido ao parâmetro  $K_1$  e efeitos de injeção e sucção simultâneas.

A figura 4.7 mostra a influência do parâmetro de injeção e sucção simultâneas nos perfis de velocidade para  $K_1$  e  $K_3$  constantes. Isto se faz necessário em virtude da característica apresentada nas análises anteriores do parâmetro  $K_3$  em obliterar os efeitos de injeção e sucção no canal.

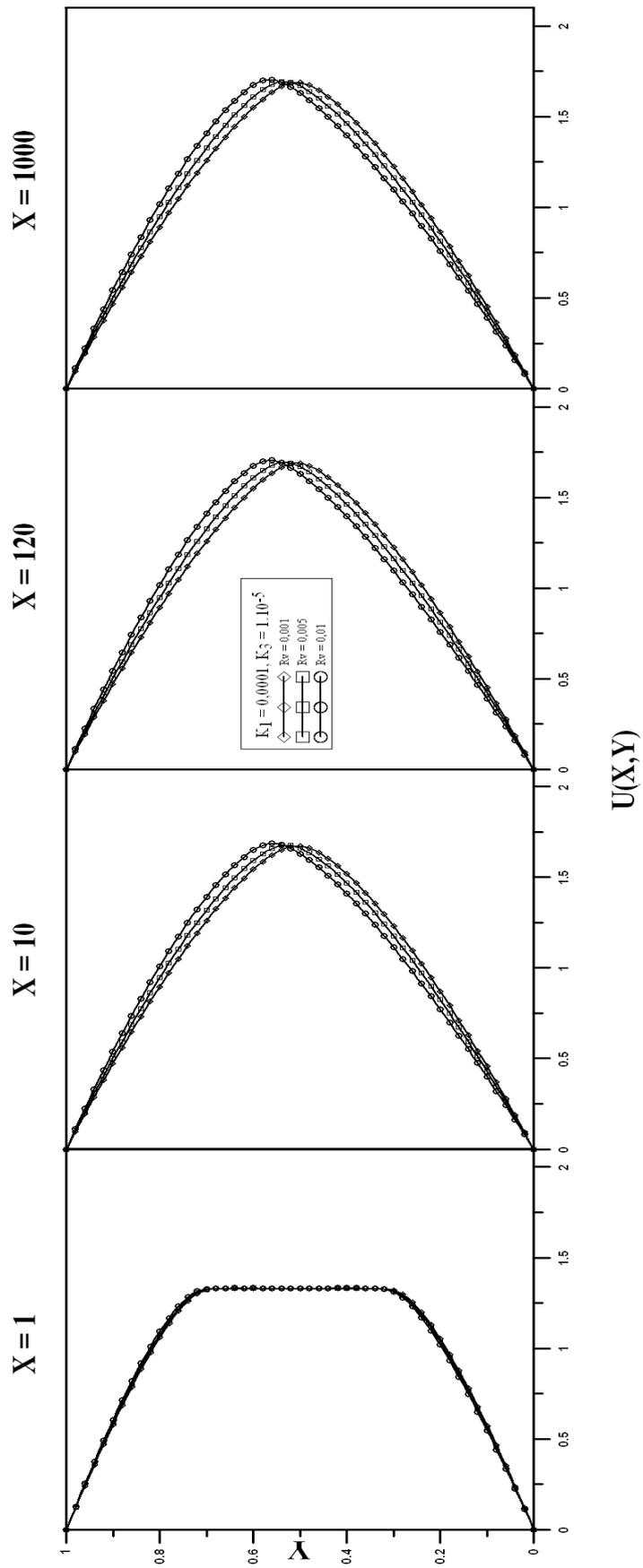


Figura 4.7 - Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de injeção e sucção simultânea, com  $K1 = 0,0001$  e  $K3 = 1.10^{-5}$ .

Observa-se da figura 4.7 que há influência significativa do parâmetro  $K_3$  nos efeitos sobre os perfis de velocidade submetidos a injeção e sucção simultâneas, pois para alta taxa de injeção e sucção ( $Rv = 0,01$ ), era esperado que tanto na região de entrada quanto na região completamente desenvolvida do canal, perfis de velocidades mais acentuados na parede superior do canal fossem verificados. Isto confirma que, para altos valores de  $K_3$ , o efeito difusivo, efeito devido a  $K_1$  e injeção e sucção simultâneas tendem a desaparecer.

Os resultados aqui discutidos foram baseados em injeção na parede inferior e sucção na parede superior do canal. Portanto não se faz necessário a situação inversa, pois as conclusões serão as mesmas, tendo em vista que há uma velocidade transversal constante atravessando o canal.

#### **4.4.2-CAMPO DE TEMPERATURA**

Como realizado para o campo de velocidade, inicialmente, uma análise de convergência dos resultados para o campo de temperatura será conduzida. Estes resultados foram obtidos para diversas situações de números de Prandtl, números de Eckert, parâmetros viscoelásticos de fluidos de segundo e terceiro grau e taxas de injeção e sucção simultâneas no canal.

Em virtude da quantidade de parâmetros investigados ser relativamente grande, somente serão apresentadas as tabelas de convergência para situações limites. Com isso, é possível visualizar a potencialidade do código desenvolvido e em seguida mostrar os resultados graficamente.

Tabela 4.7 – Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 0,8$ ,  $Ec = 0$ ,  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1.10^{-5}$  e vários valores de  $Rv$ .

<b><math>Rv = 0,001</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	0,9988	0,9994	0,9996	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
10	0,9961	0,9963	0,9964	0,9965	0,9965	0,9965	0,9965	0,9965
20	0,9566	0,9567	0,9567	0,9567	0,9567	0,9566	0,9566	0,9566
50	0,7479	0,7480	0,7479	0,7479	0,7478	0,7478	0,7478	0,7478
70	0,6232	0,6233	0,6233	0,6232	0,6232	0,6231	0,6231	0,6231
90	0,5187	0,5188	0,5188	0,5188	0,5187	0,5187	0,5187	0,5187
200	0,1890	0,1890	0,1890	0,1890	0,1890	0,1890	0,1890	0,1890
7000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b><math>Rv = 0,005</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	0,9990	0,9993	0,9996	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
10	0,9938	0,9937	0,9939	0,9939	0,9939	0,9939	0,9939	0,9939
20	0,9327	0,9326	0,9327	0,9326	0,9326	0,9325	0,9325	0,9325
50	0,6554	0,6553	0,6553	0,6552	0,6552	0,6552	0,6552	0,6551
70	0,5080	0,5079	0,5080	0,5079	0,5079	0,5078	0,5078	0,5078
90	0,3938	0,3937	0,3938	0,3937	0,3937	0,3937	0,3937	0,3937
200	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976	0,0976	0,0975
7000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
<b><math>Rv = 0,01</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	0,9996	0,9992	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999
10	0,9842	0,9833	0,9838	0,9836	0,9836	0,9836	0,9836	0,9836
20	0,8525	0,8518	0,8522	0,8520	0,8520	0,8519	0,8519	0,8519
50	0,4264	0,4259	0,4261	0,4260	0,4260	0,4259	0,4259	0,4259
70	0,2640	0,2636	0,2638	0,2636	0,2636	0,2636	0,2636	0,2636
90	0,1641	0,1639	0,1640	0,1640	0,1640	0,1639	0,1639	0,1639
200	0,0123	0,0123	0,0123	0,0123	0,0123	0,0123	0,0123	0,0123
7000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

A tabela 4.7 mostra em todas as posições axiais consideradas no canal, uma excelente convergência para a temperatura em três algarismos significativos, a partir de  $NV = 32$ , para taxas de injeção  $Rv = 0,001$  e  $Rv = 0,005$ . Para  $Rv = 0,01$ , esta convergência acontece a partir de  $NV = 36$ . Isto implica que o aumento do valor de injeção e sucção simultânea tornou o sistema mais rígido quando  $Rv$  assumiu um valor

maior, ou seja,  $R_v = 0,01$ . No entanto, a precisão dos resultados encontrados em termos de engenharia são valores excelentes.

Tabela 4.8 – Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 0,8$ ,  $Ec = 0,2$ ,  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1.10^{-5}$  e vários valores de  $R_v$ .

<b><math>R_v = 0,001</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	0,9992	0,9990	0,9997	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
10	1,0039	1,0035	1,0038	1,0038	1,0038	1,0038	1,0038	1,0039
20	1,0026	1,0020	1,0022	1,0021	1,0021	1,0021	1,0021	1,0021
50	0,9266	0,9260	0,9262	0,9261	0,9260	0,9260	0,9260	0,9260
70	0,8758	0,8752	0,8754	0,8753	0,8753	0,8752	0,8753	0,8753
90	0,8330	0,8324	0,8326	0,8325	0,8325	0,8325	0,8325	0,8325
200	0,6978	0,6972	0,6974	0,6973	0,6973	0,6973	0,6973	0,6973
7000	0,6204	0,6197	0,6200	0,6198	0,6198	0,6199	0,6199	0,6199
<b><math>R_v = 0,005</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	0,9995	0,9989	0,9997	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998
10	1,0038	1,0030	1,0035	1,0033	1,0034	1,0034	1,0034	1,0035
20	0,9854	0,9845	0,9849	0,9847	0,9847	0,9848	0,9848	0,9848
50	0,8365	0,8354	0,8358	0,8356	0,8356	0,8356	0,8356	0,8356
70	0,7531	0,7520	0,7524	0,7522	0,7522	0,7522	0,7522	0,7522
90	0,6886	0,6874	0,6878	0,6876	0,6876	0,6876	0,6876	0,6876
200	0,5215	0,5204	0,5207	0,5205	0,5205	0,5206	0,5206	0,5206
7000	0,4666	0,4654	0,4657	0,4655	0,4656	0,4656	0,4656	0,4656
<b><math>R_v = 0,01</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0002	0,9987	0,9998	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9998
10	1,0012	0,9992	1,0001	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
20	0,9226	0,9207	0,9216	0,9212	0,9213	0,9213	0,9214	0,9214
50	0,6038	0,6019	0,6026	0,6021	0,6022	0,6022	0,6023	0,6023
70	0,4797	0,4778	0,4784	0,4780	0,4780	0,4781	0,4781	0,4781
90	0,4036	0,4018	0,4023	0,4019	0,4020	0,4020	0,4020	0,4020
200	0,2882	0,2865	0,2869	0,2866	0,2866	0,2866	0,2866	0,2866
7000	0,2788	0,2772	0,2775	0,2772	0,2772	0,2772	0,2773	0,2773

A tabela 4.8 mostra o mesmo comportamento em termos de taxa de convergência da tabela 4.7. Isto mostra, também, que a mudança do valor do número de Eckert, mantendo-se  $Pr$ ,  $K_1$ ,  $K_3$ ,  $R_v$  constantes não influenciou a taxa de convergência.

As excelentes taxas de convergência apresentada nas tabelas 4.7 e 4.8 são atribuídas, principalmente, as excelentes convergências do campo de velocidade, uma vez que a equação do campo de temperatura é dependente do campo de velocidade. Também não foi verificada baixa taxa de convergência do potencial no centro do canal e na posição axial mais próxima da entrada adotada,  $X = 1$ .

A seguir mostram-se o comportamento da taxa de convergência para  $Pr = 50$ ,  $K_1$  e  $K_3$  constantes,  $Ec$  variável e vários valores de  $Rv$ .

Tabela 4.9 – Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 50$ ,  $Ec = 0$ ,  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1.10^{-5}$  e vários valores de  $Rv$ .

<b><math>Rv = 0,0001</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	0,9974	0,9987	0,9995	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
10	0,9993	0,9995	0,9996	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
20	0,9993	0,9995	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
50	0,9994	0,9993	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
70	0,9993	0,9993	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
90	0,9993	0,9993	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
200	0,9992	0,9993	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
7000	0,2533	0,2533	0,2533	0,2533	0,2533	0,2533	0,2533	0,2532
<b><math>Rv = 0,000001</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	0,9974	0,9987	0,9995	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
10	0,9993	0,9996	0,9996	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
20	0,9992	0,9996	0,9996	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
50	0,9991	0,9995	0,9996	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
70	0,9990	0,9994	0,9996	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
90	0,9989	0,9994	0,9996	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
200	0,9988	0,9994	0,9996	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
7000	0,4321	0,4322	0,4321	0,4321	0,4321	0,4321	0,4320	0,4320

A tabela 4.9 mostra uma excelente convergência em três algarismos significativos para todas as posições axiais analisadas no canal. No entanto, para altas taxas de injeção e sucção simultâneas com altos número de  $Pr$ , o código desenvolvido tornou-se extremamente rígido e a simulação tornou-se inviável em termos de custo computacional. Por isso, os resultados apresentados nas tabelas 4.9 e 4.10 foram obtidos

para taxas de injeção e sucção mais modestas,  $R_v = 0,0001$  e  $R_v = 0,000001$ . Isto não tira a potencialidade do código desenvolvido, apenas limita a condição de injeção e sucção aplicada à fluidos que apresentam viscosidade moderada, ou seja, fluidos com  $Pr$  não muito maior que a unidade. Na discussão a seguir, resultados na forma de gráficos, dos perfis de temperatura são apresentados para  $Pr = 10$  e altas taxa de injeção e sucção simultânea.

Tabela 4.10 – Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 50$ ,  $Ec = 0,2$ ,  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1.10^{-5}$  e vários valores de  $R_v$ .

<b><math>R_v = 0,0001</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0027	0,9954	1,0015	0,9987	0,9990	0,9992	0,9995	0,9996
10	1,0146	0,9942	1,0017	0,9982	0,9986	0,9989	0,9991	0,9993
20	1,0226	0,9927	1,0038	0,9978	0,9985	0,9990	0,9993	0,9995
50	1,0330	0,9944	1,0096	1,0022	1,0031	1,0036	1,0040	1,0043
70	1,0390	0,9994	1,0153	1,0078	1,0087	1,0092	1,0096	1,0099
90	1,0468	1,0065	1,0227	1,0152	1,0161	1,0166	1,0170	1,0173
200	1,1185	1,0763	1,0931	1,0854	1,0863	1,0869	1,0873	1,0875
7000	21,9535	21,9012	21,9228	21,9131	21,9142	21,9149	21,9154	21,9158
<b><math>R_v = 0,000001</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
1	1,0027	0,9954	1,0015	0,9987	0,9990	0,9992	0,9995	0,9996
10	1,0145	0,9943	1,0016	0,9982	0,9986	0,9989	0,9991	0,9993
20	1,0224	0,9930	1,0037	0,9979	0,9986	0,9990	0,9993	0,9995
50	1,0321	0,9948	1,0094	1,0023	1,0031	1,0037	1,0040	1,0043
70	1,0378	0,9998	1,0150	1,0079	1,0087	1,0092	1,0096	1,0098
90	1,0451	1,0069	1,0223	1,0152	1,0160	1,0165	1,0169	1,0171
200	1,1144	1,0755	1,0910	1,0839	1,0848	1,0853	1,0856	1,0859
7000	23,6272	23,5877	23,6026	23,5954	23,5962	23,5966	23,5970	23,5972

Na tabela 4.10 verifica-se uma baixa taxa de convergência nas posições iniciais do canal, pois três dígitos significativos são alcançados a partir de  $NV = 44$ , para as duas situações de  $R_v$  adotada. Nota-se também que, nas posições axiais mais próximas do escoamento completamente desenvolvido, a convergência em três dígitos significativos é alcançada a partir de  $NV = 40$ . Portanto, o escoamento com combinação de número de  $Pr$  elevado com injeção e sucção simultânea determinou baixas taxas de convergência nos resultados para o potencial de temperatura na entrada do canal.

As figuras a seguir mostram o comportamento dos perfis de temperatura em função dos parâmetros de interesse. Inicialmente, as figuras 4.8 e 4.9 mostram o efeito do número de Pr nos perfis para  $K_1$ ,  $K_3$ ,  $R_v$  constantes e  $Ec$  variável.

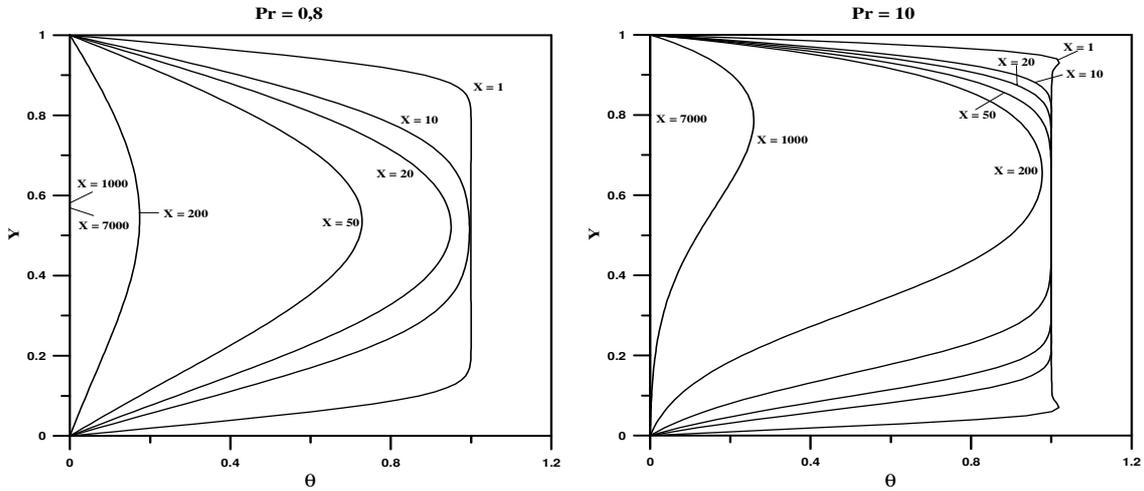


Figura 4.8 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1. 10^{-7}$ ,  $Ec = 0$ ,  $R_v = 0,001$ , variando Pr.

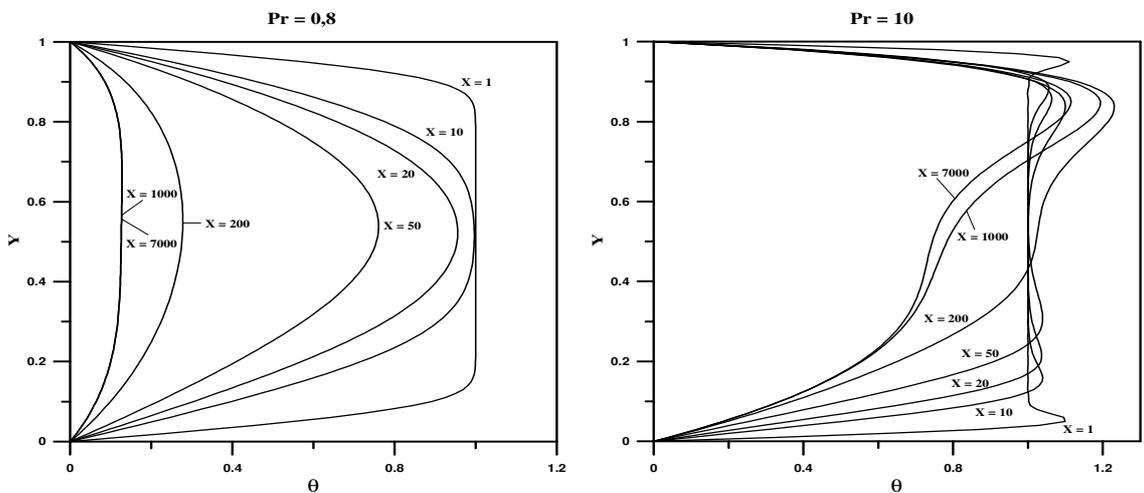


Figura 4.9 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1. 10^{-7}$ ,  $Ec = 0,2$ ,  $R_v = 0,001$ , variando Pr.

A figura 4.8 mostra que o aumento do número de Pr com  $Ec = 0$  determinou gradientes de temperatura mais pronunciados na região próximo às paredes e na entrada do canal. Nota-se, também, que a medida que o escoamento se desenvolve estes gradientes diminuem nas proximidades do contorno, a intensidade desta diminuição é mais pronunciada na parede submetida a injeção. Salienta-se que os efeitos observados

nos perfis de temperatura mostrado na figura 4.8 são devidos exclusivamente a convecção e difusão, pois  $Ec = 0$ . Quando,  $Ec = 0,2$  e  $Pr = 10$ , como mostrado na figura 4.9, não se notou acréscimos significativos de temperatura na entrada do canal. Por outro lado, à medida que o escoamento se desenvolve, nota-se um aumento de temperatura significativo em relação a unidade. Isto demonstra que o dual número de Pr elevado com  $Ec$  elevado possui alta significância no escoamento de fluido de terceiro grau, ou seja, a dissipação viscosa não deve ser desprezada no escoamento deste tipo de fluido, pois geralmente são bastante viscosos. Salienta-se também que o efeito da dissipação viscosa é acompanhado dos efeitos elásticos para  $K_1$ ,  $K_3$  e  $Ec$  diferentes de zero, ou seja, os perfis de temperatura mostrados na figura 4.9 também são afetados pela elasticidade do fluido.

Observa-se nas figuras 4.8 e 4.9 na posição  $X = 1$ , próximo aos contornos, uma perturbação no perfil de temperatura. *A priori* isto é causado por falta de convergência do potencial de temperatura próximo as paredes, pois a equação da energia é dependente da solução do potencial função corrente, que é incorporado na equação da quantidade de movimento após aplicação da definição de função corrente, e este potencial apresenta dificuldade de convergência nas regiões onde os gradientes de velocidade são mais pronunciados: próximo aos contornos e região de entrada. Vale salientar que a medida que o potencial de temperatura vai se afastando dos contornos, melhores taxas de convergência são conseguidas, isto é demonstrado nos resultados apresentados na tabelas 4.7 e 4.8.

Outra possibilidade que pode explicar tal perturbação é a utilização do filtro sem considerar a não linearidade imposta pela presença do termo elástico do fluido de terceiro grau. Isto pressupõe um aumento dos números de termos na série com objetivo de melhorar a convergência dos potenciais. No entanto, para o presente trabalho isto não foi possível, pois o aumento do número de termos implicou em custo computacional muito alto, o que inviabilizou o cálculo.

As dificuldades de convergência são verificadas principalmente nas regiões de entrada e contorno, que para este tipo de problema já era esperado. Entretanto, no presente trabalho são apresentados resultados que do ponto de vista da engenharia

aplicada são bastante relevantes, tendo em vista que muitas vezes o que se quer é entender o que acontece com o perfil de velocidade e temperatura de forma qualitativa.

As figuras 4.10 e 4.11 mostram o efeito do número de  $Ec$  mantendo-se constante os valores de  $K_1$ ,  $K_3$ ,  $Pr$  e  $Rv$  variável.

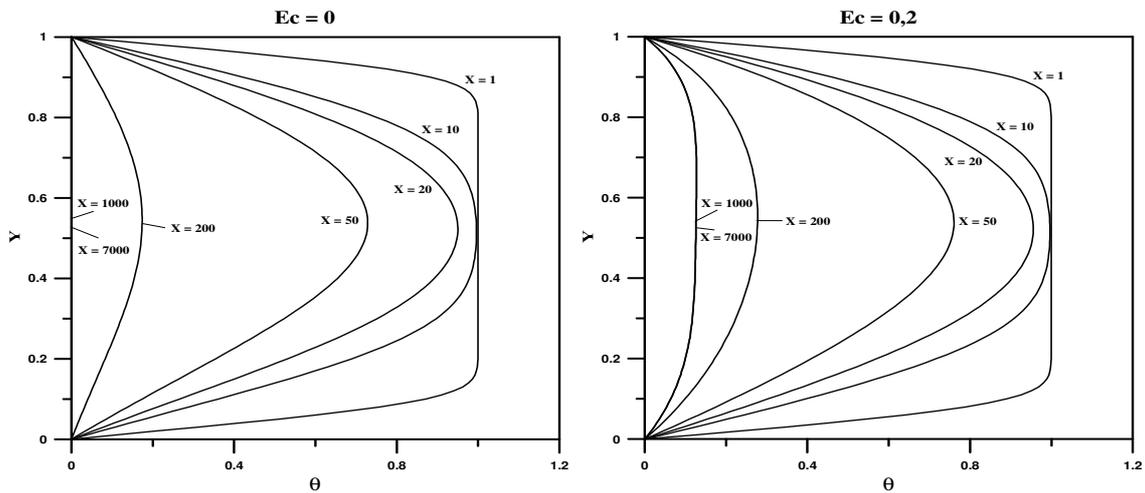


Figura 4.10 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1 \cdot 10^{-7}$ ,  $Pr = 0,8$ ,  $Rv = 0,001$ , variando  $Ec$ .

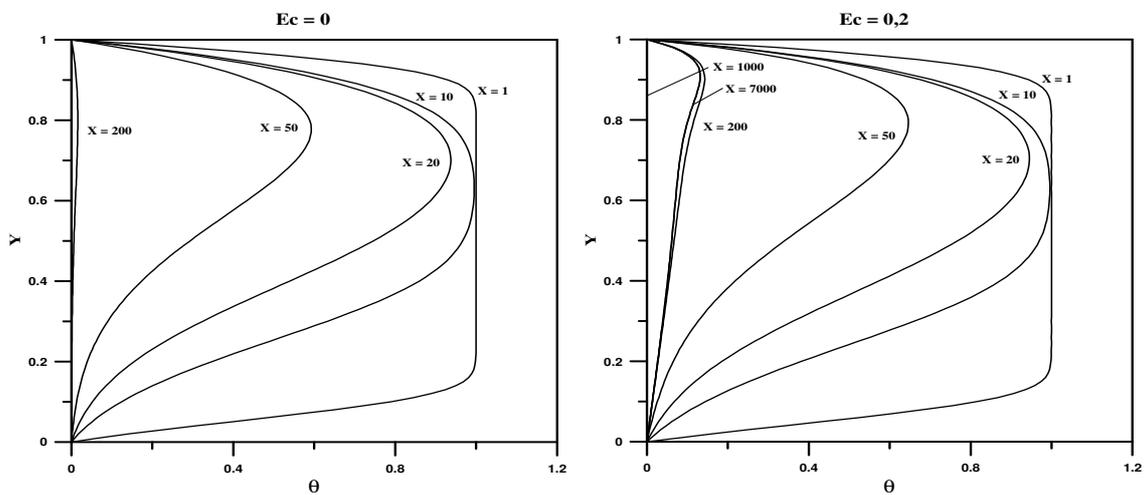


Figura 4.11 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1 \cdot 10^{-7}$ ,  $Pr = 0,8$ ,  $Rv = 0,01$ , variando  $Ec$ .

Fica evidente nas figuras 4.10 e 4.11, que o aumento do número de  $Ec$ , mesmo para um número de  $Pr$  pequeno, não pode ser desprezado. Os efeitos de dissipação viscosa e elástica são verificados principalmente nas posições mais afastadas da entrada

do canal. Quando  $Ec = 0$  o perfil de temperatura praticamente desaparece a partir da posição  $X = 1000$ , indicando que o fluido entrou em equilíbrio térmico com a temperatura das paredes do canal. Quando  $Ec = 0,2$  os perfis indicam que o fluido possui uma determinada quantidade de calor na posição mais afastada do canal, nas duas situações de injeção e sucção simultâneas adotadas. Na região de entrada do canal não se verificaram grandes influências do número de Eckert.

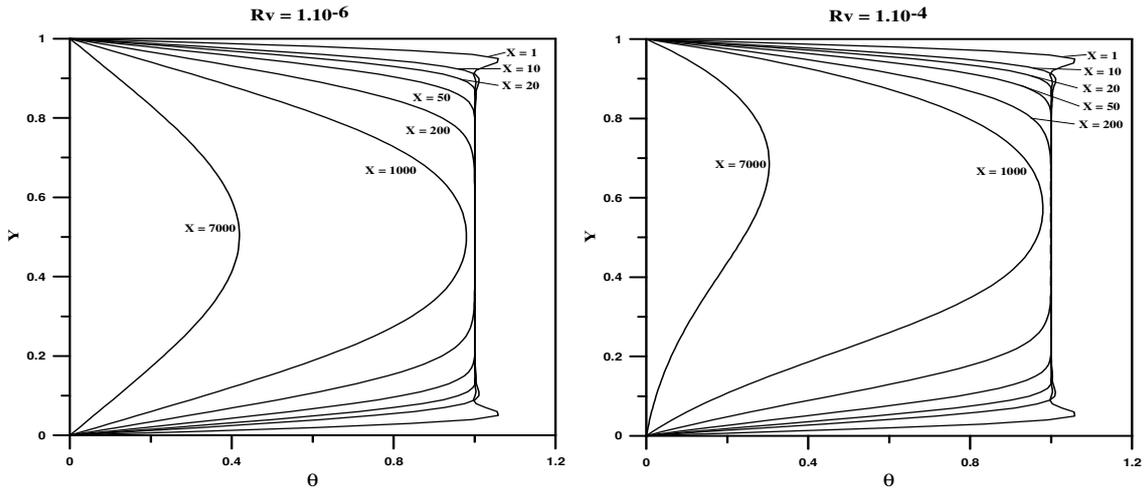


Figura 4.12 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1. 10^{-7}$ ,  $Pr = 50$ ,  $Ec = 0$ , variando  $Rv$ .

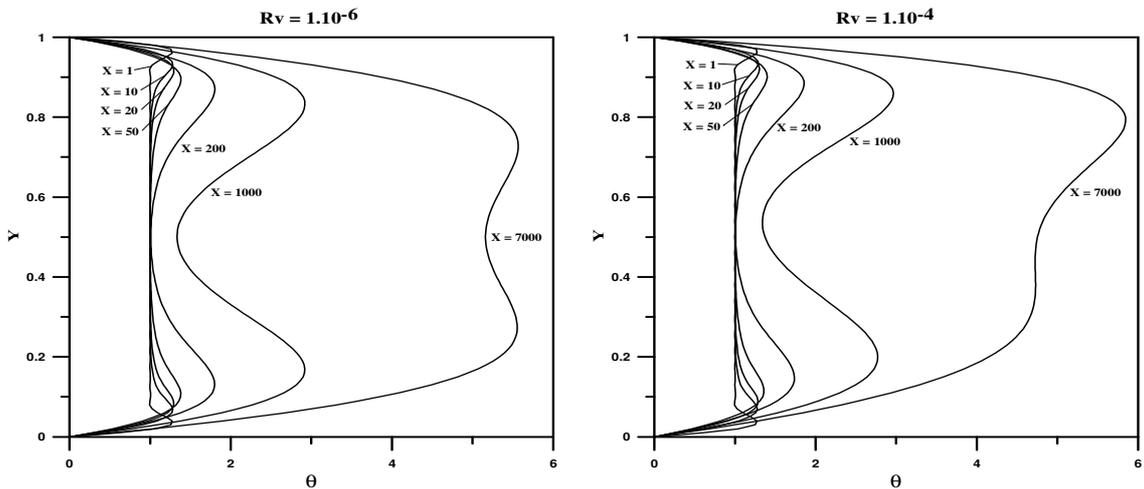


Figura 4.13 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0002$ ,  $K_3 = 1. 10^{-7}$ ,  $Pr = 50$ ,  $Ec = 0,2$ , variando  $Rv$ .

Nas figuras 4.12 e 4.13 é analisada a influência da taxa de injeção e sucção simultâneas no canal. Na região de entrada do canal praticamente não se percebe tal

efeito, no entanto nas posições mais afastadas da entrada do canal, percebe-se que os perfis de temperatura são deslocados para cima, quando se aumenta o valor de  $R_v$ . Na verdade, em todos os perfis analisados fica evidente a influência da injeção e sucção simultâneas. Estas figuras também reforçam mais uma vez que a dissipação viscosa não pode ser desprezada quando há escoamento de um fluido muito viscoso, pois com  $Pr = 50$ , e  $Ec = 0,2$  os níveis de temperatura ficarão muito acima da unidade, principalmente, na região de escoamento completamente desenvolvido.

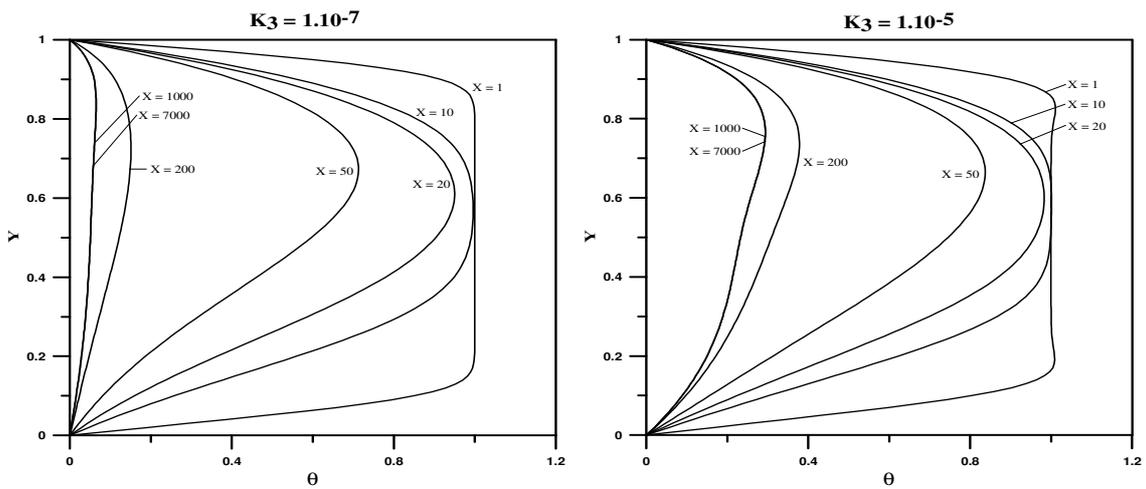


Figura 4.14 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0002$ ,  $Pr = 0,8$ ,  $Ec = 0,1$ ,  $R_v = 0,005$ , variando  $K_3$ .

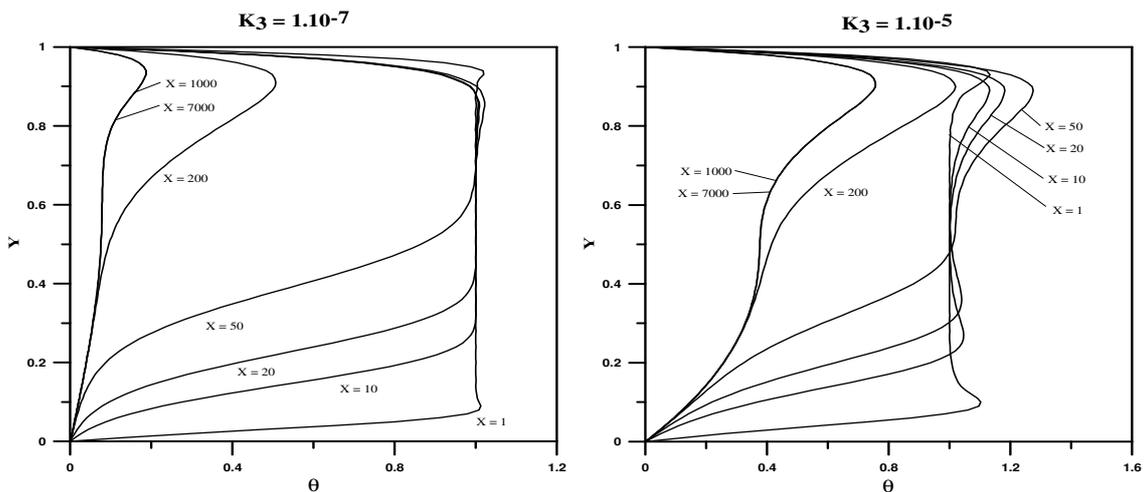


Figura 4.15 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0002$ ,  $Pr = 5$ ,  $Ec = 0,1$ ,  $R_v = 0,005$ , variando  $K_3$ .

As figuras 4.14 e 4.15 mostram os efeitos dos parâmetros viscoelásticos do fluido de segundo e terceiro grau mantendo-se constante os valores de  $K_1$ ,  $Ec$ ,  $Rv$  e  $Pr$  variável. Nota-se destas figuras claramente os efeitos dos produtos  $K_1.Ec$  e  $K_3.Ec$ , pois aumentando o valor de  $K_3$  e mantendo os outros parâmetros constantes, observa-se que os gradientes de temperatura ficam mais acentuados nas paredes do canal, tanto na região de entrada quanto na região mais afastada da entrada do canal. Nestas figuras também observa-se uma forte influência da sucção e injeção simultâneas deslocando o perfil de temperatura no sentido de baixo para cima. Ainda sobre as figuras 4.14 e 4.15 as distorções verificadas nos perfis de temperatura são atribuídas aos trabalhos de deformação elástica do fluido de segundo e terceiro grau.

A figura 4.16 mostra o efeito do parâmetro viscoelástico de fluido de segundo grau nos perfis de temperatura para  $K_3$ ,  $Pr$ ,  $Ec$  e  $Rv$  constantes.

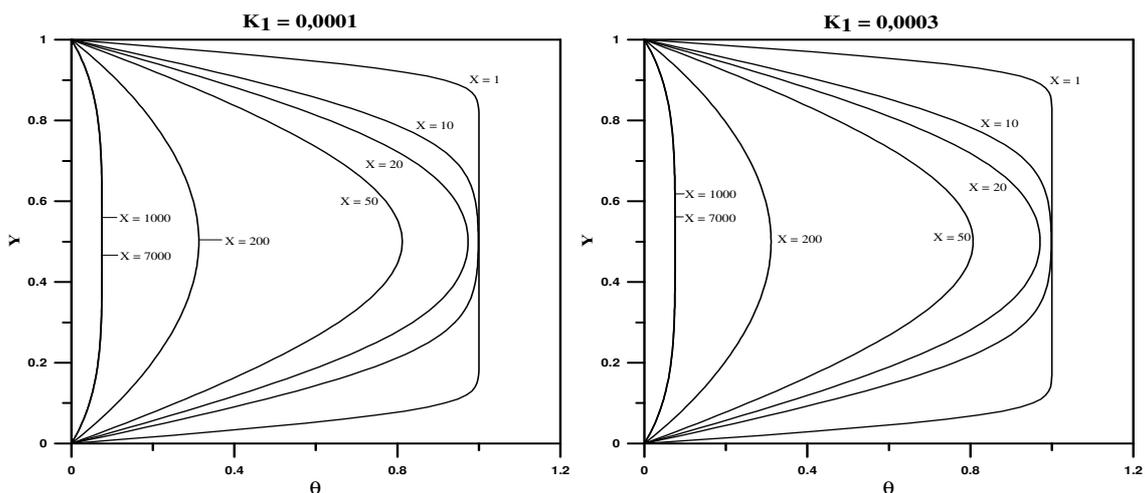


Figura 4.16 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_3 = 0$ ,  $Pr = 1$ ,  $Ec = 0,1$ ,  $Rv = 0,000001$ , variando  $K_1$ .

Nota-se da figura 4.16 que o aumento do valor do parâmetro viscoelástico de segundo grau não influenciou de forma significativa os perfis de temperatura. Isto foi observado na região de entrada e completamente desenvolvida do canal. Isto mostra que o trabalho devido a deformação elástica do fluido de segundo grau não teve influência significativa no campo de temperatura, ou seja, o produto  $K_1.Ec$  que representa o trabalho de deformação não apresentou representatividade nos perfis.

## 4.5-CONCLUSÃO

A metodologia GITT mostrou-se uma excelente ferramenta na obtenção dos campos de velocidade e temperatura no escoamento de um fluido viscoelástico de terceiro grau no interior de um canal de placas paralelas. Resultados para o campo de velocidade e temperatura foram obtidos com até quatro algarismos significativos na região de entrada e completamente desenvolvida do canal, o que, do ponto de vista da engenharia, são resultados bastante significantes.

Os parâmetros viscoelásticos de um fluido de segundo e terceiro grau se mostraram influentes no campo de velocidade. O parâmetro de segundo grau mostrou-se influente somente nas posições iniciais do canal, enquanto o parâmetro de terceiro grau mostrou-se influente na região de entrada e de escoamento completamente desenvolvido. Um fato marcante na análise do campo de velocidade é que, o aumento dos parâmetros  $K_1$  e  $K_3$  obliteram os efeitos de injeção e sucção simultânea.

O efeito do parâmetro de  $R_v$  se mostrou influente nas posições axiais mais afastadas da região de entrada do canal. Seu efeito físico de deslocar o perfil de velocidade para cima é perfeitamente visível e esperado, pois há sucção na parede superior do canal e injeção na parede inferior.

No campo de temperatura foi evidenciado um efeito bastante significativo do número de Eckert juntamente com os produtos  $K_1.Ec$  e  $K_3.Ec$ , demonstrando que a dissipação viscosa não pode ser desprezada quando há escoamento de fluidos viscoelásticos. Isto ficou claro para altos e baixos números de  $Pr$ . Outro efeito bastante significativo na formação dos perfis de temperatura foi a injeção e sucção simultâneas, que praticamente foi observada em todos os perfis em todas as situações investigadas. Não foram observados efeitos significativos isolados dos parâmetros viscoelásticos de segundo e terceiro graus na formação dos perfis de temperatura.

## CAPÍTULO 5

### ESCOAMENTO E TRANSFERÊNCIA DE CALOR DE UM FLUIDO DE SEGUNDO GRAU MODIFICADO NA REGIÃO DE ENTRADA DE UM CANAL DE PLACAS PARALELAS COM INJEÇÃO OU SUÇÃO

#### 5.1-INTRODUÇÃO

Neste capítulo é analisada a influência do parâmetro viscoelástico de fluido de segundo grau e índice da lei da potência no campo de velocidade e temperatura na região de entrada de um canal de placas paralelas com injeção ou sucção para escoamento incompressível, bidimensional, em regime laminar e permanente de um fluido de segundo grau modificado. A realização desta análise consta inicialmente de uma apresentação sucinta sobre o fluido de segundo grau modificado. Em seguida, discutem-se as principais contribuições existentes na literatura sobre este problema. Após isto, é apresentada a formulação matemática do problema e o tratamento via GITT e finalmente são apresentados resultados do problema e comparação com a literatura disponível.

Da mesma maneira como realizado para o fluido de segundo e terceiro graus, é conveniente realizar uma apresentação sucinta de um fluido de segundo grau modificado. Este modelo de fluido surge com a necessidade de se prever os efeitos pseudoplástico e dilatante presentes em alguns escoamentos, cujo modelo de fluido de segundo grau falha. Por outro lado, em outros tipos de escoamento de fluidos não newtonianos, os efeitos de tensão normal são importantes. Um modelo que consiga prever os efeitos citados é um modelo que se adequará às mais diversas situações de escoamentos de fluidos não newtonianos. A componente do modelo do fluido de segundo grau modificado que prevê as informações físicas do comportamento pseudoplástico ou dilatante é o bem conhecido modelo da lei da potência. A componente de segundo grau é a mesma já discutida nos capítulos 3 e 4.

Uma comparação entre este modelo e o modelo para um fluido de terceiro grau, indica que os modelos possuem a mesma característica, ou seja, prevê os efeitos

pseudoplástico e dilatante presentes no escoamento de alguns fluidos. Enquanto no modelo de fluido de terceiro grau o parâmetro que determina a influência pseudoplástica ou dilatante do fluido é o parâmetro  $\beta_3$  no modelo de fluido de segundo grau modificado este parâmetro é o índice do modelo da lei da potência.

## 5.2-REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os trabalhos empreendidos por pesquisadores utilizando o modelo de fluido de segundo grau modificado são escassos na literatura. Apesar disto, cita-se o trabalho pioneiro e alguns outros que derivam desta primeira contribuição.

Na análise de escoamento de gelo policristalino tanto os efeitos de tensão normal quanto o comportamento pseudoplástico ou dilatante são importantes. Tendo em vista esta consideração, MAN e SUN (1987) conduziram um trabalho para escoamento permanente, laminar de gelo policristalino, no qual é determinado dois modelos que prevêem tanto o comportamento pseudoplástico e dilatante quanto os efeitos de tensão normal. Os autores chamaram os modelos de “Fluido de Segunda Ordem Modificado” e “Fluido Power Law de grau 2”. Neste trabalho, além da determinação analítica dos modelos, parâmetros materiais são também determinados em função de variáveis termofísicas. Além disto, os autores citam que estes modelos são tentativas de explicar o escoamento de gelo policristalino. Embora estes modelos sejam apenas tentativas de explicação de escoamento de gelo policristalino, os mesmos podem se adequar ao escoamento de outros fluidos não newtonianos. Assim, outros trabalhos utilizando tal modelo foram conduzidos na explicação de alguns escoamentos de interesse para a engenharia. AKSOY *et al.* (2007) investigaram o escoamento de um fluido de segundo grau modificado no interior da camada limite que se forma sobre uma placa plana sendo estirada continuamente em regime laminar, permanente com geometria bidimensional. Simetrias das equações de camada limite são calculadas usando a teoria de grupo Lie e usando uma das simetrias um sistema de equações diferenciais parciais é transformado em um sistema de equações diferenciais ordinária. As EDOs são numericamente resolvidas usando um esquema de diferenças finitas e resultados para o perfil de velocidade são encontrados para vários índices do modelo da lei da potência e parâmetro viscoelástico de segundo grau.

Recentemente, MASSOUDI e VAIDYA (2008) realizaram uma revisão dos principais modelos de fluido de segundo grau generalizado. Os autores comentam a importância física do modelo de segundo grau modificado, pois vários experimentalistas em reologia não observaram uma importância substancial dos efeitos da tensão normal e sim um comportamento pseudoplástico ou dilatante, fenômenos que o modelo modificado consegue tratar satisfatoriamente.

MASSOUDI e PHUOC (2009) estudaram o escoamento de um fluido de segundo grau modificado ao redor de uma haste cilíndrica que é repentinamente sujeita a um movimento torcional e longitudinal. A equação do movimento é resolvida numericamente e resultados para tensão de cisalhamento são apresentados, o que permitiu determinar a força de arrasto.

Uma aplicação deste modelo é a explicação dos fenômenos que acontecem na saída de atomizadores de mistura água – carvão ou água – óleo, na indústria de geração de energia, pois tanto o fenômeno de tensão normal quanto os efeitos dilatantes ou pseudoplásticos estão presentes neste tipo de equipamento industrial. Em termos de região amazônica, tal modelo teria aplicação na explicação de fenômenos que ocorrem, principalmente, em escoamentos de minérios diluídos, polpas de celulose, polpas de caulim em dutos das indústrias instaladas na região.

### **5.3-DEFINIÇÃO DO PROBLEMA**

Considere o escoamento de um fluido de segundo grau modificado na região de entrada de um canal de placas paralelas sujeitas à injeção ou sucção, conforme mostra a figura 5.1. Nesta região, percebe-se a formação de uma camada limite hidrodinâmica e térmica próxima a parede superior e inferior do canal. É conhecido da literatura que as bordas das camadas limites formadas convergem até um determinado ponto. Antes deste ponto, o escoamento se encontra em desenvolvimento, a partir do mesmo o escoamento é verificado completamente desenvolvido.

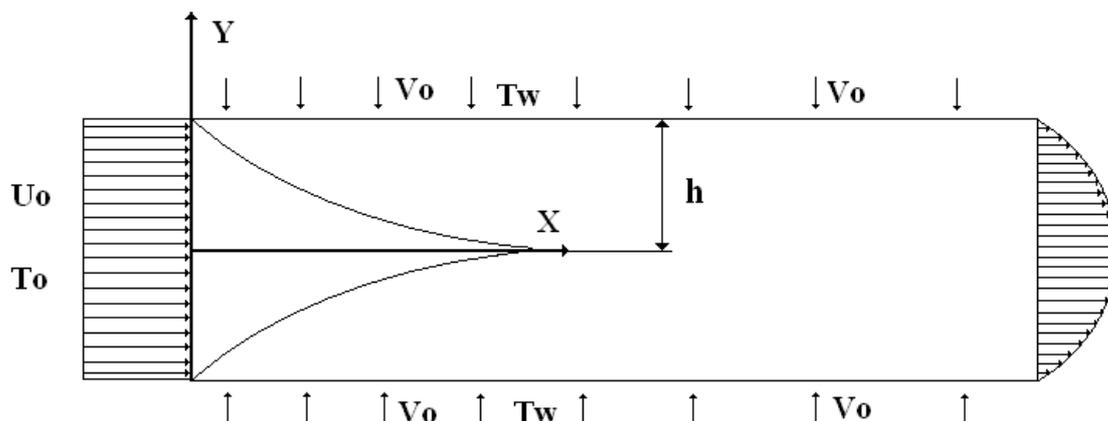


Figura 5.1 - Geometria da formação da camada limite e sistema de coordenadas do problema analisado.

Deve-se deixar claro que, embora esta geometria seja semelhante à do problema apresentado no capítulo 4, as mesmas possuem uma diferença bastante significativa. No capítulo 4 a taxa de injeção de fluido na parede inferior do canal é a mesma da parede superior, de tal maneira, que o canal fica submetido a uma velocidade transversal constante. No presente capítulo, há uma injeção ou sucção ocorrendo nas paredes do canal, e estas injeção ou sucção não são necessariamente iguais, podendo haver diferença entre as mesmas. Neste problema é assumido que há taxa igual de injeção simultânea ocorrendo nas paredes do canal ou sucção simultânea.

Para a análise do problema as seguintes hipóteses são consideradas

- a) Escoamento bidimensional em coordenadas cartesianas;
- b) Escoamento incompressível em regime laminar e permanente;
- c) Força de corpo não considerada;
- d) É considerada a dissipação viscosa e trabalho devido a deformação elástica.

Com a definição do problema, iniciar-se-á a obtenção do modelo matemático que governa o escoamento no interior do canal.

### 5.3.1-EQUAÇÃO CONSTITUTIVA PARA UM FLUIDO VISCOELÁSTICO DE SEGUNDO GRAU MODIFICADO

A equação constitutiva para um fluido de segundo grau modificado não deriva diretamente da expansão assintótica apresentada no item 3.3.1. MAN e SUN (1987) propuseram em seu trabalho uma combinação do modelo da lei da potência com o modelo de fluido de segundo grau, de forma que a equação tensorial constitutiva para o modelo de um fluido de segundo grau modificado torna-se:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\Pi^{\frac{b}{2}}\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 \quad (5.1)$$

onde

$$\Pi = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{A}_1^2) \quad (5.2)$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}_1^2) = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 + 2\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{A}_1 = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \quad (5.4)$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{D}{Dt}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{A}_1 \quad (5.5)$$

### 5.3.2-EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO DA MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA PARA O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO DE SEGUNDO GRAU MODIFICADO

A equação (5.1) pode ser simplificada utilizando restrições termodinâmicas para os termos que apresentam os parâmetros viscoelásticos de segundo grau (DUNN e FOSDICK, 1974, DUNN e RAJAGOPAL, 1995), conforme visto no capítulo 3. No

entanto, isto não será necessário, tendo em vista que o parâmetro  $\alpha_2$  é naturalmente eliminado no processo de eliminação do termo de pressão

Com a substituição do modelo constitutivo para um fluido de segundo grau modificado nas equações invariantes da conservação da massa, quantidade de movimento e energia, consideração das hipóteses do problema. As equações diferenciais do problema se apresentam como (ver apêndice I)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{b}{2} \left[ 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}-1} \left\{ \left[ 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left[ 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} \\ & + \left[ 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( 13 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \left. + u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] \\ & + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{b}{2} \left[ 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{b-1}{2}} \left\{ \left[ 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left[ 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \\
& + \left[ 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \left( 13 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right. \\
& \left. + u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} \right) + v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \\
& + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = & k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left( 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{b}{2}} \\
& + \alpha_1 \left( 4u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\
& \left. + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned} \tag{5.9}$$

### 5.3.3-EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA

As equações de camada limite para o problema em análise são obtidas mediante uma avaliação da ordem de grandeza dos termos que compõe as equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia (SCHLICHTING, 1979).

Para este problema, as considerações usuais de camada limite, onde  $u, x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial p}{\partial x}, T$  são da  $O(1)$  e  $v$  e  $y$  da  $O(\delta)$  ( $\delta$  é a espessura de camada limite) (SAJID *et al.*, 2009) são válidas. Porém,  $v(= \mu/\rho)$  é da  $O(\delta^{b+2})$  (AKSOY *et al.*, 2007, PAKDEMIRLI, 1994),  $\alpha_1, \alpha_2$  são da  $O(\delta^2)$  (SAJID *et al.*, 2007). As equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia para o escoamento resultam:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.10)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} (b+1) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (5.11)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \left( \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.12)$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}+1} + \alpha_1 \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.13)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (5.14.a, b, c)$$

$$u = 0, v = V_0, T = T_w \quad \text{em } y = h \quad (5.15.a, b, c)$$

$$u = U_0, T = T_0 \quad \text{em } x = 0 \quad (5.16.a, b)$$

Percebe-se que as condições de contorno (5.14.a, c) são condições de contorno de simetria. Segundo OXARANGO *et al.* (2004) estas condições são aplicadas somente se o canal for submetido a taxas de injeção ou sucção simultâneas nas paredes do canal. Caso exista diferença entre o valor das taxas, isto não é mais válido.

Considerando a seguinte identidade

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{b+1} = (b+1) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.17)$$

Sem perda de generalidade pode-se fazer  $n = b+1$  em (5.17). Logo

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n = n \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.18)$$

Desta maneira, as equações de camada limite para o escoamento do fluido de segundo grau modificado assumem a seguinte forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.19)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^n + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (5.20)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \left( \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.21)$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}+1} + \alpha_1 \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (5.23.a, b, c)$$

$$u = 0, v = V_0, T = T_w \quad \text{em } y = h \quad (5.24.a, b, c)$$

$$u = U_0, T = T_0 \quad \text{em } x = 0 \quad (5.25.a, b)$$

A aplicação da GITT para este problema requer um rearranjo da equação (5.20), de maneira que o gradiente de velocidade elevado a  $n$  torne-se uma combinação entre gradientes, sendo um deles a base da potência  $(n-1)/2$ . Assim, as equações de camada limite tornam-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.26)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right] + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\ \left. 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (5.27)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \left( \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\rho} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.28)$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2} + 1} + \alpha_1 \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (5.30.a, b, c)$$

$$u = 0, v = V_0, T = T_w \quad \text{em } y = h \quad (5.31.a, b, c)$$

$$u = U_0, T = T_0 \quad \text{em } x = 0 \quad (5.32.a, b)$$

O último termo na equação (5.29) representa o trabalho devido a deformação elástica do fluido de segundo grau (DANDAPAT e GUPTA, 1989).

### 5.3.4-ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA

Os seguintes grupos adimensionais serão utilizados no processo de adimensionalização das equações da continuidade, quantidade de movimento e energia.

$$\begin{aligned}
X &= \frac{x}{h}, Y = \frac{y}{h}, U = \frac{u}{U_0}, V = \frac{v}{U_0}, Re = \frac{\rho U_0^{2-n} h^n}{K^*}, K_1 = \frac{k_1}{h^2}, K_2 = \frac{k_2}{h^2}, R_v = \frac{V_0}{U_0} \\
K_4 &= 2(2K_1 + K_2), \theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, Pe = \frac{U_0 h}{a_d}, Ec = \frac{U_0^2}{c_p (T_0 - T_w)}, P = \frac{p}{\rho U_0^2}, q_{va} = \frac{Q}{U_0 h}, \\
Pe &= Pr \cdot Re, Pr = \frac{K^*}{a_d \rho U_0^{1-n} h^{n-1}}, k_1 = \frac{\alpha_1}{\rho}, k_2 = \frac{\alpha_2}{\rho}, a_d = \frac{k}{\rho c_p}
\end{aligned} \quad (5.33)$$

Após utilização dos grupos adimensionais, as equações que governam o problema tornam-se:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned}
U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{\partial U}{\partial Y} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} + K_1 \left( U \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \right. \\
&\left. 3 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} \right) + 2K_2 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}
\end{aligned} \quad (5.35)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial Y} + K_4 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (5.36)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{Ec}{Re} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}+1} + K_1 Ec \left( U \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (5.37)$$

Com condições de contorno

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0, V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{em } Y = 0 \quad (5.38.a, b, c)$$

$$U = 0, V = mR_v, \theta = 0 \quad \text{em } Y = 1 \quad (5.39.a, b, c)$$

$$U = 1, \theta = 1 \quad \text{em } X = 0 \quad (5.40.a, b)$$

Na condição de contorno (5.39.b), o fator  $m$  define como está ocorrendo a injeção ou sucção no canal. Se  $m = -1$  significa que há injeção nas paredes do canal. Se  $m = 1$  significa que há sucção nas paredes do canal. Deve-se observar que  $V_0$  na condição de injeção de fluido é negativo, pois o sentido de sua magnitude é contrário ao sentido  $y$  do sistema de coordenada assumido. Em caso de sucção o sentido é positivo, pois coincide com sentido de  $y$ .

Percebe-se que o gradiente de pressão na direção  $Y$  não é zero. No entanto é possível através de uma mudança no termo da pressão eliminar esta equação e obter somente uma equação do momento que represente o escoamento no interior da camada limite (TALAY AKYILDIZ, 2001).

Definindo a pressão modificada por:

$$P^* = P - (2K_1 + K_2) \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \quad (5.41)$$

Diferenciando (5.41) em relação a  $X$  e  $Y$  obtêm-se:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P^*}{\partial X} + 4K_1 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + 2K_2 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial P^*}{\partial Y} + 2(2K_1 + K_2) \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (5.43)$$

Substituindo as equações (5.42) e (5.43) em (5.35) e (5.36) respectivamente obtém-se:

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{\partial U}{\partial Y} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} + K_1 \left( U \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \right. \quad (5.44)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} \right)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial Y} = 0 \quad (5.45)$$

Desta maneira as equações de camada limite hidrodinâmica e térmica que governam o problema em análise são:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5.46)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{\partial U}{\partial Y} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} + K_1 \left( U \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \right. \quad (5.47)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} \right)$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial Y} = 0 \quad (5.48)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}+1} + K_1 \text{Ec} \left( U \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0, V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{em } Y = 0 \quad (5.50.a, b, c)$$

$$U = 0, V = mR_v, \theta = 0 \quad \text{em } Y = 1 \quad (5.51.a, b, c)$$

$$U = 1, \theta = 1 \quad \text{em } X = 0 \quad (5.52.a, b)$$

### 5.3.5-FORMULAÇÃO DA CAMADA LIMITE HIDRODINÂMICA E TÉRMICA POR FUNÇÃO CORRENTE

Antes de iniciar o processo de transformação integral das equações de camada limite, as mesmas serão apresentadas em termos de função corrente. O objetivo deste procedimento é obter as vantagens computacionais deste tipo de análise (FIGUEIRA

DA SILVA *et al.*, 1996). Além do que, este tipo de formulação proporciona a verificação automática da equação da continuidade. Pois

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad ; \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (5.53.a, b)$$

A fim de expressar as equações da quantidade de movimento em termos de função corrente, a equação (5.48) é diferenciada em relação a X e a equação (5.47) é diferenciada em relação a Y. Os resultados são subtraídos e a definição de função corrente é introduzida no resultado. Para a equação da energia e condições de contorno a definição da função corrente é também substituída, resultando:

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} + K_1 \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^5 \psi}{\partial X \partial Y^4} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^5 \psi}{\partial Y^5} \right) \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} + \frac{\text{Ec}}{\text{Re}} \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}+1} + K_1 \text{Ec} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} \right) \quad (5.55)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = 0, \psi = G_1, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{em } Y = 0 \quad (5.56.a, b, c)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = 0, \psi = -mR_v X + G_2, \theta = 0 \quad \text{em } Y = 1 \quad (5.57.a, b, c)$$

$$\psi = Y + G_1, \theta = 1 \quad \text{em } X = 0 \quad (5.58.a, b)$$

onde  $R_v = V_0/U_0$ , ou seja a relação entre a velocidade de injeção ou sucção e a velocidade de entrada do canal. As constantes de integração  $G_1$  e  $G_2$  representam a função corrente no centro e parede do canal, respectivamente. Para o cálculo destas constantes, verifica-se que vazão por profundidade unitária que passa entre as linhas de corrente satisfaz o balanço de massa global, de modo que a seguinte relação é satisfeita.

$$q_{va} = G_2 - G_1 \quad (5.59)$$

### 5.3.6-SOLUÇÃO VIA GITT

Considerando as idéias da Técnica da Transformada Integral Generalizada (COTTA, 1993) já apresentadas, para a melhora do desempenho computacional, é conveniente definir um filtro que homogeneíza as condições de contorno para o campo de velocidade na direção Y, a qual posteriormente será a coordenada escolhida para a definição do problema de autovalor. Portanto:

$$\psi(X, Y) = \psi_{\infty}(Y; X) + \varphi(X, Y) \quad (5.60)$$

Conforme apresentado no capítulo 4, o filtro ideal para problemas de análise do escoamento na região de entrada de dutos é a solução das equações diferenciais parciais que representam o campo de velocidade na região de escoamento completamente desenvolvido (COTTA, 1993).

Para situações de injeção ou sucção simultâneas no canal, não se espera observar uma região de escoamento completamente desenvolvida, pois *a priori* sempre o escoamento será perturbado pela entrada ou saída de fluido nas paredes do canal. Dessa maneira, a obtenção de um filtro que represente o escoamento na região completamente desenvolvida se torna impraticável, pois isso significaria resolver as equações de forma completa, sem considerações de aproximação em camada limite. Uma alternativa para a obtenção de um filtro é considerar o canal com injeção ou sucção nas paredes e assumir que a componente v da velocidade na região longe da entrada do canal é desprezível. Isto retira o rigor físico do problema. No entanto, o rigor matemático é satisfeito, pois a idéia do filtro é homogeneizar as condições de contorno do problema e não buscar a solução completa na região longe da entrada do canal. Além disso, quando  $V_0$  tende para zero a situação de escoamento completamente desenvolvido é verificada. É claro que se esta solução é disponível ou viável, o problema fica mais rico fisicamente. Vale ressaltar que, ainda é muito controverso na literatura, se realmente uma região

completamente desenvolvida é verificada quando há injeção ou sucção uniforme no canal (WHITE, 1991).

Assim, analisando as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento nas direções x e y, e considerando a componente de velocidade u depender somente da direção y e v ser desconsiderada na região longe da entrada do canal, têm-se para as equações:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{du}{dy} \left[ \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} \right\} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.61)$$

$$4 \frac{\alpha_1}{\rho} \frac{du}{dy} \frac{d^2u}{dy^2} + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \frac{du}{dy} \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.62)$$

Definindo a seguinte pressão modificada (ARIEL, 2002); com objetivo de se ter somente uma equação da quantidade de movimento que represente o escoamento na região longe da entrada do canal.

$$p = p_0 + (2\alpha_1 + \alpha_2) \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \quad (5.63)$$

Substituindo (5.63) nas equações (5.61) e (5.62), e observando que a equação da continuidade está satisfeita, obtêm-se:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{du}{dy} \left[ \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} \right\} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (5.64)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (5.65)$$

Com condições de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0 \text{ em } y = 0 \quad (5.66.a, b)$$

$$u = 0, v = V_0 \text{ em } y = h \quad (5.67.a, b)$$

Nota-se que a equação (5.64), representa o campo de velocidade para um fluido que obedece a lei da potência na região longe da entrada do canal. Após adimensionalização, eliminação do termo de pressão e tratamento via função corrente, a solução do filtro proposto é dada por (A demonstração da solução deste problema é discutida no apêndice IV):

$$\psi_{\infty}(Y; X) = (q_{va} - mXR_v) \left( \frac{2n+1}{n+1} Y - \frac{n}{n+1} Y^{\frac{2n+1}{n}} \right) + G_1 \quad (5.68)$$

onde  $X$  é considerado parâmetro e,

Substituindo (5.68) e (5.60) nas equações (5.54) a (5.58) obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial X \partial Y^2} - K_1 \frac{\partial^5 \phi}{\partial X \partial Y^4} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial X} \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) + \\ & K_1 \frac{\partial \phi}{\partial X} \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial Y^5} - F(X)F_5(Y) \right) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) \left[ \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \quad (5.69) \\ & + mK_1 R_v F_4(Y) \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) + mK_1 R_v F_6(Y) \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial Y^5} - F(X)F_5(Y) \right) - \\ & mR_v F_2(Y) \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) - mR_v F_6(Y) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y)\right)\frac{\partial\theta}{\partial X} - \frac{\partial\varphi}{\partial X}\frac{\partial\theta}{\partial Y} - K_1Ec\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial X\partial Y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y)\right)\right. \\ \left.\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y)\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial X}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y)\right)\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y)\right)\right] = \frac{1}{Pe}\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} - \\ mR_vF_6(Y)\frac{\partial\theta}{\partial Y} + \frac{Ec}{Re}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y)\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}+1} + mK_1EcR_vF_2(Y). \quad (5.70)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y)\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y)\right) + mK_1EcR_vF_6(Y)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y)\right) \\ \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y)\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} = 0, \varphi = 0, \frac{\partial\theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{em } Y = 0 \quad (5.71.a, b, c)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Y} = 0, \varphi = 0, \theta = 0 \quad \text{em } Y = 1 \quad (5.72.a, b, c)$$

$$\varphi = Y + G_1 - \psi_\infty(Y), \theta = 1 \quad \text{em } X = 0 \quad (5.73.a, b)$$

onde

$$F_1(Y) = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n+1}Y^{\frac{n+1}{n}} \\ F_2(Y) = \frac{2n+1}{n}Y^{\frac{1}{n}} \\ F_3(Y) = \frac{2n+1}{n^2}Y^{\frac{1-n}{n}} \\ F_4(Y) = \frac{(1-n)(2n+1)}{n^3}Y^{\frac{1-2n}{n}} \quad (5.74.a, b, c, d, e, f, g) \\ F_5(Y) = \frac{(1-2n)(1-n)(2n+1)}{n^4}Y^{\frac{1-3n}{n}} \\ F_6(Y) = \frac{2n+1}{n+1}Y - \frac{n}{n+1}Y^{\frac{2n+1}{n}} \\ F(X) = q - mXR_v$$

Na aplicação da GITT para a integração das equações diferenciais parciais (5.69) e (5.73), a direção  $Y$  é escolhida para o processo de transformação integral, devido as características homogêneas do problema na referida direção, deve-se salientar que esta característica foi obtida após a aplicação do filtro.

Os problemas de autovalor apropriados para a aplicação da transformação integral das equações (5.77) a (5.81), são aqueles discutidos nos trabalhos de FIGUEIRA DA SILVA *et al.* (1996) e MAGNO (1998), e são dados por:

Para o campo de função corrente

$$\frac{d^4\Omega_i(Y)}{dY^4} = \mu_i^4\Omega_i(Y), \quad i = 1,2,3,\dots \quad (5.75)$$

$$\Omega_i(0) = 0, \quad \frac{d^2\Omega_i(0)}{dY^2} = 0 \quad (5.76.a, b)$$

$$\Omega_i(1) = 0, \quad \frac{d\Omega_i(1)}{dY} = 0 \quad (5.77.c, d)$$

O problema (5.75) a (5.77) é então resolvido para obter-se a seguinte solução analítica.

$$\Omega_i(Y) = \frac{\text{sen}(\mu_i Y)}{\text{sen}(\mu_i)} - \frac{\text{senh}(\mu_i Y)}{\text{senh}(\mu_i)} \quad i = 1,2,3,\dots \quad (5.78)$$

Os autovalores  $\mu_i$  são calculados pela seguinte equação transcendental.

$$\text{tg}(\mu_i) = \text{tgh}(\mu_i), \quad i = 1,2,3,\dots \quad (5.79)$$

As autofunções satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade

$$\int_0^1 \Omega_i(Y)\Omega_j(Y)dY = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ N_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (5.80)$$

A Norma  $N_i$  é calculada de

$$N_i = \int_0^1 [\Omega_i]^2 dY = 1 \quad (5.81)$$

A demonstração desta norma esta apresentada no apêndice V.

Sem perda de generalidade a autofunção será normalizada da seguinte forma:

$$\tilde{\Omega}_i = \frac{\Omega_i}{N_i^{1/2}} \quad (5.82)$$

Para o campo de Temperatura

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Gamma_i(Y)}{dY^2} + \lambda_i^2 \Gamma_i(Y) &= 0 \\ \frac{d\Gamma_i(0)}{dY} &= 0 \\ \Gamma_i(1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.83.a, b, c)$$

Similarmente o problema (5.83) é resolvido analiticamente para fornecer as autofunções, equação transcendental para cálculo dos autovalores, propriedade de ortogonalidade e norma  $M_i$ .

$$\Gamma_i(Y) = \cos(\lambda_i Y) \quad \lambda_i = (2i-1)\frac{\pi}{2} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.84 \text{ e } 5.85)$$

$$\int_0^1 \Gamma_i(Y) \Gamma_j(Y) dY = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ M_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad M_i = \int_0^1 [\Gamma_i(Y)]^2 dY = \frac{1}{2} \quad (5.86 \text{ e } 5.87)$$

Sem perda de generalidade a autofunção será normalizada da seguinte forma:

$$\tilde{\Gamma}_i = \frac{\Gamma_i}{M_i^{1/2}} \quad (5.88)$$

De posse dos problemas de autovalor apresentados para o campo de função corrente e temperatura, definem-se então os seguintes pares transformada-inversa.

Para o campo de função corrente

$$\tilde{\varphi}_i(X) = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i(Y) \varphi(X, Y) dY, \text{ Transformada} \quad (5.89)$$

$$\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_i(Y) \tilde{\varphi}_i(X), \text{ Inversa} \quad (5.90)$$

Para o campo de Temperatura

$$\tilde{\theta}_i(X) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) \theta(X, Y) dY, \text{ Transformada} \quad (5.91)$$

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(Y) \tilde{\theta}_i(X), \text{ Inversa} \quad (5.92)$$

Após a definição dos pares transformada-inversa, o passo seguinte é iniciar o processo de transformação integral do sistema de equações diferenciais parciais (5.69), (5.70) e condições iniciais (5.73.a, b). Para o campo de função corrente a equação (5.69)

é multiplicada pelo operador  $\int_0^1 \tilde{\Omega}_i(Y) dY$ . Assim, têm-se:

$$\int_0^1 \tilde{\Omega}_i(Y) \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X \partial Y^2} - K_1 \frac{\partial^5 \varphi}{\partial X \partial Y^4} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial X} \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) + \\ & K_1 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} - F(X)F_5(Y) \right) = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \\ & + mK_1 R_\nu F_4(Y) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) + mK_1 R_\nu F_6(Y) \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} - F(X)F_5(Y) \right) - \\ & mR_\nu F_2(Y) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) - mR_\nu F_6(Y) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) \end{aligned} \right\} dY \quad (5.93)$$

Substituindo a fórmula de inversão (5.90) para o campo de função corrente em (5.93), obtêm-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d\tilde{\varphi}_j}{dX} = \frac{B_i^*}{\text{Re}} + B_i \quad (5.94)$$

onde

$$A_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \left( \frac{d^2 \tilde{\Omega}_j}{dY^2} - K_1 \frac{d^4 \tilde{\Omega}_j}{dY^4} \right) - \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) + \right. \\ \left. K_1 \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} - F(X)F_5(Y) \right) \right] dY \quad (5.95)$$

$$B_i^* = \int_0^1 \frac{d^2 \tilde{\Omega}_i}{dY^2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} dY \quad (5.96)$$

$$B_i = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i \left[ mK_1 R_\nu F_4(Y) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) + mK_1 R_\nu F_6(Y) \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} - F(X)F_5(Y) \right) - \right. \\ \left. mR_\nu F_2(Y) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) - mR_\nu F_6(Y) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) \right] dY \quad (5.97)$$

A transformação da condição de contorno em X é obtida, aplicando o mesmo operador na equação (5.73.a). Assim têm-se:

$$\tilde{\varphi}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i [Y + G_1 - \psi_\infty(Y)] dY \quad (5.98)$$

Com o objetivo de minimizar os múltiplos somatórios nos coeficientes que surgem naturalmente no processo de transformação integral do problema. Os coeficientes  $A_{ij}$  e  $B_i$  serão avaliados através de uma semi-linearização do integrando conforme mostrado no capítulo 3. Assim:

$$A_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i (a_m Y + b_m) dY \quad (5.99)$$

$$A_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} a_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_m} b_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i dY \quad (5.100)$$

$$a_m = \frac{F_j|_{Y_m} - F_j|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; b_m = F_j|_{Y_m} - a_m Y_m \quad (5.101.a, b)$$

$$F_j(X, Y, \varphi) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \left( \frac{d^2 \tilde{\Omega}_j}{dY^2} - K_1 \frac{d^4 \tilde{\Omega}_j}{dY^4} \right) - \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) + K_1 \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} - F(X)F_5(Y) \right) \quad (5.102)$$

Sendo  $\Delta Y$  o tamanho do intervalo onde são avaliadas as integrais.

Procedendo da mesma maneira para o coeficiente  $B_i$ , obtêm-se:

$$B_i = \sum_{m=1}^{N_m} \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i (c_m Y + d_m) dY \quad (5.103)$$

$$B_i = \sum_{m=1}^{N_k} c_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_k} d_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Omega}_i dY \quad (5.104)$$

$$c_m = \frac{H|_{Y_m} - H|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; d_m = H|_{Y_m} - c_m Y_m \quad (5.105.a, b)$$

$$H = mK_1 R_v F_4(Y) \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F(X) F_1(Y) \right) + mK_1 R_v F_6(Y) \left( \frac{\partial^5 \phi}{\partial Y^5} - F(X) F_5(Y) \right) - \\ mR_v F_2(Y) \left( \frac{\partial \phi}{\partial Y} + F(X) F_1(Y) \right) - mR_v F_6(Y) \left( \frac{\partial^3 \phi}{\partial Y^3} - F(X) F_3(Y) \right) \quad (5.106)$$

O coeficiente  $B_i^*$  foi obtido pelo processo de transformação integral após uso das condições de contorno do problema auxiliar. A aplicação da metodologia de semilinearização do termo que modela a lei da potência exige que se opere a derivada de segunda ordem que acompanha o mesmo. Isto aumenta as não linearidades da equação diferencial parcial e determinará alto custo computacional bem como baixa taxa de convergência do potencial. A avaliação de  $B_i^*$  foi realizado com uso da subrotina de integração numérica FQRUL do IMSL (1989).

Para o campo de temperatura a equação (5.70) é multiplicada pelo operador

$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) dY. \text{ E similarmente ao realizado para o campo de função corrente, encontra-se:}$$

$$\int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \varphi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} - K_1 Ec \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X \partial Y^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \right. \\ & \left. \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial X} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) \right] = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} - \\ & mR_v F_6(Y) \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{Ec}{Re} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}+1} + mK_1 Ec R_v F_2(Y). \\ & \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) + mK_1 Ec R_v F_6(Y) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right). \\ & \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) \end{aligned} \right\} dY \quad (5.107)$$

Substituindo a fórmula de Inversão (5.92) para a temperatura, obtêm-se para (5.107):

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} \frac{d\tilde{\theta}_j}{dX} - \sum_{j=1}^{\infty} D_{ij} \frac{d\tilde{\varphi}_j}{dX} = -\frac{\tilde{\theta}_i \lambda_i^2}{Pe} + E_i \quad (5.108)$$

onde

$$C_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \tilde{\Gamma}_j \right] dY \quad (5.109)$$

$$D_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left[ \tilde{\Omega}_j \frac{\partial \theta}{\partial Y} + K_1 Ec \left[ \frac{d^2 \tilde{\Omega}_j}{dY^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) \right] \right] dY \quad (5.110)$$

$$\begin{aligned}
E_i &= \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i \left\{ -mR_v F_6(Y) \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{Ec}{Re} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}+1} + mK_1 Ec R_v F_2(Y) \right. \\
&\left. \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) + mK_1 Ec R_v F_6(Y) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) \right. \\
&\left. \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) \right\} dY \quad (5.111)
\end{aligned}$$

A transformação da condição inicial é obtida, aplicando o mesmo operador na equação (5.73.b). Assim têm-se:

$$\tilde{\theta}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) dY \quad (5.112)$$

Os coeficientes  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  e  $E_i$  serão semi-linearizados da mesma maneira como realizado para o campo de função corrente. Assim:

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} g_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_m} h_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i dY \quad (5.113)$$

$$g_m = \frac{P_j|_{Y_m} - P_j|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; h_m = P_j|_{Y_m} - g_m Y_m \quad (5.114.a, b)$$

$$D_{ij} = \sum_{m=1}^{N_m} r_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_m} s_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i dY \quad (5.115)$$

$$r_m = \frac{Q_j|_{Y_m} - Q_j|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; s_m = Q_j|_{Y_m} - r_m Y_m \quad (5.116.a, b)$$

$$E_i = \sum_{m=1}^{N_m} t_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i Y dY + \sum_{m=1}^{N_m} u_m \int_{Y_{m-1}}^{Y_m} \tilde{\Gamma}_i dY \quad (5.117)$$

$$t_m = \frac{R|_{Y_m} - R|_{Y_{m-1}}}{\Delta Y}; u_m = R|_{Y_m} - t_m Y_m \quad (5.118.a, b)$$

onde

$$P_j(X, Y, \varphi) = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \tilde{\Gamma}_j \quad (5.119)$$

$$Q_j(X, Y, \theta, \varphi) = \tilde{\Omega}_j \frac{\partial \theta}{\partial Y} + K_1 Ec \left[ \frac{d^2 \tilde{\Omega}_j}{dY^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) - \tilde{\Omega}_j \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) \right] \quad (5.120)$$

$$R = -mR_\nu F_6(Y) \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{Ec}{Re} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}+1} + mK_1 Ec R_\nu F_2(Y) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) + mK_1 Ec R_\nu F_6(Y) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right) \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right) \quad (5.121)$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado, dados pelas equações (5.94) e (5.108) é melhor visualizado em sua forma matricial, dada por:

$$\begin{bmatrix} [A_{ij}] & \cdot & [0]_{ij} \\ \dots & \dots & \dots \\ [-D_{ij}] & \cdot & [C_{ij}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{\varphi}_j}{dX} \\ \frac{d\tilde{\theta}_j}{dX} \\ \frac{d\tilde{\Omega}_j}{dX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{B_i^*}{Re} + B_i \\ \dots \\ -\frac{\lambda_i^2 \tilde{\theta}_i(X)}{Pe} + E_i \end{bmatrix} \quad (5.122)$$

Para o desenvolvimento do código computacional, onde se implementou o sistema diferencial ordinário obtido, dados pelas equações (5.94) e (5.108), a rotina DIVPAG da biblioteca IMSL (1989) foi utilizada. As características de solução desta rotina já foram apresentadas no capítulo 3.

Uma vez calculado os potenciais  $\tilde{\varphi}_i$  e  $\tilde{\theta}_i$ , o campo de velocidade original é obtido pela substituição da fórmula de inversão (5.90) no filtro (equação 5.68) e em seguida na definição de função corrente para as componentes de velocidade U e V. A fórmula de inversão (5.92) define o campo de temperatura original, logo

$$U(X, Y) = \frac{\partial \psi_\infty}{\partial Y} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\tilde{\Omega}_i(Y)}{dY} \tilde{\varphi}_i(X) \quad (5.123)$$

$$V(X, Y) = R_v \left( \frac{2n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1} Y^{\frac{2n+1}{n}} \right) - \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_i(Y) \frac{d\tilde{\varphi}_i(X)}{dX} \quad (5.124)$$

$$\theta(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(Y) \tilde{\theta}_i(X) \quad (5.125)$$

### 5.3.7-ALGORITMO COMPUTACIONAL

As características do sistema de equações diferenciais ordinárias deste capítulo são as mesmas já discutidas nos capítulos anteriores. Assim, a rotina matemática DIVPAG da biblioteca IMSL (1989) foi utilizada para a solução numérica deste problema de valor inicial. A estrutura do algoritmo de solução é o mesmo já apresentado nos capítulos anteriores, só diferenciando na composição dos coeficientes, portanto tem-se:

$$\sum_{j=1}^{NV} A_{ij} \frac{d\tilde{\varphi}_j}{dX} = \frac{B_i^*}{Re} + B_i, \quad i = 1, NV \quad (5.126)$$

$$\sum_{j=Nv+1}^{Nv+NT} C_{ij} \frac{d\tilde{\theta}_j}{dX} - \sum_{j=1}^{NT} D_{ij} \frac{d\tilde{\varphi}_j}{dX} = -\frac{\tilde{\theta}_i \lambda_i^2}{Pe} + E_i, \quad i = Nv+1, Nv+NT \quad (5.127)$$

As condições de entrada transformadas para a velocidade e temperatura ficam

$$\tilde{\varphi}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\Omega}_i [Y + G_i - \psi_\infty(Y)] dY, \quad i = 1, Nv \quad (5.128)$$

$$\tilde{\theta}_i(0) = \int_0^1 \tilde{\Gamma}_i(Y) dY, \quad i = Nv+1, Nv+NT \quad (5.129)$$

A forma matricial do sistema (5.126) e (5.127) que atende ao tipo de configuração resolvível pela DIVPAG é

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{Y}) \frac{d\mathbf{Y}}{dX} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \quad (5.130)$$

ou ainda

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dX} = \mathbf{F}^*(\mathbf{Y})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{Y}) \quad (5.131)$$

No vetor  $\mathbf{Y}$ , dos potenciais transformados, as primeiras posições são ocupadas por  $\tilde{\varphi}_i$  ( $j = 1, 2, \dots, Nv$ ) e as seguintes por  $\tilde{\theta}_j$  ( $j = Nv+1, Nv+2, \dots, Nv+NT$ ). A matriz  $\mathbf{G}$  armazena os coeficientes  $B_i + \frac{B_i^*}{Re}$  ( $i = 1, 2, \dots, Nv$ ) e  $E_i - \frac{\tilde{\theta}_i \lambda_i^2}{Pe}$  ( $i = Nv+1, Nv+2, \dots, Nv+NT$ ), e a matriz  $\mathbf{F}^*$  armazena os coeficientes  $A_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, Nv; j = 1, 2, \dots, Nv$ ),  $C_{ij}$  ( $i = Nv+1, Nv+2, \dots, Nv+NT; j = Nv+1, Nv+2, \dots, Nv+NT$ ),  $D_{ij}$  ( $i = Nv+1, Nv+2, \dots, Nv+NT; j = 1, 2, \dots, Nv$ ).

O código computacional desenvolvido para este problema segue os mesmos moldes dos problemas anteriores, ou seja, as ordens de truncamento foram assumidas iguais, ou seja,  $NV = NT$ . No entanto, é possível ter ordens diferentes, desde que se atente para a precisão dos resultados do campo de temperatura, em virtude do mesmo ser dependente do campo de velocidade.

## **5.4-RESULTADOS E DISCUSSÃO**

Resultados numéricos para os campos de velocidade e temperatura foram obtidos. O código computacional foi desenvolvido em linguagem de programação FORTRAN 2003 e executado em computadores com processadores Intel I3 2.13 GHz e Intel 2.2 GHz do laboratório de simulação do Programa de Doutorado em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia da Universidade Federal do Pará. A subrotina DIVPAG da IMSL foi usada para aproximar numericamente a versão truncada do sistema diferencial ordinário, com um erro relativo prescrito pelo usuário de  $10^{-6}$  para os potenciais de velocidade e temperatura. Para o campo de velocidade, os resultados foram produzidos para diferentes ordens de truncamento ( $NV \leq 48$ ) e diferentes valores dos parâmetros de estudo  $K_1$ ,  $n$  e  $R_v$ . Similarmente, para o campo de temperatura, os resultados foram produzidos para  $NT \leq 48$  e diferentes valores dos parâmetros de estudo  $K_1$ ,  $n$ ,  $R_v$ ,  $Pr$  e  $Ec$ . Como o sistema diferencial depende do número de Reynolds, os resultados foram obtidos para um  $Re = 2000$ .

### **5.4.1-CAMPO DE VELOCIDADE**

Primeiramente mostra-se o comportamento da taxa de convergência para a componente de velocidade  $U$  em função do parâmetro viscoelástico de segundo grau e parâmetro  $n$  do modelo da lei da potência com influência da injeção ou sucção no canal. Para esta análise foram escolhidas situações limites do parâmetro  $K_1$ , já discutido no capítulo 3 e utilizados no capítulo 4. Os valores de  $n$  foram escolhidos de acordo com o trabalho de AKSOY *et al.* (2007). Para injeção ou sucção no canal foi assumido um valor pequeno  $R_v = 0,00003$  para sucção e  $R_v = -0,00003$  para injeção. Os critérios de escolha basearam-se nas recomendações de SCHLICHTING (1979), o filtro assumido torna-se mais preciso quando  $R_v$  tende para zero e no fato da região afastada da entrada

do canal ser perturbada pela injeção ou sucção uniforme. Portanto, para grandes taxas de injeção ou sucção no canal seria mais prudente usar uma formulação completa em vez da formulação aproximada de camada limite.

As tabelas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 mostram a taxa de convergência da componente de velocidade U para vários valores de  $K_1$  e n.

Tabela 5.1 – Convergência da componente de velocidade U no centro do canal para  $K_1 = 0,0001$ ,  $n = 0,8$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>R_v = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	1,0406	1,0462	1,0479	1,0483	1,0485	1,0485	1,0485	1,0483
10	1,0789	1,0829	1,0847	1,0854	1,0856	1,0857	1,0857	1,0856
20	1,1359	1,1397	1,1413	1,1420	1,1422	1,1423	1,1423	1,1422
50	1,2658	1,2683	1,2693	1,2698	1,2699	1,2700	1,2700	1,2699
70	1,3252	1,3269	1,3276	1,3279	1,3279	1,3280	1,3280	1,3280
90	1,3652	1,3663	1,3667	1,3669	1,3670	1,3670	1,3670	1,3670
200	1,4285	1,4286	1,4287	1,4287	1,4287	1,4287	1,4287	1,4287
7000	1,1407	1,1407	1,1407	1,1407	1,1407	1,1407	1,1407	1,1407
<b><math>R_v = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	1,0412	1,0468	1,0484	1,0489	1,0490	1,0491	1,0491	1,0489
10	1,0802	1,0842	1,0858	1,0867	1,0869	1,0868	1,0869	1,0870
20	1,1383	1,1422	1,1437	1,1444	1,1446	1,1447	1,1447	1,1445
50	1,2716	1,2741	1,2751	1,2755	1,2757	1,2757	1,2757	1,2757
70	1,3329	1,3345	1,3352	1,3355	1,3356	1,3357	1,3356	1,3356
90	1,3746	1,3757	1,3761	1,3763	1,3764	1,3764	1,3764	1,3764
200	1,4471	1,4472	1,4473	1,4473	1,4473	1,4473	1,4473	1,4473
7000	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485

A tabela 5.1 mostra uma excelente convergência da componente de velocidade U em três algarismos significativos para todas as posições axiais adotadas, tanto na situação de sucção quanto injeção. Esta convergência é verificada a partir de  $NV = 32$ , o que indica um baixo custo computacional na obtenção dos resultados para  $K_1 = 0,0001$  e  $n = 0,8$ .

A menor posição axial adotada para investigar os efeitos de  $n$  e  $K_1$  na região de entrada do canal é relativamente alta, se compararmos com a posição adotada no capítulo 4,  $X = 1$ . Isto foi necessário em virtude da baixa taxa de convergência verificada na posição  $X = 1$  deste problema. Esta baixa taxa de convergência é atribuída ao efeito elástico presente no fluido, pois quando se retira esta contribuição do modelo, resultados satisfatórios são encontrados em menores posições. Além disso, o filtro utilizado neste problema não reflete a realidade física, embora matematicamente correto. Este fato também contribui para baixas taxas de convergência na entrada e parede do canal. Deve-se ressaltar que a influência do efeito elástico na taxa de convergência é muito maior que o efeito devido ao filtro utilizado.

Tabela 5.2 – Convergência da componente de velocidade  $U$  no centro do canal para  $K_1 = 0,0001$ ,  $n = 1,4$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>R_v = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	1,1282	1,1314	1,1328	1,1334	1,1337	1,1339	1,1340	1,1340
10	1,1857	1,1883	1,1894	1,1899	1,1901	1,1905	1,1903	1,1903
20	1,2741	1,2761	1,2770	1,2774	1,2777	1,2779	1,2777	1,2778
50	1,4962	1,4973	1,4977	1,4979	1,4980	1,4981	1,4980	1,4981
70	1,5492	1,5496	1,5497	1,5498	1,5498	1,5498	1,5498	1,5498
90	1,5674	1,5676	1,5676	1,5676	1,5676	1,5676	1,5677	1,5676
200	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738
7000	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508
<b><math>R_v = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	1,1288	1,1320	1,1334	1,1340	1,1343	1,1345	1,1345	1,1346
10	1,1869	1,1895	1,1906	1,1910	1,1913	1,1917	1,1915	1,1915
20	1,2764	1,2784	1,2793	1,2798	1,2800	1,2802	1,2800	1,2799
50	1,5017	1,5026	1,5031	1,5032	1,5034	1,5034	1,5034	1,5035
70	1,5562	1,5565	1,5567	1,5567	1,5567	1,5567	1,5568	1,5568
90	1,5761	1,5762	1,5763	1,5763	1,5763	1,5763	1,5763	1,5763
200	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928
7000	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158

A tabela 5.2 também mostra excelente convergência em três algarismos significativos para a componente de velocidade no caso de  $K_1 = 0,0001$  e  $n = 1,4$ . Esta

convergência é alcançada a partir de  $NV = 32$ , indicando também um baixo custo computacional na obtenção dos resultados.

Tabela 5.3 – Convergência da componente de velocidade  $U$  no centro do canal para  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 0,8$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>Rv = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	1,0252	1,0250	1,0232	1,0208	1,0193	1,0178	1,0163	1,0148
10	1,0640	1,0653	1,0646	1,0633	1,0624	1,0615	1,0605	1,0596
20	1,1236	1,1254	1,1253	1,1246	1,1239	1,1232	1,1224	1,1217
50	1,2571	1,2581	1,2580	1,2575	1,2571	1,2566	1,2561	1,2556
70	1,3185	1,3192	1,3192	1,3188	1,3185	1,3182	1,3178	1,3175
90	1,3604	1,3609	1,3608	1,3606	1,3604	1,3602	1,3599	1,3597
200	1,4280	1,4280	1,4280	1,4280	1,4280	1,4280	1,4279	1,4279
7000	1,1407	1,1407	1,1407	1,1407	1,1407	1,1407	1,1406	1,1407
<b><math>Rv = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	1,0256	1,0253	1,0235	1,0211	1,0196	1,0179	1,0164	1,0149
10	1,0651	1,0663	1,0655	1,0642	1,0632	1,0622	1,0612	1,0602
20	1,1260	1,1277	1,1275	1,1267	1,1260	1,1252	1,1244	1,1236
50	1,2627	1,2638	1,2636	1,2631	1,2626	1,2622	1,2617	1,2611
70	1,3261	1,3268	1,3267	1,3263	1,3260	1,3257	1,3253	1,3250
90	1,3698	1,3702	1,3702	1,3699	1,3697	1,3695	1,3692	1,3690
200	1,4466	1,4466	1,4466	1,4466	1,4466	1,4465	1,4465	1,4465
7000	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485	1,7485

Na tabela 5.3 é verificada uma convergência de três dígitos significativos somente a partir de  $NV = 44$  para o caso de sucção, isto indica um custo computacional um pouco maior, esta convergência alcançada com um número de termos na série maior, se comparado com os resultados apresentados nas tabelas 5.1 e 5.2 é atribuída ao efeito do aumento do parâmetro viscoelástico  $K_1$ , que torna o sistema de equações diferenciais ordinárias mais rígido. Embora os resultados para o potencial de velocidade na situação de injeção ser obtido com os mesmos valores de  $K_1$  e  $n$ , não se verificou este tipo de comportamento na taxa de convergência do potencial.

Tabela 5.4 – Convergência da componente de velocidade U no centro do canal para  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 1,4$  e valores de injeção e sucção.

<b>Rv = 0,00003</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	1,1216	1,1245	1,1254	1,1257	1,1258	1,1258	1,1257	1,1256
10	1,1806	1,1827	1,1834	1,1836	1,1837	1,1837	1,1837	1,1836
20	1,2695	1,2712	1,2718	1,2720	1,2720	1,2720	1,2720	1,2719
50	1,4931	1,4939	1,4942	1,4943	1,4942	1,4943	1,4943	1,4942
70	1,5480	1,5483	1,5484	1,5484	1,5484	1,5483	1,5483	1,5483
90	1,5669	1,5670	1,5671	1,5671	1,5671	1,5670	1,5670	1,5670
200	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738	1,5738
7000	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508	1,2508
<b>Rv = -0,00003</b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	1,1222	1,1251	1,1260	1,1263	1,1264	1,1264	1,1263	1,1262
10	1,1818	1,1838	1,1846	1,1848	1,1849	1,1849	1,1848	1,1847
20	1,2718	1,2735	1,2741	1,2743	1,2743	1,2743	1,2743	1,2742
50	1,4985	1,4993	1,4996	1,4996	1,4995	1,4997	1,4997	1,4996
70	1,5549	1,5552	1,5553	1,5553	1,5553	1,5553	1,5553	1,5553
90	1,5756	1,5757	1,5757	1,5757	1,5757	1,5758	1,5757	1,5758
200	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928	1,5928
7000	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158	1,9158

A tabela 5.4 mostra uma excelente convergência da componente de velocidade em três dígitos significativos em todas as posições axiais adotadas, tanto na região de entrada quanto na região mais afastada da entrada do canal. Esta convergência é verificada a partir de  $NV = 32$  tanto na injeção quanto sucção.

Os resultados convergidos em três dígitos significativos mostrados nas tabelas 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 são do ponto de vista da engenharia, resultados considerados excelentes.

Com objetivo de validar o código desenvolvido para a solução deste problema, uma comparação com resultados disponíveis na literatura é realizada. Neste caso o parâmetro  $K_1 = 0$ , os índices do modelo da lei da potência são assumidos  $n = 0,75$  e  $n = 3$  e não são considerados os efeitos de injeção ou sucção. As figuras 5.2 e 5.3 ilustram esta comparação.

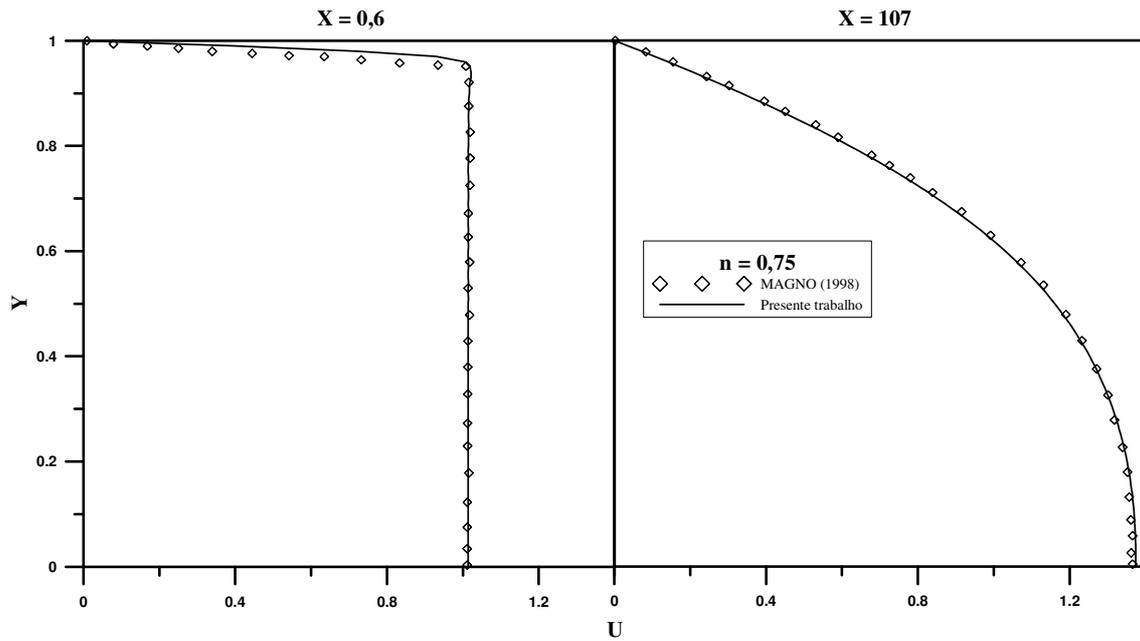


Figura 5.2 - Comparação entre o perfil de velocidade nas regiões de entrada e completamente desenvolvida obtido pela GITT e o trabalho de MAGNO (1998) para o caso  $n = 0,75$ .

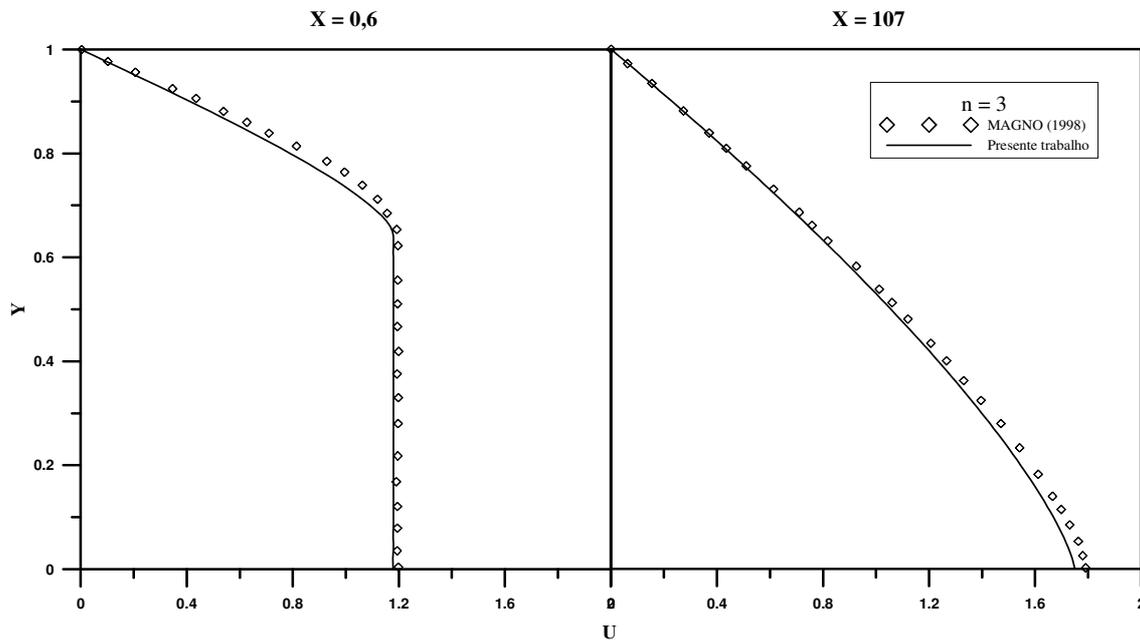


Figura 5.3 - Comparação entre o perfil de velocidade nas regiões de entrada e completamente desenvolvida obtido pela GITT e o trabalho de MAGNO (1998) para o caso  $n = 3$ .

Nota-se das figuras 5.2 e 5.3 uma boa concordância entre os resultados de MAGNO (1998) e os obtidos no presente trabalho. Isto é verificado nas regiões de entrada e completamente desenvolvida, tanto para característica pseudoplástica quanto dilatante do fluido.

As figuras 5.4 e 5.5 mostram os perfis de velocidade desde a região de entrada do canal até a região mais afastada da entrada considerada. Nestes perfis mostram-se as influências do índice  $n$  do modelo da lei da potência e do parâmetro viscoelástico do fluido de segundo grau para uma determinada condição de injeção ou sucção.

Observa-se das figuras 5.4 e 5.5 os efeitos das características pseudoplástica e dilatante nos perfis de velocidade, desde a região de entrada até a região mais afastada do canal. Um fato marcante nestas figuras é que, tanto os comportamentos pseudoplástico quanto dilatante dos perfis de velocidade são afetados pelas taxas de injeção e sucção, mantendo o mesmo comportamento inicial. Não se verificou *a priori* uma relevância dos efeitos do parâmetro viscoelástico de segundo grau para  $K_1 = 0,0001$ . Por outro lado, quando se retiram a influência da injeção ou sucção, estes efeitos ficam bastante relevantes na região de entrada do canal, principalmente no comportamento pseudoplástico, isto é mostrado na figura 5.6 para vários valores de  $K_1$ . No comportamento dilatante, um fato marcante é que não se verificou um efeito significativo do parâmetro viscoelástico de segundo grau, como mostra a figura 5.7. Isto indica que o aumento do índice do modelo da lei da potência tende a sobrepor os efeitos viscoelásticos. No entanto é necessária uma investigação mais detalhada sobre o assunto, pois neste problema foram usados valores típicos de  $n$ , quando o mesmo é usado no modelo de fluido de segundo grau modificado. Vale ressaltar ainda que, a menor posição axial adotada para a entrada do canal é relativamente alta, portanto se faz necessário adotar posições menores e investigar os efeitos do comportamento dilatante do fluido em regiões mais próximas da posição  $X = 0$ .

Ainda nas figuras 5.4 e 5.5 observa-se que, mesma em baixas taxas de injeção ou sucção não se verifica uma região de escoamento completamente desenvolvido na posição mais afastada adotada no presente trabalho.

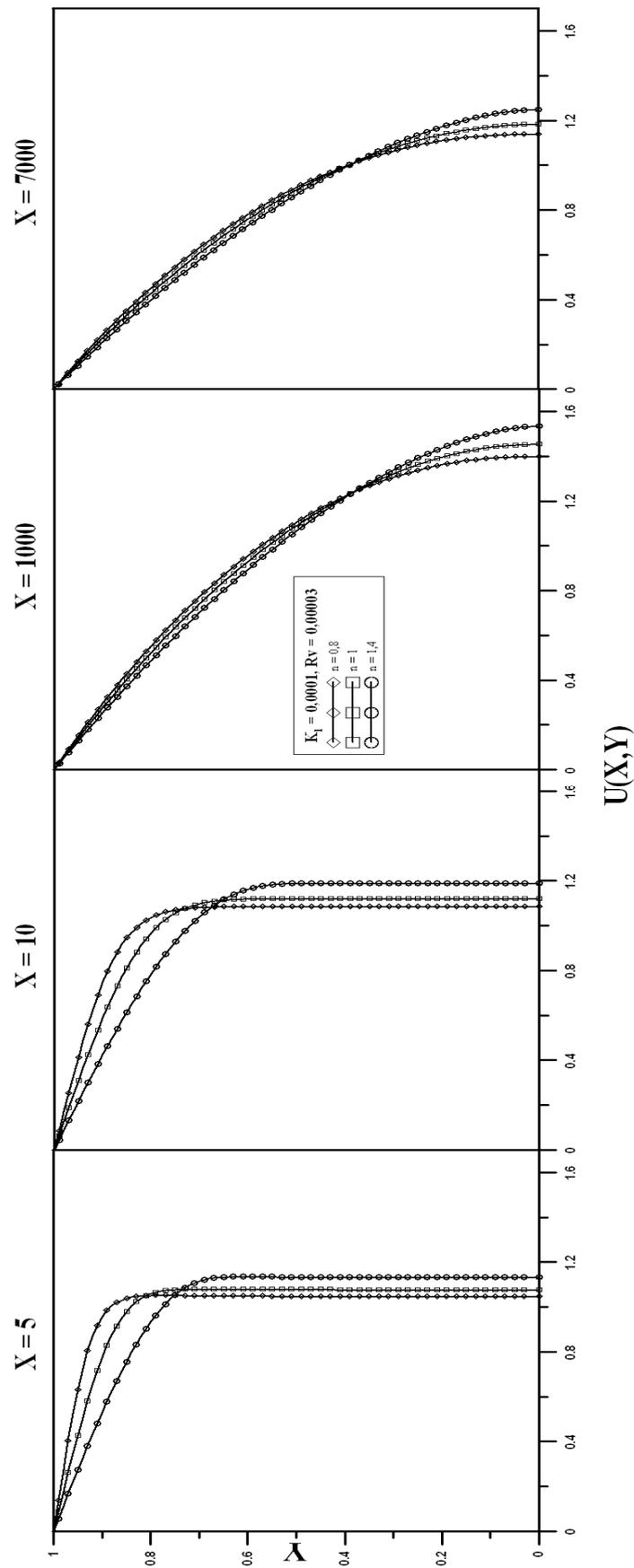


Figura 5.4 - Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de  $n$ , com  $K_I = 0,0001$  e  $R_V = 0,00003$ .

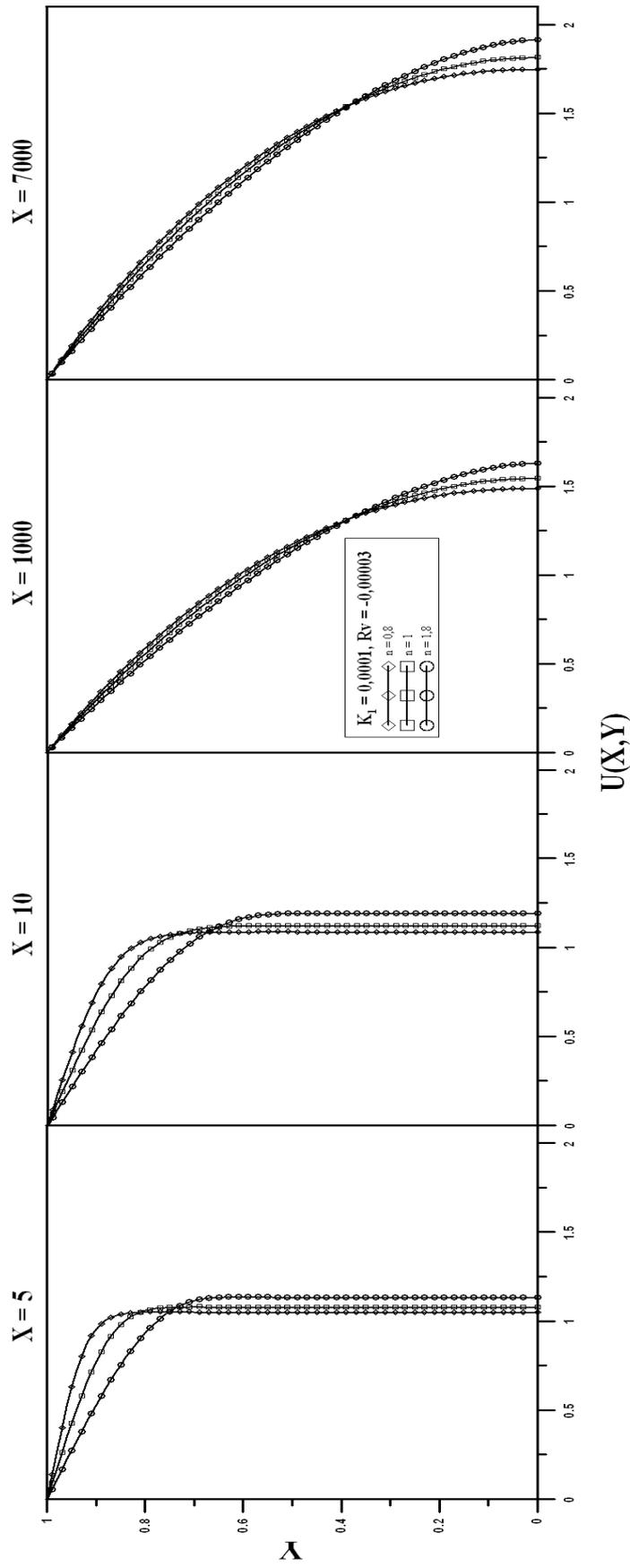


Figura 5.5 - Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de  $\alpha$ , com  $K_I = 0,0001$  e  $Rv = -0,00003$ .

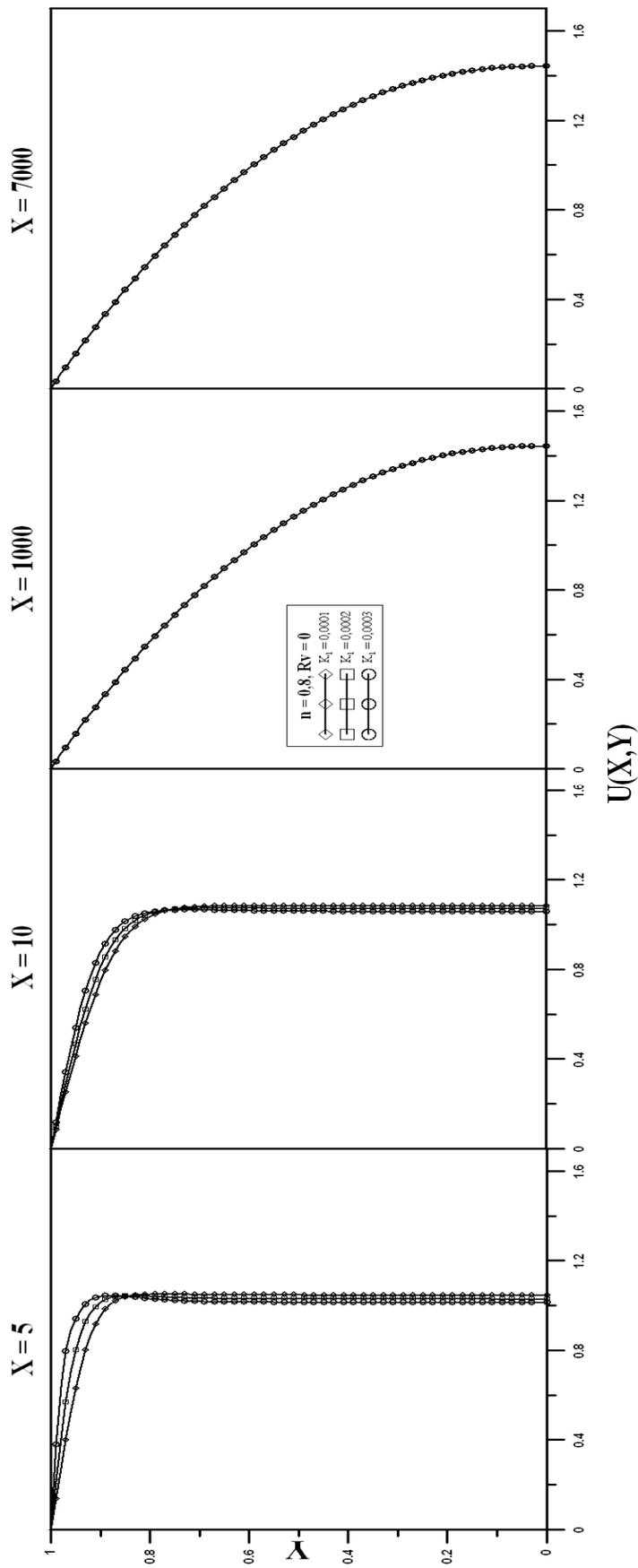


Figura 5.6 - Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de  $K_x$  com  $n = 0.8$  e  $Rv = 0$ .

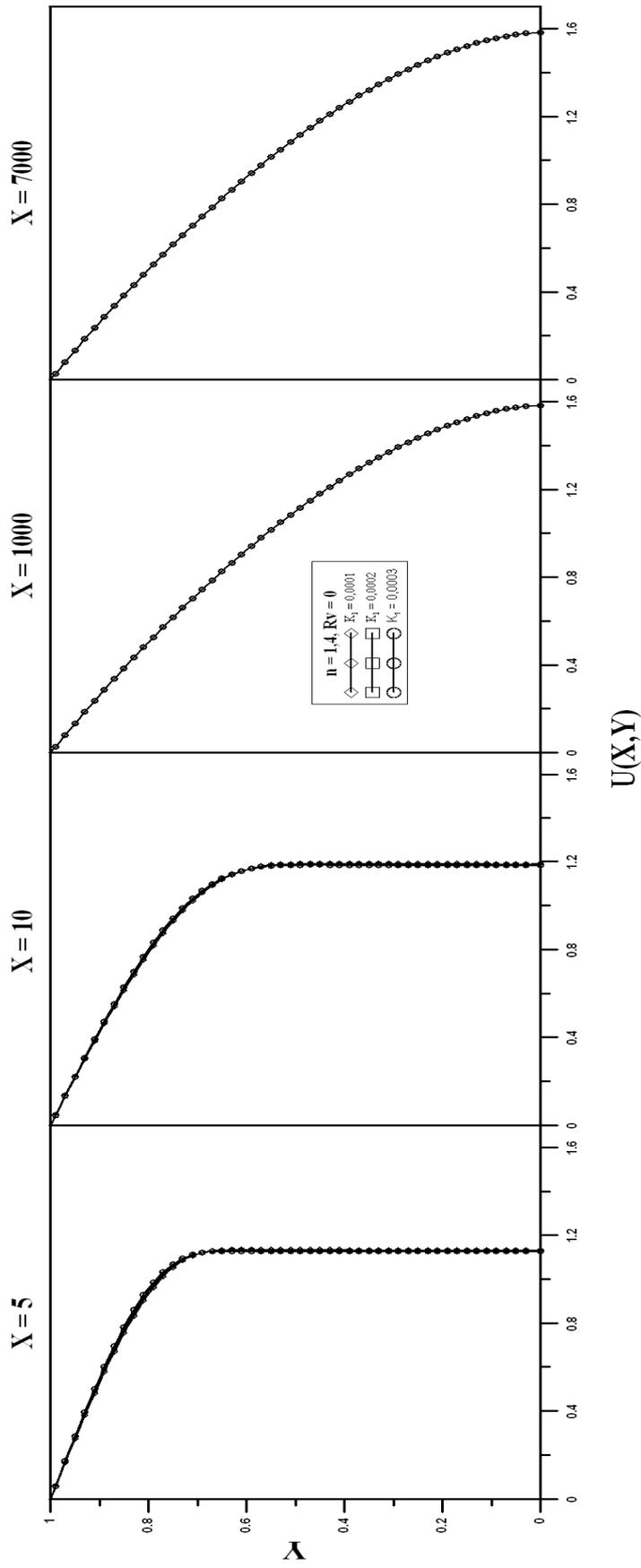


Figura 5.7 - Perfis de velocidade no canal para várias posições axiais e vários valores de  $K_i$  com  $n=1.4$  e  $Rv=0$ .

## 5.4.2-CAMPO DE TEMPERATURA

Como realizado para o campo de velocidade, inicialmente uma análise da taxa de convergência dos resultados para o campo de temperatura será conduzida. Estes resultados foram obtidos para diversas situações de números de Prandtl, números de Eckert, parâmetro viscoelástico de fluido de segundo e índice  $n$  do modelo da lei da potência com efeitos da injeção e sucção no canal.

Em virtude da quantidade de parâmetros investigados serem relativamente grande, somente serão apresentados as tabelas de convergência para situações limites. Com isso, é possível visualizar a potencialidade do código desenvolvido e em seguida mostrar os resultados em forma de gráficos.

Tabela 5.5 - Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 0,8$ ,  $Ec = 0$ ,  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 0,8$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>R_v = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
10	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,9994	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
70	0,9974	0,9974	0,9974	0,9974	0,9974	0,9974	0,9974	0,9973
90	0,9916	0,9916	0,9915	0,9914	0,9913	0,9912	0,9912	0,9912
200	0,9098	0,9092	0,9087	0,9083	0,9080	0,9078	0,9076	0,9073
7000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
<b><math>R_v = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
10	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,9994	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
70	0,9973	0,9974	0,9974	0,9974	0,9973	0,9973	0,9973	0,9973
90	0,9915	0,9915	0,9913	0,9913	0,9912	0,9911	0,9911	0,9910
200	0,9089	0,9084	0,9079	0,9074	0,9071	0,9069	0,9067	0,9064
7000	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005

Tabela 5.6 - Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 0,8$ ,  $Ec = 0$ ,  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 1,4$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>R_v = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
10	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,9994	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
70	0,9976	0,9977	0,9977	0,9977	0,9977	0,9977	0,9977	0,9977
90	0,9927	0,9927	0,9927	0,9927	0,9927	0,9927	0,9927	0,9927
200	0,9207	0,9206	0,9205	0,9204	0,9203	0,9203	0,9202	0,9202
7000	0,0002	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
<b><math>R_v = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
10	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,9994	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
70	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9977	0,9977	0,9977	0,9977
90	0,9926	0,9926	0,9926	0,9926	0,9926	0,9926	0,9926	0,9926
200	0,9198	0,9197	0,9196	0,9195	0,9194	0,9194	0,9193	0,9193

As tabelas 5.5 e 5.6 mostram uma excelente convergência para os potenciais de temperatura em quatro dígitos significativos, tanto no comportamento pseudoplástico quanto no dilatante do fluido de segundo grau modificado, para todas as posições axiais adotadas. Isto é verificado a partir de um número de termos na série  $NV = 40$ . Não foi constatada uma baixa convergência do potencial de temperatura devido a contribuição viscoelástica para os valores de  $K_1$  e  $n$  adotados neste caso.

Tabela 5.7 - Convergência da temperatura adimensional no centro de canal para  $Pr = 0,8$ ,  $Ec = 0,2$ ,  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 0,8$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>Rv = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
10	0,9995	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
70	0,9975	0,9976	0,9976	0,9975	0,9975	0,9975	0,9975	0,9975
90	0,9921	0,9921	0,9920	0,9919	0,9918	0,9918	0,9917	0,9917
200	0,9171	0,9165	0,9160	0,9155	0,9152	0,9150	0,9148	0,9146
7000	0,0672	0,0672	0,0672	0,0672	0,0672	0,0672	0,0672	0,0672
<b><math>Rv = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
10	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
70	0,9975	0,9975	0,9975	0,9975	0,9975	0,9975	0,9975	0,9975
90	0,9921	0,9920	0,9919	0,9918	0,9917	0,9917	0,9916	0,9916
200	0,9164	0,9157	0,9152	0,9147	0,9145	0,9142	0,9140	0,9138
7000	0,1293	0,1293	0,1293	0,1293	0,1293	0,1293	0,1293	0,1293

Tabela 5.8 - Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 0,8$ ,  $Ec = 0,2$ ,  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 1,4$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>R_v = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9995	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
10	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
20	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
50	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998
70	0,9983	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984
90	0,9948	0,9948	0,9948	0,9948	0,9948	0,9948	0,9948	0,9948
200	0,9380	0,9379	0,9377	0,9376	0,9376	0,9375	0,9375	0,9375
7000	0,1075	0,1075	0,1075	0,1075	0,1075	0,1075	0,1075	0,1075
<b><math>R_v = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9995	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
10	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
20	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
50	0,9995	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998
70	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984	0,9984
90	0,9947	0,9948	0,9948	0,9947	0,9947	0,9947	0,9947	0,9947
200	0,9372	0,9371	0,9370	0,9369	0,9369	0,9368	0,9368	0,9368
7000	0,2559	0,2559	0,2559	0,2559	0,2559	0,2559	0,2559	0,2559

Também nas tabelas 5.7 e 5.8 são verificadas excelentes convergências em três algarismos significativos a partir de  $NV = 40$ . Observa-se também que, o aumento do número de Eckert no comportamento pseudoplástico e dilatante do fluido de segundo grau modificado não determinou uma baixa taxa de convergência. Estes resultados mostram que a técnica utilizada conseguiu resolver o problema de maneira satisfatória, pois as não linearidades presente nas equações diferenciais do problema determinam uma dificuldade considerável para qualquer técnica de solução, seja analítica, numérica ou híbrida. Vale ressaltar que a utilização de um filtro mais adequado deve ser investigado, assim melhores taxas de convergência e diminuição do custo computacional serão verificadas.

Tabela 5.9 - Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 50$ ,  $Ec = 0$ ,  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 0,8$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>Rv = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9976	1,0005	1,0007	1,0004	1,0003	1,0001	1,0001	1,0000
10	1,0022	1,0003	0,9997	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,9998	0,9995	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,9994	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
70	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
90	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
200	0,9995	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
7000	0,9921	0,9922	0,9922	0,9922	0,9922	0,9922	0,9922	0,9922
<b><math>Rv = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9978	1,0007	1,0008	1,0005	1,0003	1,0001	1,0000	1,0000
10	1,0023	1,0003	0,9997	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
20	0,9998	0,9996	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,9996	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
70	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
90	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7000	0,9815	0,9814	0,9814	0,9813	0,9813	0,9813	0,9813	0,9813

Tabela 5.10 - Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 50$ ,  $Ec = 0$ ,  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 1,4$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>R_v = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9993	0,9993	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
10	0,9986	0,9999	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
20	0,9994	0,9997	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
50	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
70	0,9995	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
90	0,9995	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
200	0,9994	0,9997	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
7000	0,9924	0,9925	0,9925	0,9925	0,9925	0,9925	0,9925	0,9925
<b><math>R_v = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9993	0,9993	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
10	0,9988	0,9999	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
20	0,9995	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
50	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
70	0,9997	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
90	0,9997	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
200	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7000	0,9812	0,9811	0,9811	0,9811	0,9811	0,9811	0,9810	0,9810

As tabelas 4.9 e 4.10 mostram uma excelente convergência em quatro algoritmos significativos para o potencial de temperatura. Isto mostra que a contribuição do número de  $Pr$  elevado não determinou uma baixa convergência nos resultados do comportamento pseudoplástico e dilatante do fluido de segundo grau modificado.

Tabela 5.11 - Convergência da temperatura adimensional no centro do canal para  $Pr = 50$ ,  $Ec = 0,2$ ,  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 0,8$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>Rv = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9959	0,9995	1,0002	1,0003	1,0003	1,0002	1,0002	1,0001
10	1,0013	1,0003	0,9996	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000
20	0,9993	0,9992	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
50	0,9988	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
70	0,9990	0,9996	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
90	0,9990	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
200	0,9985	0,9994	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
7000	1,1659	1,1668	1,1670	1,1671	1,1671	1,1671	1,1671	1,1672
<b><math>Rv = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9961	0,9996	1,0003	1,0003	1,0003	1,0002	1,0002	1,0001
10	1,0015	1,0003	0,9996	0,9996	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000
20	0,9995	0,9994	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
50	0,9992	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
70	0,9995	0,9997	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
90	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000
200	0,9993	0,9997	0,9998	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7000	1,1889	1,1894	1,1895	1,1895	1,1895	1,1895	1,1895	1,1895

Tabela 5.12 - Convergência da temperatura adimensional no centro de canal para  $Pr = 50$ ,  $Ec = 0,2$ ,  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 1,4$  e valores de injeção e sucção.

<b><math>Rv = 0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9989	0,9989	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999
10	0,9981	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
20	0,9987	0,9996	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
50	0,9991	0,9996	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
70	0,9989	0,9995	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999
90	0,9987	0,9994	0,9997	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999
200	0,9980	0,9994	0,9998	1,0000	1,0000	1,0001	1,0001	1,0001
7000	1,3394	1,3405	1,3407	1,3409	1,3409	1,3409	1,3409	1,3410
<b><math>Rv = -0,00003</math></b>								
<b>X</b>	<b>NV = 14</b>	<b>NV = 20</b>	<b>NV = 26</b>	<b>NV = 32</b>	<b>NV = 36</b>	<b>NV = 40</b>	<b>NV = 44</b>	<b>NV = 48</b>
5	0,9990	0,9990	0,9998	0,9999	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999
10	0,9983	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
20	0,9991	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000
50	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000
70	0,9994	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000
90	0,9993	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000
200	0,9992	0,9998	1,0000	1,0001	1,0001	1,0001	1,0001	1,0002
7000	1,4248	1,4255	1,4256	1,4257	1,4257	1,4257	1,4258	1,4258

As tabelas 5.11 e 5.12 mostram uma convergência em quatro algarismos significativos para o potencial de temperatura. Os resultados para o campo de temperatura se mostraram excelentes em se tratando de taxa de convergência. Isto demonstra que o código desenvolvido é confiável e pode ser usado dentro dos seus limites para analisar escoamento de fluidos de segundo grau modificado no interior de canal de placas paralelas. Em termos de engenharia os resultados obtidos podem ser considerados bastante satisfatórios.

As figuras a seguir mostram o comportamento dos perfis de temperatura em função dos parâmetros de interesse. Inicialmente, as figuras 5.8 e 5.9 mostram o efeito do número de  $Pr$  nos perfis para  $K_1$ ,  $Ec$  e  $Rv$  e  $n$  variável.

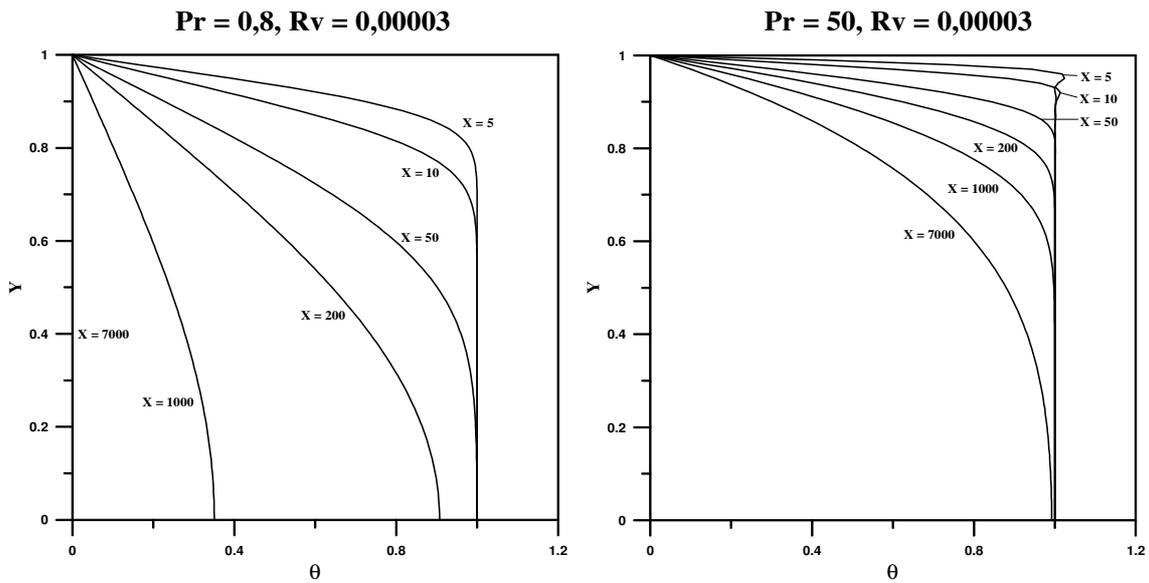


Figura 5.8 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 0,8$ ,  $Ec = 0$ ,  $Rv = 0,00003$ , variando  $Pr$ .

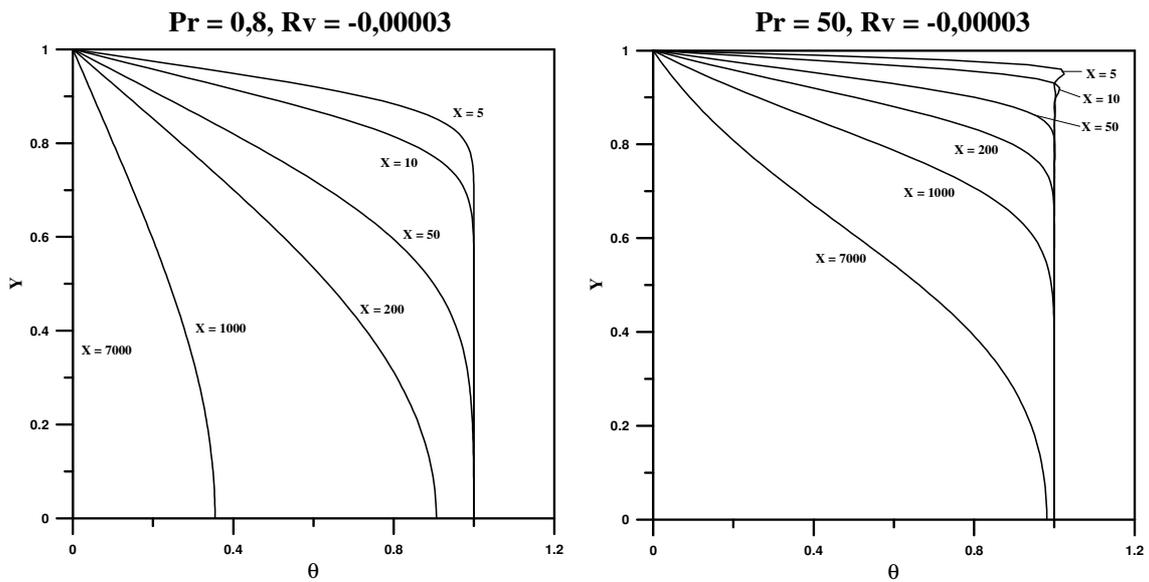


Figura 5.9 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 0,8$ ,  $Ec = 0$ ,  $Rv = -0,00003$ , variando  $Pr$ .

Mostra-se nas figuras 5.8 e 5.9 que o aumento do número de  $Pr$  no comportamento pseudoplástico do fluido, determinou um gradiente de temperatura mais acentuado na parede do canal, o que era esperado do ponto de vista físico. Observa-se também uma perturbação dos perfis de temperatura nas regiões mais afastadas da entrada do canal, devido a injeção ou sucção, mais precisamente, na posição axial  $X =$

7000. Na região de entrada, não se observam efeitos significantes da taxa de injeção ou sucção. Como no problema do escoamento submetido a velocidade transversal constante, tratado no capítulo anterior, aqui verifica-se também uma dificuldade de convergência na região de entrada do canal.

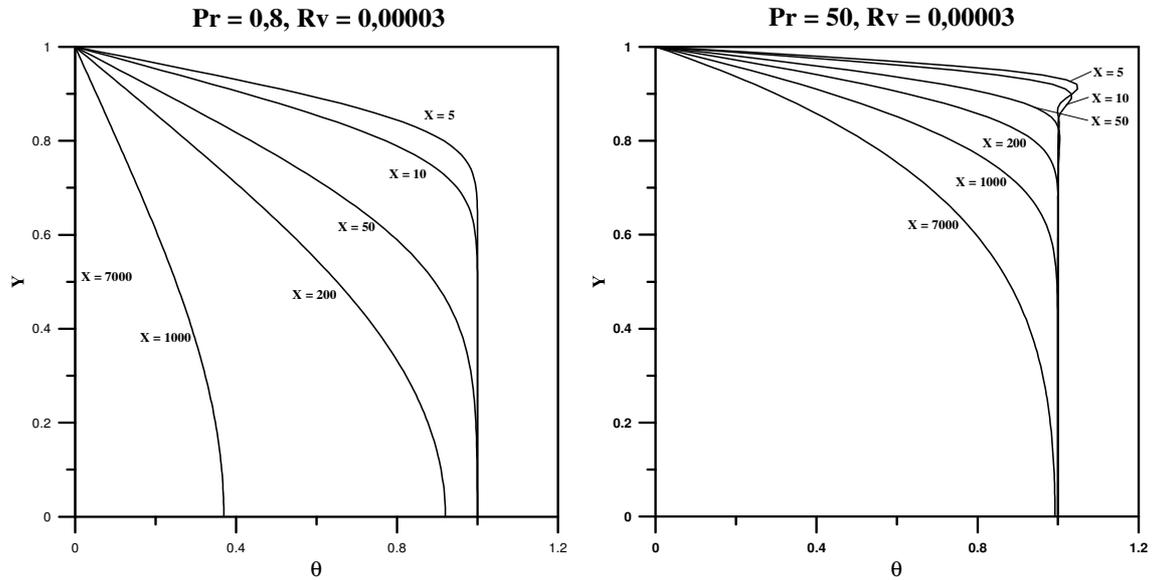


Figura 5.10 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 1,4$ ,  $Ec = 0$ ,  $Rv = 0,00003$ , variando  $Pr$ .

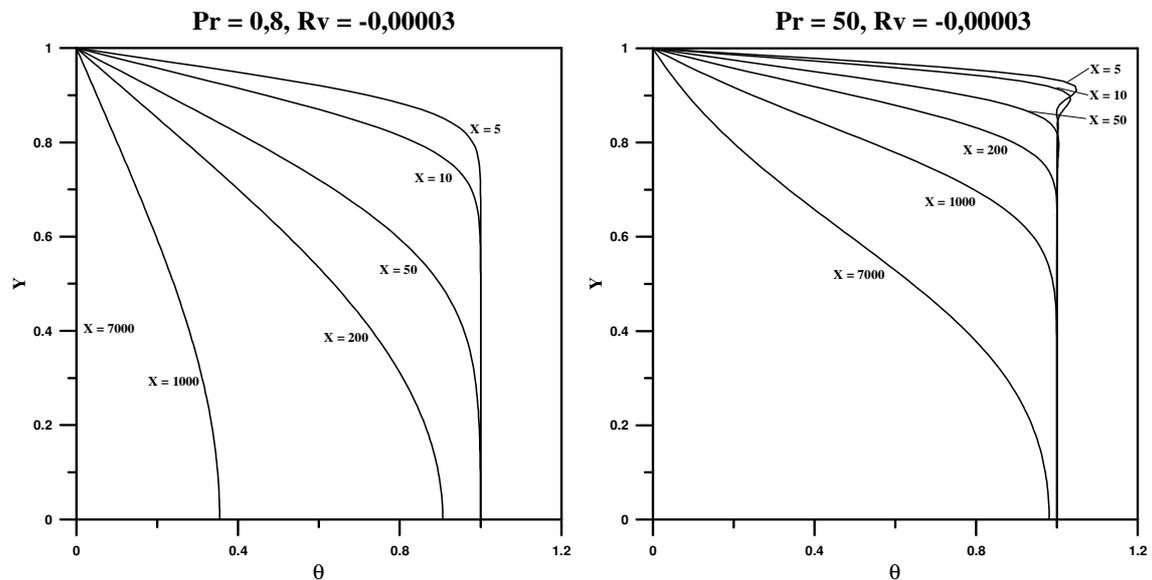


Figura 5.11 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 1,4$ ,  $Ec = 0$ ,  $Rv = -0,00003$ , variando  $Pr$ .

As figuras 5.10 e 5.11 mostram os perfis de temperatura para um comportamento dilatante do fluido de segundo grau modificado, para os mesmos parâmetros de entrada  $K_1$ ,  $n$ ,  $Ec$  e  $Rv$  usados no caso pseudoplástico mostrado nas figuras 5.8 e 5.9 e não se observou diferenças significativas. Os comportamentos dos perfis de temperatura são praticamente idênticos, a não ser pelo gradiente de temperatura mais acentuado na entrada do canal, observado nas posições  $X = 5$  e  $X = 10$  no caso dilatante.

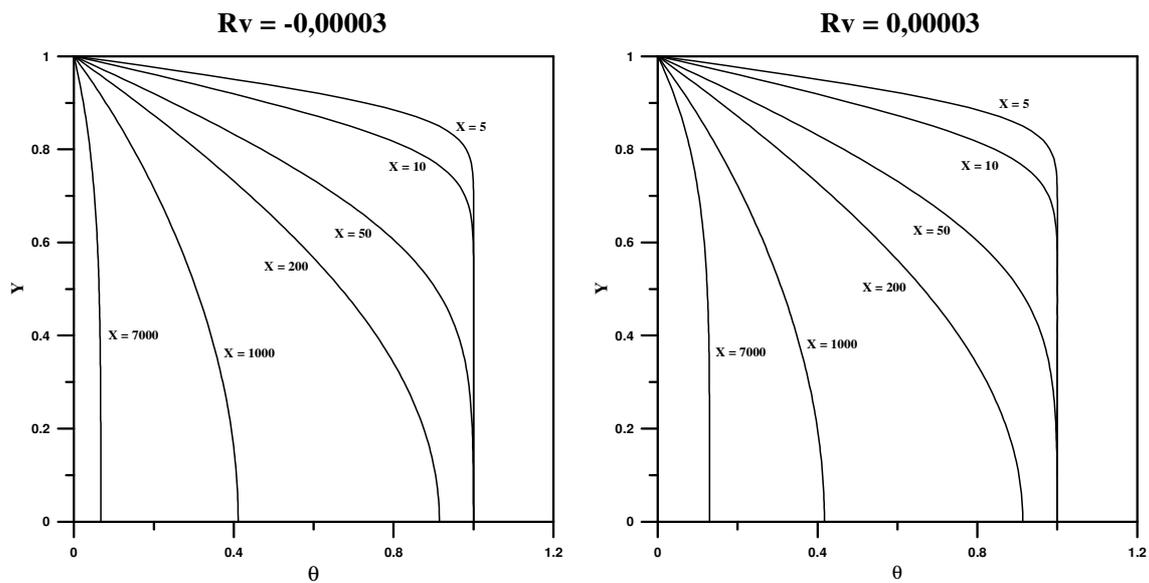


Figura 5.12 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 0,8$ ,  $Pr = 0,8$ ,  $Ec = 0,2$ , com injeção ou sucção.

Nota-se da figura 5.12 que a medida que o escoamento se desenvolve, a taxa de injeção desloca o perfil de temperatura para longe da parede do canal, por outro lado a taxa de sucção direciona o perfil na direção da parede do canal. Um fato observado na figura 5.12 é o efeito de dissipação viscosa praticamente inexistente, mesmo na posição mais afastada do canal  $X = 7000$ . Na figura 5.13 esta dissipação é perfeitamente identificada demonstrando que este tipo de contribuição não pode ser desprezado no escoamento de fluido de segundo grau modificado.

A figura 5.13 mostra os perfis de temperatura ao longo do canal, para uma característica dilatante do fluido em análise no caso de um número de  $Pr$  elevado.

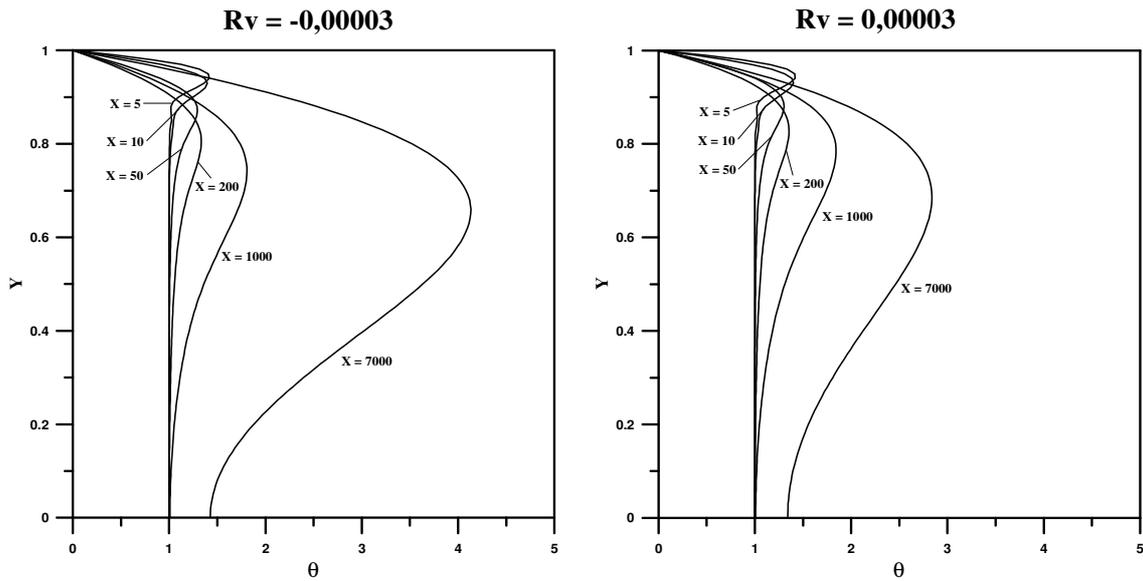


Figura 5.13 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $K_1 = 0,0003$ ,  $n = 1,4$ ,  $Pr = 50$ ,  $Ec = 0,2$ , com injeção ou sucção.

Nos perfis de temperatura mostrados na figura 5.13 é verificada com clareza a influência das taxas de injeção e sucção. Nas posições iniciais de entrada do canal este efeito é pouco percebido, mais a medida que o escoamento se desenvolve, tal efeito torna-se bastante pronunciado. Outra observação marcante é a influência do número de Eckert, este efeito é percebido na situação de injeção ou de sucção, ou seja, a dissipação viscosa juntamente com a contribuição elástica determinam este comportamento nos perfis de temperatura.

A figura 5.14 mostra a influência do parâmetro viscoelástico de segundo grau nos perfis de temperatura.

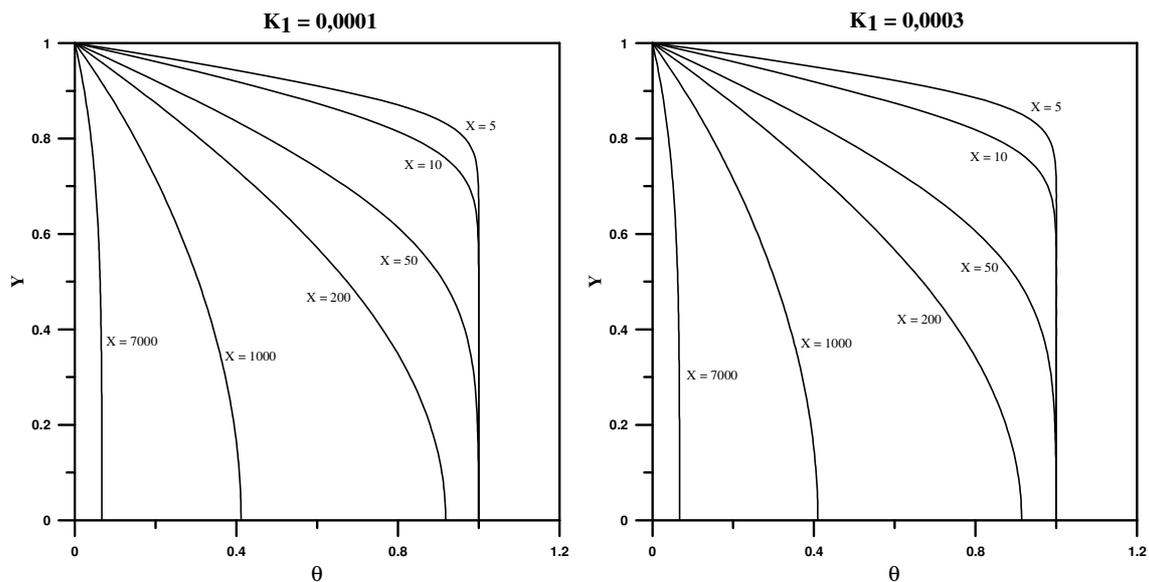


Figura 5.14 – Desenvolvimento do campo de temperatura ao longo da coordenada axial para  $n = 0,8$ ,  $Pr = 0,8$ ,  $Ec = 0,2$ ,  $Rv = 0,00003$  (sucção), variando  $K_1$ .

Na figura 5.14 é mostrada a influência do parâmetro do produto  $K_1.Ec$  nos perfis de temperatura, e nota-se que não houve mudanças significativas nos perfis de temperatura, portanto o trabalho devido a deformação elástica do fluido de segundo grau modificado não influencia de maneira contundente os perfis de temperatura. Logicamente os valores usados para  $K_1$  são valores pequenos e praticamente eliminam a contribuição do produto  $K_1.Ec$ . Contudo, para  $Ec$  elevados a dissipação viscosa é perfeitamente identificada conforme mostra a figura 5.13.

## 5.5-CONCLUSÃO

A metodologia GITT mostrou-se uma excelente ferramenta na obtenção dos campos de velocidade e temperatura no escoamento de um fluido viscoelástico de segundo grau modificado no interior de um canal de placas paralelas. Resultados para o campo de velocidade e temperatura foram obtidos com três algarismos significativos na região de entrada e na região considerada mais afastada da entrada do canal, o que do ponto de vista da engenharia são resultados aceitáveis.

O parâmetro viscoelástico do fluido de segundo grau modificado se mostrou influente nas posições iniciais da entrada do canal, enquanto o índice do modelo da lei

da potência mostrou-se influente na região de entrada e na região mais afastada da entrada do canal.

O efeito do parâmetro de  $R_v$  se mostrou influente nas posições axiais mais afastadas da região de entrada do canal. O efeito físico da injeção de afastar o perfil de velocidade da parede foi verificado nos resultados em forma de gráficos. Da mesma forma foi constatado que o efeito de sucção tende a deslocar o perfil na direção da parede do canal. Um fato marcante dos resultados é que não se encontrou uma região do canal com características de escoamento completamente desenvolvido.

No campo de temperatura foi evidenciado um efeito bastante significativo do número de Eckert, demonstrando que a dissipação viscosa não pode ser desprezada quando há escoamento de fluidos viscoelásticos. Isto ficou claro para altos e baixos números de  $Pr$ . Outro efeito bastante significativo na formação dos perfis de temperatura foi a injeção ou sucção, que praticamente foi observada em todos os perfis em todas as situações investigadas. Não foi observado efeito significativo do parâmetro viscoelástico de segundo grau na formação dos perfis de temperatura.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

A Técnica da Transformada Integral Generalizada mostrou-se uma ferramenta bastante útil na solução das equações diferenciais que modelam o escoamento e a transferência de calor de fluidos viscoelásticos. No problema de escoamento e transferência de calor de um fluido viscoelástico de segundo grau sobre uma placa plana em estiramento contínuo linear sujeita a injeção ou sucção, resultados para o campo de velocidade e temperatura foram obtidos com quatro algarismos significativos, que do ponto de vista da engenharia são resultados considerados excelentes. Neste problema ficou marcante a influência dos parâmetros viscoelástico de segundo grau e taxa de injeção ou sucção na formação dos perfis de velocidade e temperatura. Para o campo de temperatura, o número de Prandtl também se mostrou influente.

No escoamento e na transferência de calor de fluido viscoelástico de terceiro grau no interior de um canal de placas paralelas sujeita a injeção e sucção simultânea, resultados para o campo de velocidade e temperatura foram obtidos com quatro algarismos significativos. O parâmetro viscoelástico de segundo grau se mostrou influente na formação dos perfis de velocidade somente na região de entrada do canal, enquanto o parâmetro viscoelástico de terceiro grau mostrou-se influente na entrada do canal e na região completamente desenvolvida. Os números de Prandtl e Eckert, bem como os parâmetros viscoelásticos determinaram influência marcantes na formação dos perfis de temperatura. A análise destes parâmetros mostrou que a dissipação viscosa não deve ser desprezada no escoamento de fluidos viscoelásticos de terceiro grau.

No caso do escoamento e da transferência de calor de um fluido de segundo grau modificado no interior de um canal de placas paralelas sujeita a injeção ou sucção, resultados para o campo de velocidade e temperatura foram obtidos com três algarismos significativos, que do ponto de vista da engenharia são considerados satisfatórios. As características pseudoplástica e dilatante que compõe o modelo de fluido de segundo grau modificado tiveram influência marcante na formação dos perfis de velocidade, tanto na região de entrada quanto na região considerada mais afastada da entrada do

canal. A componente elástica de segundo grau teve influência somente nas posições iniciais da região de entrada. Outro fato marcante é que não se observou uma região completamente desenvolvida neste tipo de escoamento. As taxas de injeção ou sucção se mostraram bastante influente na formação dos perfis de velocidade e temperatura. A análise dos efeitos dos números de Prandtl e Eckert nos perfis de temperatura deste problema, também mostraram que a dissipação viscosa não deve ser desprezada no escoamento de fluidos viscoelásticos.

Como sugestão para futuros trabalhos tem-se as seguintes colocações:

Para o problema de escoamento e transferência de calor de fluido viscoelástico de segundo grau sobre placa plana estirada linearmente, sugere-se estudar a velocidade do estiramento da placa de forma não linear, ou seja, considerar que a velocidade de estiramento segue uma lei de potência. Para a transferência de calor sugere-se considerar a dissipação viscosa, uma vez que, foi provado no presente trabalho que a mesma não deve ser desconsiderada.

No caso do escoamento e transferência de calor de fluidos viscoelásticos de terceiro grau e segundo grau modificado, sugere-se resolver as equações de forma completa, pois nos problemas de escoamento interno, aqui tratado pela aproximação de camada limite, o parâmetro viscoelástico de segundo grau assumiu valores muito pequenos. Este tipo de tratamento trará análises de alta complexidade para qualquer técnica de solução das equações diferenciais parciais, no entanto, com o aumento vertiginoso da velocidade de processamento dos computadores é possível no futuro tratar tais equações de forma completa e ainda ter um custo computacional baixo. Do ponto de vista da engenharia, é mais vantajoso analisar o escoamento e a transferência de calor de fluidos viscoelásticos no interior de dutos e não somente entre placas, pois as aplicações são mais amplas. No caso específico do problema de escoamento em canal com injeção ou sucção, sugere-se estudar o comportamento do perfil de velocidade em uma região extremamente afastada da entrada, e verificar se o escoamento adquire características semelhante ao completamente desenvolvido.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABEL, M. S., SANJAYANAND, E., NANDEPPANAVAR, M. M., “Viscoelastic MHD Flow and Heat Transfer over a Stretching Sheet with Viscous and Ohmic Dissipations”, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, V. 13, pp. 1808-1821, 2008.

AKSOY, Y., PAKDEMIRLI, M., KHALIQUE, C. M., “Boundary Layer Equations and Stretching Sheet Solutions for Modified Second Grade Fluid”, **International Journal of Engineering Science**, V. 45, pp. 829-841, 2007.

ALMEIDA, A. R. e COTTA, R. M., “A Comparison of Convergence Acceleration Schemes for Eigenfunction Expansions of Partial Differential Equations”, **Int. J. Num. Heat Fluid Flow**, V. 6, n. 6, pp. 85-97, 1996.

ARAÚJO, H. D. C., **Equação de Burguers Não-Linear: Solução via Técnica da Transformada Integral Generalizada**, Dissertação de Mestrado, PPGEQ/ITEC-UFGA, Belém, PA, Brasil, 2007.

ARIEL, P. D., “A Numerical Algorithm for Computing the Stagnation Point Flow of a Second Grade Fluid with/without Suction”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, V. 59, pp. 9-24, 1995.

ARIEL, P. D., “On Exact Solutions of Flow Problems of a Second Grade Fluid through two Parallel Porous Walls”, **International Journal of Engineering Science**, V. 40, pp. 913-941, 2002.

ARIEL, P. D., “Flow of a Third Grade Fluid through a Porous Flat Channel”, **International Journal of Engineering Science**, V. 41, pp. 1267-1285, 2003.

ASGHAR, S.; MOHYUDDIN, M. R., HAYAT, T.; “Unsteady Flow of a Third-Grade Fluid in the Case of Suction”, **Mathematical and Computer Modelling**, V. 38, pp. 201-208, 2003.

ÁVILA, G. S. S., **Funções de uma Variável Complexa**, ed 1º, Rio de Janeiro, editora LTC, 1977.

BATHNAGAR, R. K., GUPTA, G., RAJAGOPAL, K. R., “Flow of an OLDROYD-B Fluid due to a Stretching Sheet in the Presence of a Free Stream Velocity”, **Int. Journal Non-Linear Mechanics**, V. 30, n. 3, pp. 391-405, 1995.

BIRD, R. B., ARMSTRONG, R. C., HASSEGER, O., “Flow Phenomena in Polymeric Liquids”, **Dynamics of Polymeric Liquids**, V. 1, second Edition, chapter 2, New York, John Wiley & Sons, 1987.

BOYCE, E. W, DIPRIMA, R. C., “**Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**”, ed. 8º portuguesa, Rio de Janeiro, Editora LTC, 2006.

CHHABRA, R. P., RICHARDSON, J. F. “Momentum, Heat and Mass Transfer in Boundary Layers”, **Non-Newtonian Flow in the Process Industries-Fundamentals and Engineering Applications**, 2º ed., chapter 7, Madras, Butterworth Heinemann, 2008.

CORTELL, R.; “Similarity Solutions for Flow and Heat Transfer of a Viscoelastic Fluid over a Stretching Sheet”, **International Journal Non-Linear Mechanics**, Vol. 29, N° 2, pp. 155-161, 1994.

COTTA, R. M., **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**, 1ª edição, Boca Raton, CRC Press, 1993.

COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D., **Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation**, New York, John Wiley, 1997.

COTTA, R. M., UNGS, M. J., MIKHAILOV, M. D, “Contaminant Transport in Finite Fractured Porous Medium: Integral Transforms and Lumped-Differential Formulations”, **Annals of Nuclear Energy**, V. 30, pp. 261–285, 2003.

DANDAPAT, B. S., GUPTA, A. S., “Flow and Heat Transfer in a Viscoelastic Fluid over a Stretching Sheet”, **International Journal Non-Linear Mechanics**, V. 24, n. 3, pp. 215-219, 1989.

de BARROS, F. P. J, COTTA, R. M. “Integral Transforms for Three-dimensional Steady Turbulent Dispersion in Rivers and Channels”, **Applied Mathematical Modelling**, V. 31, pp. 2719–2732, 2007.

DUNN, J. E, FOSDICK, R. L.; “Thermodynamics, Stability, and Boundedness of Fluids of Complexity 2 and Fluids of Second Grade”, **Arch. Rat. Mech. Anal.**, V. 56, pp. 191, 1974.

DUNN, J. E., RAJAGOPAL, K. R., “A Critical Historical Review and Thermodynamics Analysis of Fluids of Differential Type”, **International Journal Engineering Science**, V. 33, n. 5, pp. 689-729, 1995.

DUTTA, B. K., GUPTA, A. S., “Cooling of a Stretching Sheet in a Viscous Flow”, **Ind. Eng. Chem. Res.**, V. 26, pp. 333-336, 1987.

ERDOGAN, M. E., IMRAK, C. E., “The Effects of the Side Walls on the Flow of a Second Grade Fluid in Ducts with Injection and Suction”, **International Journal of Non-linear Mechanics**, V. 42, pp. 765-772, 2007.

FEIZ-DIZAJI, A., SALIMPOUR, M. R., JAM, F., “Flow Field of a Third-Grade non-Newtonian Fluid in the Annulus of Rotating Concentric Cylinders in the Presence of Magnetic Field”, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, V. 337, pp. 632-645, 2008.

FIGUEIRA DA SILVA, E., PÉREZ GUERRERO, J. S., COTTA, R. M., “A Comparison of Integral Transform Strategies for Solving the Boundary Layer Equations”, **Proc. Of the 6° Brazilian Congress of Engineering and Thermal Sciences-VI ENCIT**, Florianópolis, Brasil, pp. 73-78, 1996.

FOX, R. W., MCDONALD, A. T., **Introdução à Mecânica dos Fluidos**, ed. 4ª portuguesa, Rio de Janeiro, Editora LTC, 1995.

GRANVILLE, W. A., SMITH, P. F., LONGLEY, W. R., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, ed. 4ª portuguesa, Rio de Janeiro, Editora Científica, 1965.

GUPTA, P. S., GUPTA, A. S., “Heat and Mass Transfer on Stretching Sheet with Suction or Blowing”, **The Canadian Journal of Chemical Engineering**, V. 55, pp. 744-746, 1977.

HAYAT, T. AHMED, N., SAJID, M., “Analytic Solution for MHD Flow of a Third Order Fluid in a Porous Channel”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, V. 214, pp. 572-582, 2008.

HAYAT, T., SAIF, S., ABBAZ, Z., “The Influence of Heat Transfer in an MHD Second Grade Fluid Film over an Unsteady Stretching Sheet”, **Physics Letters A**, V. 372, pp. 5037-5045, 2008.

HAYAT, T., KARA, A. H., “Couette Flow of a Third-grade Fluid with Variable Magnetic Field”, **Mathematical and Computer Modelling**, V. 43, pp. 132-137, 2006.

HAYAT, T., SAJID, M., POP, I., “Three-dimensional Flow over a Stretching Surface in a Viscoelastic Fluid”, **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, V. 9, pp. 1811 – 1822, 2008.

HUGHES, W. F., BRIGHTON, J. A., **“Dinâmica dos Fluidos”**, 1ª edição (Traduzida), EUA, McGRAW-WILL do Brasil, 1974.

**IMSL LIBRARY**, MATH/LIB., Houston, 1989.

KUDENATTI, R. B., AWATI, V. B., “Solution of Pressure Gradient Stretching Plate with Suction”, **Applied Mathematics and Computation**, 2009, in press.

LAI, W. M., RUBIN, D., KREMPL, E., “**Introduction to Continuum Mechanics**”, Third Edition, USA, Butterworth Heinemann, 1999.

LIAO, S-J, “A General Approach to get Series Solution of Non-Similarity Boundary-Layer Flows”, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, 2008, in press.

LIN, J-R., LIANG, L-J., CHIEN, R-D., “Magneto-Hydrodynamic Flow of a Second Order Fluid over a Stretching Sheet with Suction”, **Journal of the Chinese Institute of Engineers**, V. 30, n. 1, pp. 183-188, 2007.

MACÊDO, E. N., **Simulação Computacional e Estimativa de Propriedades Termofísicas na Combustão de Troncos Cilíndricos de Madeira**, Tese de D.Sc., PEM/COPPE – UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1998.

MACÊDO, E. N., MANESCHY, C. E., QUARESMA, J. N. N., “Analysis of the Mass Transfer Entry Region for Drag-Reducing Viscoelastic Fluids in Turbulent Pipe Flow”, **Int. Comm. Heat Mass Transfer**”, V. 27, n. 1, pp. 59-68, 2000a.

MACÊDO, E. N., MANESCHY, C. E., QUARESMA, J. N. N., “Forced Convection in Thermally Developing Turbulent Flow of Drag-reducing Fluids within Circular Tubes”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, V. 43, pp. 3785-3794, 2000b.

MAGNO, R. N. O., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N., “Solutions for Internal Boundary Layer Equations in Simultaneously Developing Flow of Power Law Fluids within Parallel Plates Channels”, **Chemical Engineering Journal**, V. 87, pp. 339-350, 2002.

MAIA, C. R. M., APARECIDO, J. B., MILANEZ, L. F., “Heat Transfer in Laminar Flow of Non-newtonian Fluids in Ducts of Elliptical Section”, **International Journal of Thermal Sciences**, V. 45, pp. 1066-1072, 2006.

MAGNO, R. N. O., “**Soluções das Equações de Camada Limite para um Fluido Não Newtoniano via Técnica da Transformada Integral Generalizada**”, Dissertação de Mestrado, UFPA, Belém, PA, Brasil, 1998.

MAN, C. S., SUN, Q. X., “On the Significance of Normal Stress Effects in the Flow of Glaciers”, **Journal of Glaciology**, V. 33, n. 115, pp. 268-273, 1987.

MANESCHY, C. E., MASSOUDI, M., “Heat Transfer Analysis of a Second Grade Fluid over a Stretching Sheet”, **International J. Math. & Math. Science**, V. 18, n. 4, pp. 765-772, 1995.

MASSOUDI, M., VAIDYA, A., “On some Generalizations of the Second Grade Fluid Model”, **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, V. 9, pp. 1169-1183, 2008.

MASSOUDI, M., CHRISTIE, I., “Effects of Variable Viscosity and Viscous Dissipation on the Flow of a Third Grade Fluid in a Pipe”, **Int. Journal Non Linear Mechanics**, V. 30, n. 5, pp. 687-699, 1995.

MASSOUDI, M., MANESCHY, C. E., “Numerical Solution to the Flow of a Second Grade Fluid over a Stretching Sheet Using the Method of Quasi-Linearization”, **Applied Mathematics and Computation**, V. 149, pp. 165-173, 2004.

MASSOUDI, M., PHUOC, T. X., “Unsteady Motion of a Non-linear Viscoelastic Fluid”, **International Journal of Non-linear Mechanics**, V. 44, pp. 1063-1072, 2009.

MIKHAILOV, M. D., “Splitting – up of Heat Conduction Problems”, **Letter Heat & Mass Transfer**, V. 4, pp. 163-166, 1977.

MIKHAILOV, M.D., OZISIK, M. N., **Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion**, Dover Publications, New York, John Wiley, 1984.

MONTEIRO, E. R., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N, COTTA, R. M., “Laminar Flow and Convective Heat Transfer of Non-newtonian fluids in Doubly Connected Ducts”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, V. 53, pp. 2434-2448, 2010.

MURRAY, R. L., ÖZISIK, M. N., “On the Solution of Heat and Mass Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters”, **ASME J. Heat Transfer**, 96C, pp. 48-51, 1974.

OXARANGO, L, SCHMITZ, P, QUINTARD MICHEL, “Laminar flow in Channels with Wall Suction or Injection: a New Model to Study Multi-channel Filtrations Systems”, **Chemical Engineering Science**, V. 59, pp. 1039-1051, 2004.

PAKDEMIRLI, M., “The Boundary Layer Equations of Third-Grade Fluids”, **International Journal Non-Linear Mechanics**, V. 27, n. 5, pp. 785-793, 1992.

PAKDEMIRLI, M., “Conventional and Multiple Deck Boundary Layer Approach to Second and Third Grade Fluids”, **Int. J. Engng. Science**, V. 32, n. 1, pp. 141-154, 1994.

PAKDEMIRLI, M., SUHUBI, E. S., “Boundary Layer Theory for Second Order Fluids”, **Int. J. Engng. Science**, V. 30, n. 4, pp. 523-532, 1992.

PAPANASTASIOU, T. C., GEORGIU, G. C., ALEXANDROU, A. N., “Laminar Boundary Layer Flows”, **Viscous Fluid Flow**, 1° ed., chapter 8, Boca Raton, CRC Press, 2000.

PEREIRA, L. M., **Solução das Equações de Navier-Stokes e da Energia em Coordenadas Cilíndricas via Transformação Integral**, Tese D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.

PEREZ GUERRERO, J. S., **Solução das equações de Navier-Stokes em Formulação de Função Corrente via Transformação Integral**, Dissertação M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1991.

PONTRELLI, G., “Flow of a Fluid of Second Grade over a Stretching Sheet”, **Int. Journal Non-Linear Mechanics**, V. 30, n. 3, pp. 287-293, 1995.

QUARESMA, J. N. N., **Transformação Integral das Equações de Navier – Stokes para Escoamentos Laminares Tridimensionais**, Tese de D.Sc., PEM/COPPE, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.

RAJAGOPAL, K. R., GUPTA, A. S., “An Exact Solution for the Flow of a Non-Newtonian Fluid Past an Infinite Porous Plate”, **Meccanica**, V. 19, pp. 158-160, 1984.

RAJAGOPAL, K. R., GUPTA, A. S., NA, T. Y., “A Note on the Falkner-Skan Flows of a Non-Newtonian Fluid”, **International Journal Non-Linear Mechanics**, V. 18, n. 4, pp. 313-320, 1984.

RAJAGOPAL, K. R., GUPTA, A. S., WINEMAN, A. S., “On a Boundary Layer Theory for Non-Newtonian Fluids”, **Lett. Appl. Engng. Science**, V. 18, pp. 875-883, 1983.

RAJAGOPAL, K. R., NA, T. Y., GUPTA, A. S., “Flow of a Viscoelastic Fluid over a Stretching Sheet”, **Rheological Acta**, V.23, pp. 213-215, 1984.

RAJAGOPAL, K. R., VEENA, P. H., PRAVIN, V. K., “Oscillatory Motion of an Electrically Conducting Viscoelastic Fluid over a Stretching Sheet in a Saturated Porous Medium with Suction/Blowing”, **Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering**, V. 2006, Article ID 60560, pp. 1-14, 2005.

RENARDY, M., “Phenomena in Non-Newtonian Flows”, **Mathematical Analysis of Viscoelastic Flows**, 1a edition, chapter 1, Philadelphia, SIAM, 2000.

RIVLIN, R. S., ERICKSEN, J. L.; “Stress Deformation Relations for Isotropic Materials”, **J. Rat. Mech., Anal.**, V. 4, pp. 323–425, 1955.

RUCKESTEIN, E.; “Thermal and Diffusion Boundary Layers in Viscoelastic Flows”, **Ind. Eng. Chem. Res.**, V. 33, pp. 2331-2335, 1994.

SAJID, M., AHMAD, I.; HAYAT, T.; AYUB, M., “Unsteady Flow and Heat Transfer of a Second Grade Fluid over a Stretching Sheet”, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, V. 14, pp. 96-108, 2009.

SAJID, M., HAYAT, T., ASGHAR, S., “Non-similar Analytic Solution for MHD Flow and Heat Transfer a Third-order Fluid over a Stretching Sheet”, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, V. 50, pp. 1723-1736, 2007.

SAKIADIS, B. C., “Boundary Layer Behavior on Continuous Solid Surfaces: I Boundary Layer Equations for two Dimensional and Axisymmetric Flow”, **AIChE J.**, V. 7, pp. 26–28, 1961.

SCHLICHTING, H., “**Boundary Layer Theory**”, Seventh Edition, New York, Macgraw-Hill, 1979.

SCOFANO NETO, F., COTTA R. M. E MIKHAIL M. D., “Alternative Approach to the Integral Transform Solution of Nonhomogeneous Diffusion Problems”, **In: Pro. Of the 1° Int. Conf. on Advanced Computational Methods in Heat Transfer, “Heat Transfer 90”**, V. 1, pp. 239-250, Southampton, UK, July 1990.

SIDDIQUI, A. M., HAMEED, M., SIDDIQUI, B. M., GHORI, Q. K., “Use of Adomian Decomposition Method in the Study of Parallel Plate Flow of a Third-Grade Fluid”, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.**, article in press, 2009.

SIDDIQUI, A. M., ZEB, A., GHORI, Q. K., BENHARBIT, A. M., “Homotopy Perturbation Method for Heat Transfer Flow of a Third-Grade Fluid between Parallel Plates”, **Chaos, Solitons and Fractals**, V. 36, pp. 182-192, 2008.

SINGH, A. K., “Heat Source and Radiation Effects on Magneto-Convection Flow of a Viscoelastic Fluid past a Stretching Sheet: Analysis with Kummer’s Functions”, **International Communications in Heat and Mass Transfer**, V. 35, pp. 637-642, 2008.

SPIEGEL, M. R., LIU, J., **Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas**, ed. 2º, São Paulo, editora BOOKMAN, 2004.

SURMA DEVI, C. D., NATH, G., “Flow and Heat Transfer of a Viscoelastic Fluid over a Stretching Sheet with Variable Wall Temperature or Heat Flux”, **Indian Journal of Technology**, V. 28, pp. 93-99, 1990.

TALAY AKYILDIZ, F., “A Note on the Flow of a Third-Grade Fluid between heated Parallel Plates”, **International Journal of non-linear mechanics**, V. 36, pp. 349-352, 2001.

TRUESDELL, C., NOLL, W., “Fluidity”, In: Antman, S. S. (ed.), **The Non-Linear Field Theories of Mechanics**, topic: Simple Fluids, item: Special simple fluids, Section: 121, 122, 123, third Edition, chapter E, Heidelberg, Springer-Verlag, 2004.

TZIRTZILAKIS, E. E., TANOUDIS, G. B., “Numerical Study of Biomagnetic Fluid Flow over a Stretching Sheet with Heat Transfer”, **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, V. 13, n. 7, pp. 830-848, 2003.

VAJRAVELU, K., ROLLINS, D., “Hydromagnetic Flow of a Second Grade Fluid over a Stretching Sheet”, **Applied Mathematics and Computation**, 148, pp. 783–791, 2004.

VENEZUELA, A. L., PÉREZ-GUERRERO, J. S., FONTES, S. R., “Hybrid Modeling of Convective Laminar Flow in a Permeable Tube Associated with the Cross-Flow Process”, **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, V. 14, pp. 795–810, 2009.

WALTERS, K., “On a Boundary Layer Controversy”, **ZAMP**, Brief Reports, V. 21, pp. 276-281, 1970.

WANG, C. Y., “Analysis of Viscous Flow due to a Stretching Sheet with Surface Slip and Suction”, **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, V. 10, pp. 375-380, 2009.

WANG, Y.; WU, W.; “Unsteady flow a Fourth-grade Fluid due to an Oscillating Plate”, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, V. 42, pp. 432-441, 2007.

WHITE, F., “**Viscous Fluid Flow**”, Second Edition, New York, Macgraw-Hill, 1991.

YÜRÜSOY, M., PAKDEMIRLI, M., “Approximate Analytical Solutions for the Flow of a Third-Grade Fluid in a Pipe”, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, V. 37, pp. 187-195, 2002.

YÜRÜSOY, M., PAKDEMIRLI, M., “Exact Solutions of Boundary Layers Equations of a Special Non-Newtonian Fluid over a Stretching Sheet”, **Mechanics Research Communications**, V. 26, n. 2, pp. 171-175, 1999.

## APÊNDICE I

Demonstração das equações diferenciais da conservação da massa, quantidade de movimento e energia para os fluidos de segundo grau, terceiro grau e segundo grau modificado.

### I.1-Fluido de segundo grau

Conforme demonstrado no capítulo 3, o modelo constitutivo de um fluido de grau  $n$  (onde neste caso  $n$  assumirá o valor três) se apresenta como

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta_1\mathbf{A}_3 + \beta_2(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_1 \quad (\text{I.1})$$

Para um fluido de segundo grau tem-se  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) = 0. Portanto, o modelo constitutivo torna-se

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 \quad (\text{I.2})$$

A equação da conservação da massa é dada por:

$$\rho\nabla\cdot\mathbf{v} + \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (\text{I.3})$$

Com as hipóteses de escoamento incompressível, laminar e permanente para o problema, a equação (I.3) se reduz a

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.4})$$

A equação (I.4) é a forma invariante da equação da conservação da massa com as devidas hipóteses, porém para fins da aplicação da técnica da transformada integral generalizada, é necessário apresentar a mesma na sua forma diferencial. Desta maneira, apresenta-se inicialmente a equação na sua forma indicial, e em seguida desenvolve-se de acordo com as hipóteses simplificadoras. Assim:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \text{ somatório no índice } i \quad (\text{I.5})$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{I.6})$$

Considerando as hipóteses citadas e assumindo a notação comumente usada para a direção e velocidade em coordenadas cartesianas ( $x_1 = x$ ;  $x_2 = y$ ;  $v_1 = u$ ;  $v_2 = v$ ). Têm-se para (I.6):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I.7})$$

A equação invariante da conservação da quantidade de movimento é dada por:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{B} \quad (\text{I.8})$$

Substituindo o modelo constitutivo do tensor tensão para o fluido de segundo grau na equação (I.8) e considerando a hipótese de ausência de forças de corpo, têm-se

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \left[ -p\mathbf{I} + \mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 \right] \quad (\text{I.9})$$

O primeiro e o segundo tensores de Rivlin-Ericksen na equação (I.9) na sua forma indicial se apresentam como:

$$\mathbf{A}_1 = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad \text{Somatório nos índices } i \text{ e } j \quad (\text{I.10})$$

$$\mathbf{A}_2 = \frac{D}{Dt} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right] + \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right] \cdot \left[ \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} \right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell \right] + \left[ \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right] \cdot \left[ \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell \right] \quad (\text{I.11})$$

Somatório em  $i, j, k, \ell$  na equação (I.11). Os produtos  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  e  $\mathbf{e}_k \mathbf{e}_\ell$  são as unidades diádicas (BIRD *et al.*, 1987).

Para efeito de cálculo, é conveniente também apresentar as notações indiciais para o operador  $\nabla$  e campo de velocidade  $\mathbf{v}$ . Logo

$$\nabla = \mathbf{e}_m \frac{\partial}{\partial x_m} \quad \text{Somatório em } m \quad (\text{I.12})$$

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i \quad \text{Somatório em } i \quad (\text{I.13})$$

Substituindo (I.10), (I.11), (I.12) e (I.13) em (I.9) e operando com a derivada material e divergência, respeitando as devidas operações de produtos escalares entre dois tensores, obtêm-se para a equação da quantidade de movimento

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \mathbf{e}_i = & - \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} \mathbf{I}_{ii} \right\} \mathbf{e}_i + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m^2} \right\} \mathbf{e}_i + \alpha_1 \left\{ \frac{\partial^3 v_m}{\partial t \partial x_m \partial x_j} + \frac{\partial^3 v_i}{\partial t \partial x_m^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) \right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} \right\} \mathbf{e}_i + \quad (\text{I.14}) \\ & \alpha_2 \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \right. \\ & \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} \right\} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

A equação indicial para quantidade de movimento ainda pode ser simplificada, observando que alguns termos satisfazem a equação da continuidade, ou seja,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  e que a ordem de diferenciação é irrelevante no caso de funções exatas. Assim

$$\begin{aligned}
\rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \mathbf{e}_i &= - \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} I_{ii} \right\} \mathbf{e}_i + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m^2} \right\} \mathbf{e}_i + \\
\alpha_1 \left\{ \frac{\partial^3 v_i}{\partial t \partial x_m^2} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) \right] \right\} &+ \quad (I.15) \\
\frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} &\left\} \mathbf{e}_i + \\
\alpha_2 \left\{ \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} \right) \right\} &\mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

Com as restrições impostas pela termodinâmica (equações 3.14), a equação (I.15) fica

$$\begin{aligned}
\rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \mathbf{e}_i &= - \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} I_{ii} \right\} \mathbf{e}_i + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m^2} \right\} \mathbf{e}_i + \alpha_1 \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_m^2} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) \right. \right. \\
+ v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) \left. \left. \right] \right\} \mathbf{e}_i &- \alpha_1 \left\{ \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \right. \right. \\
\left. \left. \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_m \partial x_k} \right) \right\} \mathbf{e}_i & \quad (I.16)
\end{aligned}$$

Considerando ainda as hipóteses de escoamento bidimensional em regime permanente, obtêm-se ainda para (I.16)

$$\begin{aligned}
\rho \left\{ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \mathbf{e}_i &= - \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} I_{ii} \right\} \mathbf{e}_i + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m^2} \right\} \mathbf{e}_i + \\
\alpha_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) \right] \right\} \mathbf{e}_i &- \quad (I.17) \\
\alpha_1 \left\{ \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_m \partial x_k} \right) \right\} \mathbf{e}_i &
\end{aligned}$$

Fazendo-se as devidas expansões nos índices livres m e k e assumindo  $i = 1, 2$  para as direções x; a equação (I.17) toma a seguinte forma

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( 5 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + v_1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3} + v_2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \right. \\ \left. v_1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + v_2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_2^3} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) \quad (\text{I.18})$$

$$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_2} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + v_1 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_1^3} + \right. \\ \left. v_2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + v_1 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^2 \partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + 5 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + v_2 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3} \right) \quad (\text{I.19})$$

Assim como feito para a equação da continuidade, (I.18) e (I.19) ficam:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( 5 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (\text{I.20})$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) \quad (\text{I.21})$$

Que são as equações da conservação do momento nas direções x e y.

A equação da conservação de energia na sua forma invariante é dada por

$$\rho \frac{Du^*}{Dt} = \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho q_s \quad (\text{I.22})$$

onde  $u^*$  é a energia interna específica,  $\mathbf{T}$  é o tensor tensão,  $\mathbf{D}$  (LAI *et al.*, 1999) é a parte simétrica do tensor taxa de deformação,  $\mathbf{q}$  a taxa de transferência de calor por condução e  $q_s$  é a fonte de calor. Com objetivo de melhorar a compreensão do

desenvolvimento da equação indicial da energia é necessário mostrar as equações para  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $q$  e  $u^*$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -p\mathbf{I}_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \alpha_1\left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial t\partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial t\partial x_i} + v_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + v_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + v_3\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + 2\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right]\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j + \alpha_2\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \quad (\text{I.24})$$

$$q = -k\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\mathbf{e}_i \quad \text{lei de Fourier} \quad (\text{I.25})$$

$$du^* = c_p dT \quad (\text{I.26})$$

A equação (I.26) é na verdade uma aproximação, válida para fluidos incompressíveis e sólidos. Desta maneira, substituindo as equações para  $\mathbf{D}$ ,  $q$ ,  $u^*$  e  $\mathbf{T}$  na equação (I.22) e considerando a hipótese de não haver consumo nem geração de energia, têm-se para a equação da energia:

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= \frac{\mu}{2} \left( 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) + \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_j} + \right. \\
&\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t \partial x_i} + v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1 \partial x_j} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1 \partial x_j} + v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1 \partial x_i} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1 \partial x_i} + \\
&v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2 \partial x_j} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2 \partial x_j} + v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2 \partial x_i} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2 \partial x_i} + v_3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3 \partial x_j} + \\
&v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3 \partial x_j} + v_3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_3 \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \\
&\left. \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\alpha_2}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \right. \\
&\left. \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \\
&k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right) \tag{I.27}
\end{aligned}$$

Fazendo  $i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2$  para as direções e componentes de velocidade; e considerando as hipóteses termodinâmicas (3.14), a equação (I.27) fica

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) &= \mu \left( 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \right) + \\
&\alpha_1 \left( 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t \partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x_2} + 4v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \right. \\
&v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 4v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \\
&\left. v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) \tag{I.28}
\end{aligned}$$

Considerando a hipótese de escoamento permanente e assumindo a notação comumente usada para a direção e velocidade em coordenadas cartesianas ( $x_1 = x; x_2 = y; v_1 = u; v_2 = v$ ). Têm-se para (I.28):

$$\begin{aligned} \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left( 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + \\ \alpha_1 \left( 4u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\ \left. v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (I.29)$$

Com a hipótese de ausência de dissipação viscosa e trabalho devido a deformação elástica, (I.29) fica

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (I.30)$$

As equações (I.7), (I.20), (I.21) e (I.30) representam as equações diferenciais para conservação da massa, quantidade de movimento e energia na análise do problema de escoamento e transferência de calor de um fluido de segundo grau sobre uma placa plana em estiramento contínuo linear.

## I.2-Fluido de terceiro grau

A equação da conservação da massa é a mesma do problema anterior considerando as devidas hipóteses simplificadoras. Logo

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (I.31)$$

A equação da quantidade de movimento sofre modificações, pois como demonstrado no capítulo 3, o tensor tensão de um fluido de segundo grau é diferente do tensor tensão de um fluido de terceiro grau. Assim tem-se:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot \left[ -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta_1\mathbf{A}_3 + \beta_2(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_1 \right] \quad (I.32)$$

Considerando as restrições termodinâmicas para um fluido de terceiro grau dado nas equações (4.2), tem-se

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta_3(\text{tr}\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_1] \quad (\text{I.33})$$

Utilizando a propriedade de simetria para um tensor de segunda ordem, conclui-se que  $(\text{tr}\mathbf{A}_2) = \text{tr}(\mathbf{A}_1^2)$ . Portanto, a equação (I.33) é rerepresentada da seguinte forma (ARIEL, 2003):

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 + \beta_3\text{tr}(\mathbf{A}_1^2)\mathbf{A}_1] \quad (\text{I.34})$$

O primeiro e o segundo tensores de Rivlin-Ericksen em sua forma indicial, bem como o operador nabla e campo de velocidade  $\mathbf{v}$  já foram apresentados. Portanto, operando a derivada material, a divergência e respeitando o produto escalar entre dois tensores presentes na equação (I.34), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \mathbf{e}_i = & - \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} I_{ii} \right\} \mathbf{e}_i + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m^2} \right\} \mathbf{e}_i + \alpha_1 \left\{ \frac{\partial^3 v_m}{\partial t \partial x_m \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_m^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) \right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} \right\} \mathbf{e}_i + \quad (\text{I.35}) \\ & \alpha_2 \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \right. \\ & \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} \right\} \mathbf{e}_i + \beta_3 \left\{ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right) \left( 2 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_m \partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_j} + \right. \right. \\ & \left. \left. 2 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_j} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_m \partial x_k} \right) + \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m^2} \right) \left[ \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right] \right\} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

A equação (I.35) pode ainda ser simplificada considerando as hipóteses de escoamento bidimensional, permanente e incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Assim:

$$\begin{aligned}
\rho \left\{ v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \mathbf{e}_i &= - \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} \mathbf{I}_{ii} \right\} \mathbf{e}_i + \mu \left\{ \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m^2} \right\} \mathbf{e}_i + \alpha_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) \right] \right. \\
&+ \left. \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} \right) \right\} \mathbf{e}_i + \\
\alpha_2 &\left\{ \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} \right) \right\} \mathbf{e}_i + \\
\beta_3 &\left\{ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_i} \right) \left( 2 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_m \partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_j} + 2 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_j} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_m \partial x_k} \right) \right. \\
&\left. \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m^2} \right) \left[ \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right] \right\} \mathbf{e}_i
\end{aligned} \tag{I.36}$$

Fazendo-se as devidas expansões nos índices livres  $j, m, k$  e assumindo  $i = 1, 2$  para as direções  $x$ ; a equação (I.36) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}
v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left( 13 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + \right. \\
v_1 &\left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_2^2 \partial x_1} \right) + v_2 \left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( 2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\
3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &\left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) \left. + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) + \right. \right. \\
\frac{\partial v_2}{\partial x_1} &\left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) \left. + \frac{\beta_3}{\rho} \left[ 40 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + 24 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 24 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \right. \\
+ 12 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} &+ 8 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + 8 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + 8 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \\
6 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} &+ 6 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - 4 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} - 2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} - 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \left. \right]
\end{aligned} \tag{I.37}$$

$$\begin{aligned}
v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \left( 13 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) + \right. \\
v_1 \left( \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^2 \partial x_1} \right) &+ v_2 \left( \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) + 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left( 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\
3 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) &+ 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + \right. \\
\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) &+ \frac{\beta_3}{\rho} \left[ 40 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + 24 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + 24 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right. \\
+ 12 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} &+ 8 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + 8 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + 8 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \\
6 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} &+ 6 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} - 4 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} - 2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} - 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \left. \right]
\end{aligned} \tag{I.38}$$

Assumindo a notação comumente usada para a direção e velocidade em coordenadas cartesianas ( $x_1 = x$ ;  $x_2 = y$ ;  $v_1 = u$ ;  $v_2 = v$ ). Têm-se para (I.37) e (I.38):

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( 13 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \right. \\
u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right) &+ v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \\
3 \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &+ 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \right. \\
\frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) &+ \frac{\beta_3}{\rho} \left[ 40 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 24 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
+ 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &+ 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 8 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\
6 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &+ 6 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left. \right]
\end{aligned} \tag{I.39}$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \left( 13 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \right. \\
& u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} \right) + v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\
& \left. 3 \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \right. \\
& \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left. \right] + \frac{\beta_3}{\rho} \left[ 40 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 24 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 24 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\
& + 12 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \\
& \left. 6 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 6 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]
\end{aligned} \tag{I.40}$$

A equação indicial para o tensor tensão de um fluido de terceiro grau é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} = & -p I_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \alpha_1 \left[ \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial t \partial x_i} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \right. \right. \\
& \left. \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \left. \right] \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \alpha_2 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \right. \\
& \left. \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \beta_3 \left[ \left( \frac{\partial v_n}{\partial x_m} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_m}{\partial x_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_m} \right] \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j
\end{aligned} \tag{I.41}$$

Substituindo as equações para  $\mathbf{D}$ ,  $q$ ,  $u^*$  e  $\mathbf{T}$  (fluido de terceiro grau) na equação (3.13) e considerando a hipótese de dissipação viscosa e trabalho devido a deformação elástica, têm-se para a equação da energia:

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = & \frac{\mu}{2} \left( 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) + \frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_j} + \right. \\
& \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t \partial x_i} + v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1 \partial x_j} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1 \partial x_j} + v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1 \partial x_i} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1 \partial x_i} + \\
& v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2 \partial x_j} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2 \partial x_j} + v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2 \partial x_i} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2 \partial x_i} + v_3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3 \partial x_j} + \\
& v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3 \partial x_j} + v_3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_3 \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \\
& \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\alpha_2}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \right. \\
& \left. \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \\
& + \frac{\beta_3}{2} \left[ 2 \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \right)^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + 2 \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right)^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + 4 \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \right)^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right)^2 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \right)^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right)^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \right. \\
& \left. 2 \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right)
\end{aligned} \tag{I.42}$$

Fazendo  $i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2; m = 1, 2$  para as direções e componentes de velocidade; e considerando as hipóteses de escoamento permanente, bidimensional, a equação (I.42) fica:

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = & \mu \left( 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)^2 \right) + \\
& \alpha_1 \left( 4 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 4 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \right. \\
& v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left. \right) + \\
& \beta_3 \left[ 34 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^4 + 34 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 6 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + 8 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \right. \\
& 8 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 8 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + 4 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + 8 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + \\
& 2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^4 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \\
& \left. 4 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right)
\end{aligned} \tag{I.43}$$

Assumindo a notação comumente usada para a direção e velocidade em coordenadas cartesianas ( $x_1 = x$ ;  $x_2 = y$ ;  $v_1 = u$ ;  $v_2 = v$ ). Têm-se para (I.43):

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = & \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
\alpha_1 \left( 4u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \right. \\
& \left. v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \\
\beta_3 \left[ 34 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 + 34 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 6 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 8 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
& 8 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 8 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + 4 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + 8 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \\
& 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^4 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \\
& \left. 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{I.44}
\end{aligned}$$

As equações (I.31), (I.39), (I.40) e (I.44) representam as equações diferenciais para conservação da massa, quantidade de movimento e energia na análise do problema de escoamento e transferência de calor de um fluido de terceiro grau no interior de um duto de placas paralelas.

### I.3-Fluido de segundo grau modificado

A equação da conservação da massa é a mesma dos problemas anteriores considerando as devidas hipóteses simplificadoras. Logo

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{I.45}$$

A equação da quantidade de movimento naturalmente sofre modificações, pois um termo referente a lei da potência é incluído no tensor constitutivo. Assim tem-se:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \left[ -p\mathbf{I} + \mu \Pi^{\frac{b}{2}} \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 \right] \quad (\text{I.46})$$

Operando a derivada material, a divergência e respeitando o produto escalar entre dois tensores presentes na equação (I.46), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \mathbf{e}_i = & - \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} I_{ii} \right\} \mathbf{e}_i + \mu \left\{ \left[ \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \right]^{\frac{b}{2}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \right. \\ & \frac{b}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \right]^{\frac{b}{2}-1} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_1} + \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_k \partial x_j} + \right. \\ & \left. \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_1} \right] \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \left. \right\} \mathbf{e}_i + \alpha_1 \left\{ \frac{\partial^3 v_m}{\partial t \partial x_m \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_m^2} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) \right] + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} \right\} \mathbf{e}_i + \alpha_2 \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \right. \\ & \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} \right\} \mathbf{e}_i \quad (\text{I.47}) \end{aligned}$$

A equação (I.47) pode ainda ser simplificada considerando as hipóteses de escoamento bidimensional, permanente e incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). Assim:

$$\begin{aligned}
\rho \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\} \mathbf{e}_i &= - \left\{ \frac{\partial p}{\partial x_i} I_{ii} \right\} \mathbf{e}_i + \mu \left\{ \left[ \left( \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell} \right)^2 + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell} \right]^{\frac{b}{2}} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \right. \\
\frac{b}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell} \right)^2 + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell} \right]^{\frac{b}{2}-1} &\left. \left[ \frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_\ell}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_\ell} + \frac{\partial v_j}{\partial x_\ell} \frac{\partial^2 v_\ell}{\partial x_k \partial x_j} + \right. \right. \\
\frac{\partial v_\ell}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_\ell} \left. \left. \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \right\} \mathbf{e}_i + \alpha_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_m}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_m} \right) \right] + \right. & \quad (I.48) \\
+ \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} \left. \right\} \mathbf{e}_i + \\
\alpha_2 \left\{ \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_m^2} + \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_m \partial x_k} \right\} \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

Fazendo-se as devidas expansões nos índices livres  $j, m, k, \ell$  e assumindo  $i = 1, 2$  para as direções  $x$ ; a equação (I.48) toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}
v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{\rho} \frac{b}{2} \left[ 4 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}-1} \left\{ \left[ 8 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \right. \right. \\
2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) &\left. \left. \right] 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \left[ 8 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] \right. \\
\left. \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right\} + \left[ 4 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} &\frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + \\
\frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \left( 13 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + v_1 \left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_2^2 \partial x_1} \right) + v_2 \left( \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) + \right. & \\
2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( 2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + 3 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) &\left. \right] + \\
2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) \right] & \quad (I.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{b}{2} \left[ 4 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}-1} \left\{ \left[ 8 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \right. \right. \\
& 2 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \left. \right] \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \left[ 8 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right. \\
& \left. \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \left. \right\} + \left[ 4 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) + \\
& \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \left( 13 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \right) + v_1 \left( \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^2 \partial x_1} \right) + v_2 \left( \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) + \right. \\
& \left. 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left( 2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + 3 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \right] + \\
& 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{I.50}$$

Assumindo a notação comumente usada para a direção e velocidade em coordenadas cartesianas ( $x_1 = x$ ;  $x_2 = y$ ;  $v_1 = u$ ;  $v_2 = v$ ). Têm-se para (I.49) e (I.50):

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{b}{2} \left[ 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}-1} \left\{ \left[ 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \right. \\
& 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \left. \right] 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left[ 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \\
& \left. \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} + \left[ 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\
& \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \left( 13 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right) + v \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \right) + \right. \\
& \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] + \\
& 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{I.51}$$

$$\begin{aligned}
& u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \frac{b}{2} \left[ 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}-1} \left\{ \left[ 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. 2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left[ 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + \left[ 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \\
& \frac{\alpha_1}{\rho} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \left( 13 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + u \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} \right) + v \left( \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + \right. \\
& \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + \\
& \left. 2 \frac{\alpha_2}{\rho} \left[ 4 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \right. \tag{I.52}
\end{aligned}$$

A equação indicial para o tensor tensão de um fluido de segundo grau modificado é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} = & -p \mathbf{I}_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mu \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right]^{\frac{b}{2}} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right\} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \\
& + \alpha_1 \left[ \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial t \partial x_i} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right. \tag{I.53} \\
& \left. + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \alpha_2 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j
\end{aligned}$$

Substituindo as equações para  $\mathbf{D}$ ,  $q$ ,  $u^*$  e  $\mathbf{T}$  (fluido de segundo grau modificado) na equação (3.13) e considerando a hipótese de dissipação viscosa e trabalho devido a deformação elástica, têm-se para a equação da energia:

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) &= \frac{\mu}{2} \left( 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} + \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \right)^2 \right)^{\frac{b}{2}} \left( 2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) + \\
&\frac{\alpha_1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial t \partial x_i} + v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1 \partial x_j} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1 \partial x_j} + \right. \\
&v_1 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1 \partial x_i} + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1 \partial x_i} + v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2 \partial x_j} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2 \partial x_j} + v_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2 \partial x_i} + \\
&v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_2 \partial x_i} + v_3 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3 \partial x_j} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3 \partial x_j} + v_3 \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_3 \partial x_i} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_3 \partial x_i} + \\
&\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \\
&2 \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \left. \right) + \frac{\alpha_2}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \right. \\
&\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_k}{\partial x_1} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left. \right) + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \right) \quad (I.54)
\end{aligned}$$

Fazendo  $i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2; l = 1, 2, m = 1, 2$  para as direções e componentes de velocidade; e considerando as hipóteses de escoamento permanente, bidimensional, a equação (I.54) fica:

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) &= \mu \left( 4 \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2 \right)^{\frac{b}{2}} + \alpha_1 \left( 4 v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \right. \\
&v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 4 v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \\
&v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left. \right) + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} \right) \quad (I.55)
\end{aligned}$$

Assumindo a notação comumente usada para a direção e velocidade em coordenadas cartesianas ( $x_1 = x; x_2 = y; v_1 = u; v_2 = v$ ). Têm-se para (I.56):

$$\begin{aligned}
\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \mu \left( 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{b}{2}} + \alpha_1 \left( 4u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. \\
&u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4v \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\
&v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left. \right) + k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (I.57)
\end{aligned}$$

## APÊNDICE II

Demonstração da existência da integral  $A_j(\eta) = \int_0^\eta \frac{\tilde{\Psi}_i}{1-\eta} d\eta$ .

Rearranjando a integral obtêm-se:

$$A_j(\eta) = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^\eta \Psi_i \frac{1}{1-\eta} d\eta \quad (\text{I.1})$$

ÁVILA (1977) demonstra que

$$\frac{1}{1-\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \quad (\text{I.2})$$

Substituindo (I.2) em (I.1), tem-se

$$A_j(\eta) = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \int_0^\eta \Psi_i \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n d\eta \quad (\text{I.3})$$

Rearranjando (I.3)

$$A_j(\eta) = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^\eta \eta^n \text{Sen}(\mu_i \eta) d\eta \right] \quad (\text{I.4})$$

A integral em (I.4) pode ser avaliada pela fórmula **17.17.26**, disponível em SPIEGEL e LIU (2004). Assim:

$$A_j(\eta) = \frac{1}{\sqrt{N_i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( -\frac{\eta^n \text{Cos}(\mu_i \eta)}{\mu_i} + \frac{n\eta^{n-1} \text{Sin}(\mu_i \eta)}{\mu_i^2} \right) \Big|_0^\eta - \frac{n(n-1)}{\mu_i^2} \int_0^\eta \eta^{n-2} \text{Sen}(\mu_i \eta) d\eta \right] \quad (\text{I.5})$$

Percebe-se facilmente da eq. (I.5) que a integral existe para qualquer real  $n$  em qualquer intervalo  $]0, \eta]$ .

### APÊNDICE III

Demonstração do filtro dado pelas equações (4.48), (4.50.a,b) e (4.51.a, b)

$$V_0 \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{\alpha_1}{\rho} V_0 \frac{d^3u}{dy^3} \quad (\text{II.1})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (\text{II.2})$$

$$u = 0, v = V_0 \quad \text{em } y = 0 \quad (\text{II.3.a, b})$$

$$u = 0, v = V_0 \quad \text{em } y = h \quad (\text{II.4.a, b})$$

Utilizando os grupos adimensionais dados nas equações (4.14), e rearranjando obtêm-se:

$$K_1 \text{Re}_T m R_v \frac{d^3U}{dY^3} + m R_v \frac{d^2U}{dY^2} - \text{Re}_T m R_v \frac{dU}{dY} = \text{Re}_T \frac{\partial P}{\partial X} \quad (\text{II.5})$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.6})$$

$$U = 0, V = m R_v \quad \text{em } Y = 0 \quad (\text{II.7.a, b})$$

$$U = 0, V = m R_v \quad \text{em } Y = 1 \quad (\text{II.8.a, b})$$

$$\text{onde } \text{Re}_T = \frac{V_0 h}{\nu}$$

Diferenciando (II.5) em relação a Y e (II.6) em relação a X, e subtraindo uma da outra obtêm-se:

$$K_1 \text{Re}_T \frac{d^4U}{dY^4} + \frac{d^3U}{dY^3} - \text{Re}_T \frac{d^2U}{dY^2} = 0 \quad (\text{II.9})$$

Substituindo as relações de função corrente dadas pelas equações (4.34.a, b), têm-se para (II.9) e condições de contorno.

$$K_1 \text{Re}_T \frac{d^5 \psi_\infty}{dY^5} + \frac{d^4 \psi_\infty}{dY^4} - \text{Re}_T \frac{d^3 \psi_\infty}{dY^3} = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{d\psi_\infty}{dY} = 0, \psi_\infty = -mR_\nu X + G_1 \quad \text{em } Y = 0 \quad (\text{II.11.a, b})$$

$$\frac{d\psi_\infty}{dY} = 0, \psi_\infty = -mR_\nu X + G_2 \quad \text{em } Y = 1 \quad (\text{II.12.a, b})$$

As equações (II.10), (II.11) e (II.12) representam um problema de valor de contorno, cuja equação governante é uma EDO de 5° ordem e somente quatro condições de contorno. Este problema admite solução analítica exata, no entanto tal solução é paramétrica, ou seja, admite uma família de soluções. Tal problema já foi tratado em variáveis primitivas por ARIEL (2002), ERDOGAN e IMRAK (2007). Os autores citam que o parâmetro livre pode ser assumido zero, pois é também solução do problema. Além disto, os mesmos discutem várias situações de comportamento das funções que compõe a solução em função do parâmetro livre zero.

De acordo com as técnicas de solução de EDO, apresentada em BOYCE e DIPRIMA (2006), a equação característica de (II.10) é:

$$K_1 \text{Re}_T r^5 + r^4 - \text{Re}_T r^3 = 0 \quad (\text{II.13})$$

Rearranjando (II.13), têm-se

$$r^3 (K_1 \text{Re}_T r^2 + r - \text{Re}_T) = 0 \quad (\text{II.14})$$

As raízes da equação (II.14), são:

$$\begin{aligned}
r_1 &= 0 \\
r_2 &= \frac{-1 + \sqrt{1 + K_1 \text{Re}_T^2}}{2K_1 \text{Re}_T} \\
r_3 &= \frac{-1 - \sqrt{1 + K_1 \text{Re}_T^2}}{2K_1 \text{Re}_T}
\end{aligned} \tag{II.15.a, b, c}$$

Para que as soluções (II.15) componham a solução geral, as mesmas necessitam se linearmente independente (BOYCE e DIPRIMA, 2006). Assim a solução geral deve apresentar uma composição que contemple a multiplicidade de raízes, pois  $r_1$  determina esta característica e  $r_2$  e  $r_3$  já são independentes linearmente. Portanto tem-se para a solução geral

$$\psi_\infty(Y) = C_1 e^{r_1 Y} + C_2 Y e^{r_1 Y} + C_2 Y^2 e^{r_1 Y} + C_4 e^{r_2 Y} + C_5 e^{r_3 Y} \tag{II.16}$$

onde  $C_1, C_2, C_3, C_4$  e  $C_5$  são as constantes a ser determinadas

Substituindo as raízes na equação (II.16), obtêm-se

$$\psi_\infty(Y) = C_1 + C_2 Y + C_2 Y^2 + C_4 e^{r_2 Y} + C_5 e^{r_3 Y} \tag{II.17}$$

Substituindo as condições de contorno (II.11) e (II.12) na equação (II.17), obtêm-se o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases}
C_2 + r_2 C_4 + r_3 C_5 = 0 \\
C_1 + C_4 + C_5 = -mR_v X + G_1 \\
C_2 + 2C_3 + r_2 C_4 e^{r_2} + r_3 C_5 e^{r_3} = 0 \\
C_1 + C_2 + C_3 + C_4 e^{r_2} + C_5 e^{r_3} = -mR_v X + G_2
\end{cases} \tag{II.18}$$

Escolhendo como parâmetro livre a constante  $C_5$  (baseado na trabalho de ARIEL (2002)), o sistema assume a seguinte forma

$$\begin{cases} C_2 + r_2 C_4 = -r_3 C_5 \\ C_1 + C_4 = -mR_v X + G_1 - C_5 \\ C_2 + 2C_3 + r_2 C_4 e^{r_2} = -r_3 C_5 e^{r_3} \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 e^{r_2} = -mR_v X + G_2 - C_5 e^{r_3} \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Após um simples algebrismo para a solução do sistema (II.19), a solução geral se apresenta como

$$\begin{aligned} \psi_\infty(Y) = & -mR_v X + G_1 - \frac{q}{a_1} - \frac{r_2 q}{a_1} Y + \frac{qr_2}{2a_1} (1 - e^{r_2}) Y^2 + \frac{q}{a_1} e^{r_2 Y} + C_5 \left\{ -1 - \frac{a_2}{a_1} - \right. \\ & \left. \left( r_3 + r_2 \frac{a_2}{a_1} \right) Y + \left[ \frac{r_3 - r_3 e^{r_3}}{2} - \frac{r_2 a_2}{2a_1} (e^{r_2} - 1) \right] Y^2 + \frac{a_2}{a_1} e^{r_2 Y} + e^{r_3 Y} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

onde

$$a_1 = e^{r_2} - \frac{r_2}{2} e^{r_2} - 1 - \frac{r_2}{2} \quad (\text{II.21})$$

$$a_2 = 1 - e^{r_3} + \frac{r_3}{2} + \frac{r_3}{2} e^{r_3} \quad (\text{II.22})$$

Uma análise criteriosa no trabalho de ARIEL (2002) sugere que  $C_5$  é igual a zero; na equação (II.20). No entanto, é necessário discutir a influência deste parâmetro no campo de velocidade para a região completamente desenvolvida do escoamento. Para isto a primeira derivada de (II.20) é calculada, pois a mesma corresponde a componente de velocidade  $U(Y)$ , ou seja,  $U = \frac{\partial \psi_\infty}{\partial Y}$ . Portanto tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\infty}{\partial Y} = & -\frac{r_2 q}{a_1} + \frac{qr_2}{a_1} (1 - e^{r_2}) Y + \frac{r_2 q}{a_1} e^{r_2 Y} + C_5 \left\{ - \left( r_3 + r_2 \frac{a_2}{a_1} \right) + \left[ r_3 - r_3 e^{r_3} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{r_2 a_2}{a_1} (e^{r_2} - 1) \right] Y + \frac{r_2 a_2}{a_1} e^{r_2 Y} + r_3 e^{r_3 Y} \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Gráficos mostrando o comportamento da parcela multiplicada por  $C_5$  serão analisados a seguir. Estes gráficos mostrarão duas curvas, uma contendo a solução de (II.23) sem a parcela multiplicada por  $C_5$  e outra contendo a referida parcela para valores fixos de  $K_1$  e  $Re_T$ .

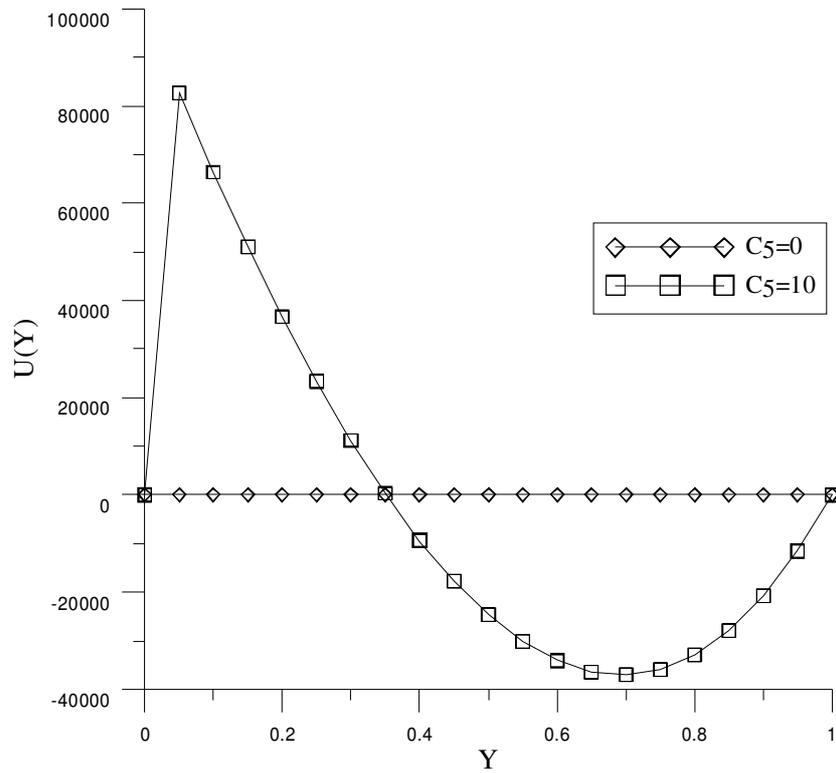


Figura II.1: Perfis de velocidade para  $U(Y)$  com  $K_1 = 0.0001$ ,  $Re_T = 1$ ,  $C_5 = 0$  e  $C_5 = 10$ .

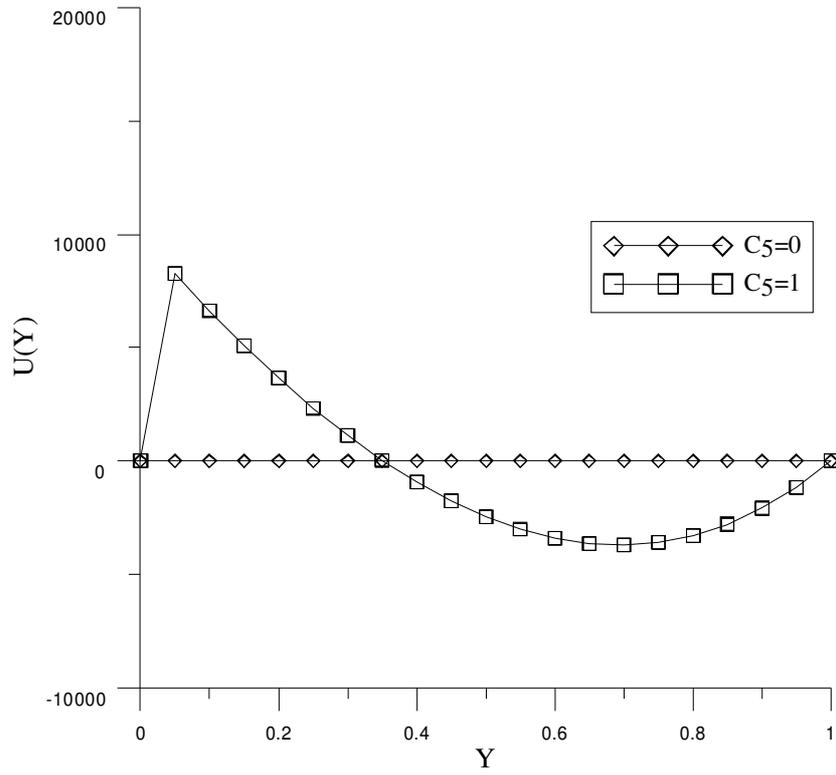


Figura II.2: Perfis de velocidade para  $U(Y)$  com  $K_1 = 0.0001$ ,  $Re_T = 1$ ,  $C_5 = 0$  e  $C_5 = 1$ .

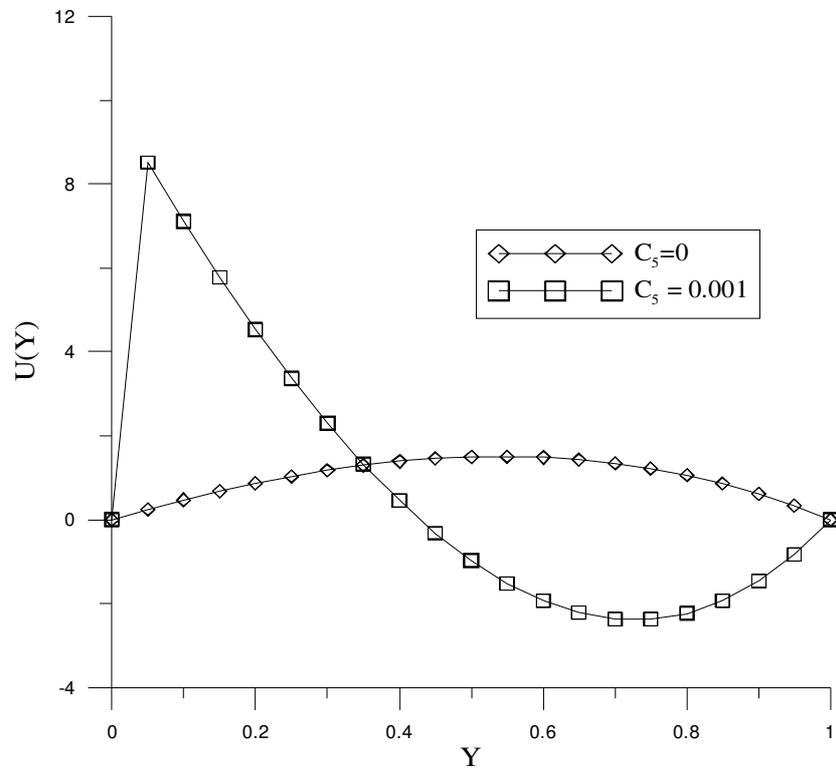


Figura II.3: Perfis de velocidade para  $U(Y)$  com  $K_1 = 0.0001$ ,  $Re_T = 1$ ,  $C_5 = 0$  e  $C_5 = 0.001$ .

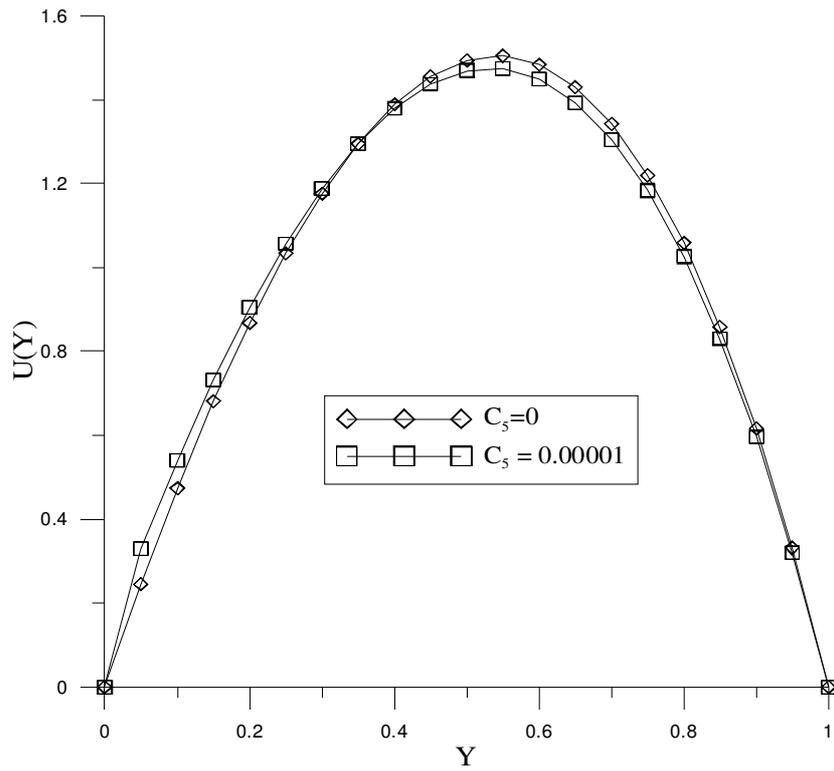


Figura II.4: Perfis de velocidade para  $U(Y)$  com  $K_1 = 0.0001$ ,  $Re_T = 1$ ,  $C_5 = 0$  e  $C_5 = 0.00001$ .

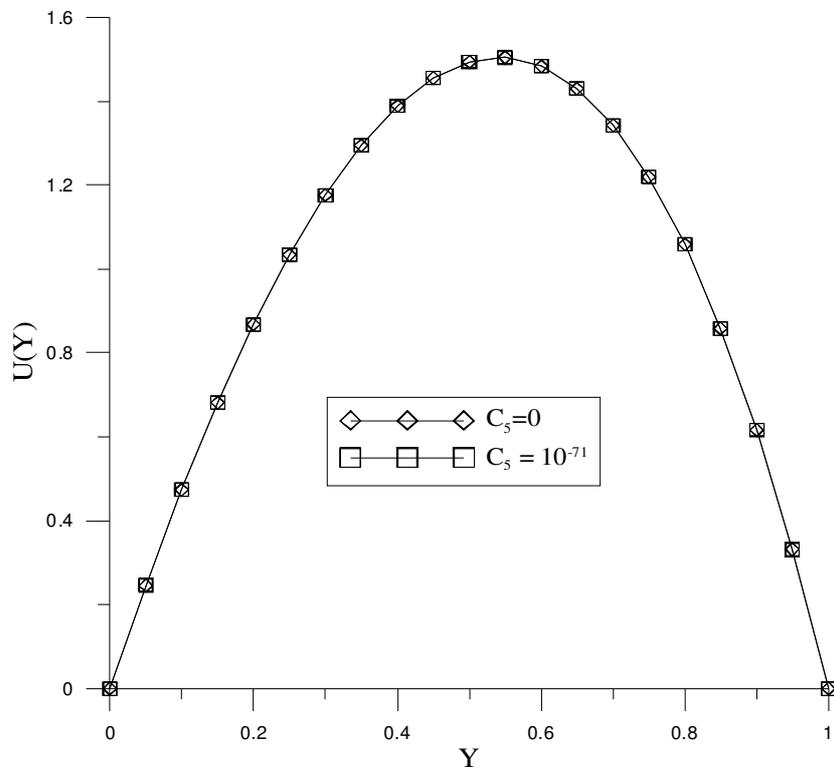


Figura II.5: Perfis de velocidade para  $U(Y)$  com  $K_1 = 10^{-4}$ ,  $Re_T = 1$ ,  $C_5 = 0$  e  $C_5 = 10^{-71}$ .

Analisando as figuras, nota-se que, quando os valores para  $C_5$  tendem para zero os perfis de velocidade  $U(Y)$  ficam praticamente coincidentes, o que era esperado, pois quando  $C_5$  assume o valor zero, a parcela que multiplica o mesmo deixa de existir. Estes resultados estão de acordo com os perfis obtidos por ARIEL (2002) para variáveis primitivas. Assim pode-se definir o filtro a ser utilizado como:

$$\psi_{\infty}(Y) = -mR_v X + G_1 - \frac{q_{va}}{a_1} - \frac{r_2 q_{va}}{a_1} Y + \frac{q_{va} r_2}{2a_1} (1 - e^{r_2}) Y^2 + \frac{q_{va}}{a_1} e^{r_2 Y} \quad (\text{II.24})$$

onde  $q_{va} = G_2 - G_1$

A mesma conclusão pode ser testada facilmente para outros valores de  $K_1$  e  $Re_T$ .

## APÊNDICE IV

Demonstração do filtro dado pelas equações (5.64), (5.66.a,b) e (5.67.a, b)

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{du}{dy} \left[ \left( \frac{du}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} \right\} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (\text{III.1})$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0 \quad \text{em } y = 0 \quad (\text{III.3.a, b})$$

$$u = 0, v = V_0 \quad \text{em } y = h \quad (\text{III.4.a, b})$$

Utilizando os grupos adimensionais dados nas equações (5.33), e rearranjando com a relação  $n = b+1$ , obtêm-se:

$$\frac{d}{dY} \left\{ \left( \frac{dU}{dY} \right)^n \right\} = \text{Re} \frac{\partial P}{\partial X} \quad (\text{III.5})$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (\text{III.6})$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = 0, V = 0 \quad \text{em } Y = 0 \quad (\text{III.7.a, b})$$

$$U = 0, V = mR_v \quad \text{em } Y = 1 \quad (\text{III.8.a, b})$$

Diferenciando (III.5) em relação a Y e (III.6) em relação a X, e subtraindo uma da outra obtêm-se:

$$\frac{d^2}{dY^2} \left\{ \left( \frac{dU}{dY} \right)^n \right\} = 0 \quad (\text{III.9})$$

Substituindo as relações de função corrente dadas pelas equações (5.53.a, b), têm-se para (III.9) e condições de contorno.

$$\frac{d^2}{dY^2} \left\{ \left( \frac{d^2 \psi_\infty}{dY^2} \right)^n \right\} = 0 \quad (\text{III.10})$$

$$\frac{d^2 \psi_\infty}{dY^2} = 0, \psi_\infty = G_1 \quad \text{em } Y = 0 \quad (\text{III.11.a, b})$$

$$\frac{d\psi_\infty}{dY} = 0, \psi_\infty = -mR_v X + G_2 \quad \text{em } Y = 1 \quad (\text{III.12.a, b})$$

Integrando duas vezes (III.10) e determinando a raiz enésima, obtêm-se

$$\frac{d^2 \psi_\infty}{dY^2} = (C_1 Y + C_2)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{III.13})$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes a serem determinadas.

Utilizando a condição de contorno (III.11.a) em (III.13), encontra-se:

$$C_2 = 0 \quad (\text{III.14})$$

Nota-se que  $C_1$  não pode ser zero, pois este valor levaria a uma inconsistência matemática. Logo

$$\frac{d^2 \psi_\infty}{dY^2} = (C_1 Y)^{\frac{1}{n}} \quad (\text{III.15})$$

Integrando (III.15), tem-se:

$$\frac{d\psi_{\infty}}{dY} = \frac{(C_1 Y)_n^{1+n}}{C_1 \left(\frac{1}{n} + 1\right)} + C_3 \quad (\text{III.16})$$

Onde  $C_3$  é mais uma constante a ser determinada. Com a utilização da condição de contorno (III.12.a),  $C_3$  fica:

$$C_3 = -\frac{(C_1)_n^{1+n}}{C_1 \left(\frac{1+n}{n}\right)} \quad (\text{III.17})$$

Desta maneira (III.16) fica

$$\frac{d\psi_{\infty}}{dY} = \frac{(C_1 Y)_n^{1+n}}{C_1 \left(\frac{1+n}{n}\right)} - \frac{(C_1)_n^{1+n}}{C_1 \left(\frac{1+n}{n}\right)} \quad (\text{III.18})$$

Integrando (III.18) tem-se

$$\psi_{\infty} = \frac{1}{C_1 \left(\frac{1+n}{n}\right)} \frac{(C_1 Y)_n^{1+2n}}{C_1 \left(\frac{1+2n}{n}\right)} - \frac{(C_1)_n^{1+n}}{C_1 \left(\frac{1+n}{n}\right)} Y + C_4 \quad (\text{III.19})$$

Substituindo a condição de contorno (III.11.b) em (III.19), tem-se para o valor da constante de integração  $C_4$ :

$$C_4 = G_1 \quad (\text{III.20})$$

Substituindo (III.20) em (III.19), obtêm-se:

$$\psi_{\infty} = \frac{1}{C_1 \left(\frac{1+n}{n}\right)} \frac{(C_1 Y)_n^{1+2n}}{C_1 \left(\frac{1+2n}{n}\right)} - \frac{(C_1)_n^{1+n}}{C_1 \left(\frac{1+n}{n}\right)} Y + G_1 \quad (\text{III.21})$$

Para a determinação da constante  $C_1$  basta substituir a condição de contorno (III.12.b) em (III.21)

$$\frac{1}{C_1 \left( \frac{1+n}{n} \right)} \frac{(C_1)^{\frac{1+2n}{n}}}{C_1 \left( \frac{1+2n}{n} \right)} - \frac{(C_1)^{\frac{1+n}{n}}}{C_1 \left( \frac{1+n}{n} \right)} + G_1 = -mR_v X + G_2 \quad (\text{III.22})$$

Após simples algebrismo  $C_1$  fica

$$C_1 = \left[ (mR_v X - G_2 + G_1) \left( \frac{1+2n}{n} \right) \right]^n \quad (\text{III.23})$$

Finalmente após substituição de  $C_1$  em (III.21) e simplificações, o filtro fica como:

$$\psi_\infty(Y; X) = (q_{va} - mXR_v) \left( \frac{2n+1}{n+1} Y - \frac{n}{n+1} Y^{\frac{2n+1}{n}} \right) + G_1 \quad (\text{III.24})$$

onde  $q_{va} = G_2 - G_1$

## APÊNDICE V

Demonstração do cálculo da Norma  $N_i = \int_0^1 [\Omega_i]^2 dY$

Sabe-se que:

$$\Omega_i(Y) = \frac{\text{sen}(\mu_i Y)}{\text{sen}(\mu_i)} - \frac{\text{senh}(\mu_i Y)}{\text{senh}(\mu_i)} \quad (\text{IV.1})$$

Portanto

$$N_i = \int_0^1 \left[ \frac{\text{sen}(\mu_i Y)}{\text{sen}(\mu_i)} - \frac{\text{senh}(\mu_i Y)}{\text{senh}(\mu_i)} \right]^2 dY \quad (\text{IV.2})$$

Desenvolvendo (IV.2), obtêm-se:

$$N_i = \underbrace{\int_0^1 \frac{\text{sen}^2(\mu_i Y)}{\text{sen}^2(\mu_i)} dY}_A - \underbrace{2 \int_0^1 \frac{\text{sen}(\mu_i Y)}{\text{sen}(\mu_i)} \frac{\text{senh}(\mu_i Y)}{\text{senh}(\mu_i)} dY}_B + \underbrace{\int_0^1 \frac{\text{senh}^2(\mu_i Y)}{\text{senh}^2(\mu_i)} dY}_C \quad (\text{IV.3})$$

Inicialmente desenvolver-se-á as partes A e C de (IV.3). Assim têm-se:

$$A = \int_0^1 \frac{\text{sen}^2(\mu_i Y)}{\text{sen}^2(\mu_i)} dY = \frac{1}{\text{sen}^2(\mu_i)} \int_0^1 \text{sen}^2(\mu_i Y) dY \quad (\text{IV.4})$$

$$A = \frac{1}{\text{sen}^2(\mu_i)} \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\mu_i Y) \right] dY \quad (\text{IV.5})$$

$$A = \frac{1}{\text{sen}^2(\mu_i)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\text{sen}(2\mu_i)}{4\mu_i} \right] \quad (\text{IV.6})$$

$$C = \int_0^1 \frac{\text{senh}^2(\mu_i Y)}{\text{senh}^2(\mu_i)} dY = \frac{1}{\text{senh}^2(\mu_i)} \int_0^1 \text{senh}^2(\mu_i Y) dY \quad (\text{IV.7})$$

$$C = \frac{1}{\text{senh}^2(\mu_i)} \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \cosh(2\mu_i Y) - \frac{1}{2} \right] dY \quad (\text{IV.8})$$

$$C = \frac{1}{\text{senh}^2(\mu_i)} \left[ \frac{\text{senh}(2\mu_i)}{4\mu_i} - \frac{1}{2} \right] \quad (\text{IV.9})$$

A parte B necessita de um tratamento mais refinado matematicamente. Assim

$$B = \frac{2}{\text{sen}(\mu_i) \text{senh}(\mu_i)} \int_0^1 \text{sen}(\mu_i Y) \text{senh}(\mu_i Y) dY \quad (\text{IV.10})$$

Sabe-se das relações trigonométricas que:

$$\text{senh}(\mu_i Y) = \frac{e^{\mu_i Y} - e^{-\mu_i Y}}{2} \quad (\text{IV.11})$$

Substituindo (IV.11) em (IV.10), obtêm-se:

$$B = \frac{2}{\text{sen}(\mu_i) \text{senh}(\mu_i)} \int_0^1 \text{sen}(\mu_i Y) \left( \frac{e^{\mu_i Y} - e^{-\mu_i Y}}{2} \right) dY \quad (\text{IV.12})$$

Rearranjando (IV.12) têm-se:

$$B = \frac{2}{\text{sen}(\mu_i)\text{senh}(\mu_i)} \left[ \int_0^1 \text{sen}(\mu_i Y) \left( \frac{e^{\mu_i Y}}{2} \right) dY - \int_0^1 \text{sen}(\mu_i Y) \left( \frac{e^{-\mu_i Y}}{2} \right) dY \right] \quad (\text{IV.13})$$

Da trigonometria sabe-se que (SPIEGEL e LIU, 2004) (fórmula 17.25.10):

$$\int e^{ax} \text{sen}(bx) dx = \frac{e^{ax} (a \text{sen}(bx) - b \cos(bx))}{a^2 + b^2} \quad (\text{IV.14})$$

Com o uso da equação generalizada (IV.14), a equação (IV.13) toma a seguinte forma:

$$B = \frac{2}{\text{sen}(\mu_i)\text{senh}(\mu_i)} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ e^{\mu_i Y} \frac{(\mu_i \text{sen}(\mu_i Y) - \mu_i \cos(\mu_i Y))}{2\mu_i^2} + \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-\mu_i Y} \frac{(-\mu_i \text{sen}(\mu_i Y) - \mu_i \cos(\mu_i Y))}{2\mu_i^2} \right] dY \right\} \quad (\text{IV.15})$$

$$B = \frac{2}{\text{sen}(\mu_i)\text{senh}(\mu_i)} \left\{ \frac{1}{2} \left[ e^{\mu_i} \frac{(\mu_i \text{sen}(\mu_i) - \mu_i \cos(\mu_i))}{2\mu_i^2} + \right. \right. \\ \left. \left. - e^{-\mu_i} \frac{(-\mu_i \text{sen}(\mu_i) - \mu_i \cos(\mu_i))}{2\mu_i^2} - \left( -\frac{\mu_i}{2\mu_i^2} \right) + \left( -\frac{\mu_i}{2\mu_i^2} \right) \right] \right\} \quad (\text{IV.16})$$

$$B = \frac{2}{\text{sen}(\mu_i)\text{senh}(\mu_i)} \left[ \frac{1}{2\mu_i} \left( \text{sen}\mu_i \frac{(e^{\mu_i} + e^{-\mu_i})}{2} - \cos\mu_i \frac{(e^{\mu_i} + e^{-\mu_i})}{2} \right) \right] \quad (\text{IV.17})$$

$$B = \frac{1}{\mu_i \text{sen}(\mu_i)\text{senh}(\mu_i)} (\text{sen}\mu_i \cosh\mu_i - \cos\mu_i \text{senh}\mu_i) \quad (\text{IV.18})$$

Observando a equação transcendental do problema  $\text{tg}(\mu_i) = \text{tgh}(\mu_i)$ , conclui-se que:

$$\text{senh}(\mu_i)\cos(\mu_i) = \text{sen}(\mu_i)\cosh(\mu_i) \quad (\text{IV.19})$$

Substituindo (IV.19) em (IV.18), obtêm-se:

$$B = 0 \quad (IV.20)$$

Portanto, tem-se para a norma

$$N_i = \frac{1}{\text{sen}^2(\mu_i)} \left[ \frac{1}{2} - \frac{\text{sen}(2\mu_i)}{4\mu_i} \right] + \frac{1}{\text{senh}^2(\mu_i)} \left[ \frac{\text{senh}(2\mu_i)}{4\mu_i} - \frac{1}{2} \right] \quad (IV.21)$$

Rearranjando (IV.21), obtêm-se:

$$N_i = \frac{1}{2\text{sen}^2(\mu_i)} - \frac{1}{4\mu_i \text{tg}\mu_i} + \frac{1}{4\mu_i \text{tgh}\mu_i} - \frac{1}{2\text{senh}^2(\mu_i)} \quad (IV.22)$$

Mas  $\text{tg}(\mu_i) = \text{tgh}(\mu_i)$

$$N_i = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\text{sen}^2(\mu_i)} - \frac{1}{\text{senh}^2(\mu_i)} \right) \quad (IV.23)$$

$$N_i = \frac{1}{2} (\text{cosec}^2 \mu_i - \text{cosech}^2 \mu_i) \quad (IV.24)$$

Das relações trigonométricas, têm-se:

$$N_i = \frac{1}{2} (1 + \text{cotg}^2 \mu_i - \text{cotgh}^2 \mu_i + 1) \quad (IV.25)$$

Com a relação  $\text{tg}(\mu_i) = \text{tgh}(\mu_i)$  é fácil mostrar que:

$$\text{cotg}(\mu_i) = \text{cotgh}(\mu_i) \quad (IV.26)$$

Substituindo (IV.26) em (IV.25), obtêm-se:

$$N_i = 1 \quad (IV.27)$$

Com se queria demonstrar.