PRODERNA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia

SOLUÇÕES HÍBRIDAS PARA ESCOAMENTOS E TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CAVIDADES CILÍNDRICAS COM EXTREMIDADES ROTATIVAS

Carlos Célio Sousa da Cruz

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, do Instituto Tecnológico, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais.

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma

Belém

Dezembro de 2015

SOLUÇÕES HÍBRIDAS PARA ESCOAMENTOS E TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CAVIDADES CILÍNDRICAS COM EXTREMIDADES ROTATIVAS

Carlos Célio Sousa da Cruz

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA AMAZÔNIA (PRODERNA/ITEC) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS.

Aprovada por:

_____

Prof. João Nazareno Nonato Quaresma, D.Sc
(FEQ/UFPA-Orientador)

_____

Prof. Emanuel Negrão Macêdo, D.Sc
(FEQ/UFPA-Membro)

_____

Prof. Cláudio José Cavalcante Blanco, Ph.D.
(FAESA/UFPA-Membro)

_____

Prof[a] Roseane de Lima Silva, D.Sc.
(FEMAT/UFPA-Membro)

_____

Prof. Luiz Mariano Pereira, D.Sc.
(CENMEC/UNIVASF-Membro)

BELÉM, PA - BRASIL
DEZEMBRO DE 2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Instituto de Tecnologia/Programa de Pós-graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia

---

Cruz, Carlos Célio Sousa da Cruz

Soluções híbridas para escoamentos e transferência de calor em cavidades cilíndricas com extremidades rotativas/Carlos Célio Sousa da Cruz; orientadores, João Nazareno Nonato Quaresma. - Belém, 2015

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, 2015

1. Método Híbrido 2. Escoamento Giratório 3. Cavidade Cilíndrica 4. DBVPFD I. Título

CDD 22. ed. 660.28

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus em primeiro lugar por me fortalecer nos momentos mais difíceis de minha vida, por me conceder saúde e aptidão ao conhecimento.

Aos meus pais Célia Sousa da Cruz e Antonio Carlos Mendonça da Cruz, pelo amor, carinho e por terem passado os valores que acredito possuir.

Ao meu irmão Carlos Antonio e a minha falecida avó Aldenora Cruz, pelo carinho e apoio durante a convivência.

Aos meus orientadores, Prof. João Nazareno e Prof. Emanuel Negrão, pela orientação irretocável, incentivo, confiança e amizade.

À Flavia Araújo, minha namorada, pela ajuda, carinho, dedicação a mim e principalmente por aguentar meus momentos de ansiedade e stresses nos meses em que me dediquei ao doutorado.

Aos colegas do Laboratório de Simulação de Processos (LSP), Nelson Amorim, Sil, Edilson, Kleber, Clauderino, Wanderson e Bruno pela convivência.

Aos colegas da UFOPA, Universidade Federal do Oeste do Pará, pela amizade e colaboração.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. João Nazareno Nonato Quaresma pelos ensinamentos que a mim foram dados para com este trabalho, e por sua dedicação ao me orientar mais uma vez nessa outra etapa acadêmica.

Ao CNPQ pelo incentivo financeiro.

Aos amigos do Laboratório de Simulação de Processos LSP da FEQ/ITEC-UFPA por terem estado presentes nos momentos alegres e difíceis no decorrer do meu doutorado.

Resumo da Tese apresentada ao PRODERNA/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais (D.Eng.)

SOLUÇÕES HÍBRIDAS PARA ESCOAMENTOS E TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM CAVIDADES CILÍNDRICAS COM EXTREMIDADES ROTATIVAS

Carlos Célio Sousa da Cruz

Dezembro/2015

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma

Área de Concentração: Uso e Transformação de Recursos Naturais

O presente trabalho utiliza-se o método híbrido numérico-analítico para avaliar a transferência de calor do escoamento giratório em cavidades cilíndricas com extremidades rotativas. A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) foi utilizada para a solução das equações de Navier-Stokes em termos de função corrente e de energia bidimensionais no sistema de coordenadas cilíndricas, onde a aproximação de Boussinesq foi utilizada para a força de empuxo. Resultados para os campos de velocidade e de temperatura foram calculados para faixas de parâmetros: números de Reynolds (*Re*), $100 \leq Re \leq 2000$; número de Richardson (*Ri*), $0 \leq Ri \leq 1$; e o número de Prandt(*Pr*), $Pr = 1{,}0$. O parâmetro de contra rotação da velocidade angular do topo (s_t) é na faixa de $-1 \leq s_t \leq 1$ e várias razões de aspecto da cavidade. A parte numérica da solução foi resolvida utilizando-se a subrotina DBVPFD da biblioteca IMSL e os resultados gerados são comparados com os dados disponíveis na literatura apresentando uma excelente concordância.

Abstract of Thesis presented to PRODERNA/UFPA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Natural Resources Engineering (D.Eng.)

HYBRID SOLUTIONS FOR FLOW AND HEAT TRANSFER IN CYLINDRICAL CAVITIES WITH ROTATING ENDS

Carlos Célio Sousa da Cruz

December/2015

Advisor: João Nazareno Nonato Quaresma

Research Area: Use and Transformation of Natural Resources

The present study evaluate numerically the heat transfer from the swirling flow cylindrical cavity with rotating ends. The generalized integral transform technique (GITT) was used for the solution of the two-dimensional Navier-Stokes equations in terms of streamfunction formulation and energy in the cylindrical coordinate system, in which the Boussinesq approximation was used for the buoyancy force. Results for the temperature and velocity fields are presented for a range of parameters: the Reynolds number (*Re*), $100 \leq Re \leq 2000$; the Richardson number (*Ri*), $0 \leq Ri \leq 1$; and the Prandt number (*Pr*), $Pr = 1{,}0$. The parameter counter rotation of the angular velocity of the top disk is, s_t, $-1 \leq s_t \leq 1$ and various aspect ratio of the cavity. The numerical part of the solution was solved using the DBVPFD subroutine IMSL library and the results generated are compared with data available in the literature showing excellent agreement.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO..... 1
1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS..... 1
1.2 SÍNTESE DO TRABALHO..... 2
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA..... 3
1.2 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA..... 12
CAPÍTULO 2 – ESCOAMENTO EM CAVIDADES CILÍNDRICAS COM AS EXTREMIDADES EM ROTAÇÃO..... 15
2.1 INTRODUÇÃO..... 15
2.2 FORMULAÇÀO DO PROBLEMA..... 16
2.2.1 Descrição do Problema Físico..... 16
2.2.2 Formulação Matemática do Problema..... 16
2.3 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO..... 19
2.3.1 Determinação dos Problemas Auxiliares..... 19
2.3.2 Determinação dos Pares Transformada-Inversa..... 22
2.3.3 Transformação Integral do Sistema de EDPs..... 22
2.3.4 Algoritimo Computacional..... 26
2.3.5 Cálculos dos Campos de Velocidade..... 26
2.4 RESULTADOS E DISCUSSÃO..... 26
2.4.1 Comparação das velocidades máximas e localização e análise de convergência..... 26
2.4.2 Isolinhas de Função Corrente do topo rotativo, co e contra rotação da extremidade inferior..... 32
2.4.2.1 Topo rotativo..... 32
2.4.2.2 Co e contra rotação da extremidade inferior..... 35
2.4.3 Perfil de velocidade..... 36
2.5 Conclusão..... 43
CAPÍTULO 3 – CONVECÇÃO EM CAVIDADES CILÍNDRICAS COM CO-/CONTRA ROTAÇÃO DAS EXTREMIDADES..... 44
3.1 INTRODUÇÃO..... 44
3.2 FORMULAÇÀO DO PROBLEMA..... 45

3.2.1 Descrição do Problema Físico..... 45
3.2.2 Formulação Matemática do Problema..... 45
3.3 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO..... 49
3.3.1 Determinação dos Problemas Auxiliares..... 49
3.3.2 Determinação dos Pares Transformada-Inversa..... 52
3.3.3 Transformação Integral do Sistema de EDPs..... 53
3.3.4 Algoritimo Computacional..... 56
3.3.5 Cálculos dos Campos de Velocidade..... 57
3.3.6 Cálculo do Número de Nusselt..... 57
3.3 RESULTADOS E DISCUSSÃO..... 58
3.4.1 Análise de convergência e validação dos resultados..... 59
3.4.2 Isolinhas de Função Corrente e temperatura..... 65
3.4.3 Perfil de velocidades e temperatura..... 72
3.4.4 Número de Nusselt Local..... 75
3.5 Conclusão..... 77
CAPÍTULO 4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS..... 79
4.1 CONCLUSÕES GERAIS..... 79
4.2 SUGESTÔES..... 79
REFERÊNCIAS..... 81

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Regiões da quebra de vórtice no problema de escoamento na cavidade cilíndrica com a tampa superior em rotação sobre o espaço paramétrico da razão de aspecto e numero de Reynolds. ESCUDIER (1984)..... 4

Figura 2.1 Geometria do problema de escoamento em cavidade cilíndrica com as extremidades em rotação. Figura desenhada pelo autor a partir de informações da obra de FUJIMURA *et al.* (2005).... 16

Figura 2.2 Isolinhas de função corrente: (a) *Re* = 2000 e *h* = 1,0; (b) *Re* = 990 e *h* = 1,5; (c) *Re* = 1290 e *h* = 1,5; (d) *Re* = 1010 e *h* = 2,5; 34

Figura 2.3 Isolinhas de função corrente: (a) *Re* = 1854 e *h* = 2,0; (b) *Re* = 2819 e *h* = 3,25; (c) *Re* = 3061 e *h* = 3,5;..... 35

Figura 2.4 Isolinhas de função corrente da co-rotação: (a) *Re* = 2000 e *h* = 1,0; (b) *Re* = 990 e *h* = 1,5; (c) *Re* = 2819 e *h* = 3,25;..... 37

Figura 2.5 Isolinhas de função corrente da contra-rotação: (a) *Re* = 2000 e *h* = 1,0; (b) *Re* = 990 e *h* = 1,5; (c) *Re* = 2819 e *h* = 3,25..... 38

Figura 2.6 Perfil das componentes de velocidade axial em r = 0,0. (a) *Re* = 990 e *h* = 1,5; (b) *Re* = 1290 e *h* = 1,5; (c) *Re* = 1010 e *h* = 2,5..... 41

Figura 2.7 Perfil das componentes de velocidade radial em varias posições. (a) Re = 990 e A = 1,5, (b) Re = 1290 e A = 1,5, (c) Re = 1010 e A = 2,5..... 42

Figura 3.1 Geometria do problema de convecção em cavidade cilindrica com as extremidades em rotação. Figura desenhada pelo autor a partir de informações da obra de OMI e IWATSU (2005)..... 45

Figura 3.2.a Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = -1; (a) função corrente; (b) isotermas..... 67

Figura 3.2.b Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = 0; (a) função corrente; (b) isotermas..... 67

Figura 3.2.c Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = 0,1; (a) função corrente; (b) isotermas..... 68

Figura 3.2.d Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = -0,1; (a) função corrente; (b) isotermas..... 68

Figura 3.2.e Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = 1; (a) função corrente; (b) isotermas..... 69

Figura 3.3.a Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 1 e s_t = -1; (a) função corrente; (b) isotermas..... 69

Figura 3.3.b Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 1 e s_t = 0; (a) função corrente; (b) isotermas..... 70

Figura 3.3.c Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 1 e s_t = 0,1; (a) função corrente; (b) isotermas..... 70

Figura 3.3.d Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 1 e s_t = -0,1; (a) função corrente; (b) isotermas..... 71

Figura 3.3.e Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 1 e s_t = 1; (a) função corrente; (b) isotermas..... 71

Figura 3.4.a Perfil da componente radial de velocidade ao longo do plano vertical a r = 0,8 e *Re* = 1000 a valores de *Ri* = 0 e 1..... 74

Figura 3.4.b Perfil da componente axial de velocidade ao longo do plano vertical a r = 0,8 e *Re* = 1000 a valores de *Ri* = 0 e 1..... 74

Figura 3.4.c Perfil de temperatura ao longo do plano vertical a r = 0,8 e *Re* = 1000 a valores de *Ri* = 0 e 1..... 75

Figura 3.5.a Número de Nusselt local na base (z = 0) do cilindro. *Re* = 1000, e *Ri* = 1;Pr = 1 e *h* = 2,0..... 76

Figura 3.5.b Número de Nusselt local no topo (z = h) do cilindro. *Re* = 1000, e *Ri* = 1;Pr = 1 e *h* = 2,0..... 76

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Comparações das velocidades máximas axiais para *Re* = 990,1010 e 1290, em r = 0,0..... 28

Tabela 2.2 Convergência velocidade axial, função corrente, velocidade radial e tangencial nas posições radiais em r = 0,0 e 0,1, para *h* = 1,0 e *Re* = 2000..... 30

Tabela 2.3 Convergência velocidade axial, função corrente, velocidade radial e tangencial nas posições radiais em r = 0,0 e 0,1, para *h* = 3,5 e *Re* = 3061..... 31

Tabela 3.1 Convergência da velocidade axial para *h* = 2, *Re* = 100 e 2000, Pr = 1,0, à diferentes números de Richardson e varias posições axiais em r = 0,0..... 61

Tabela 3.2 Convergência da velocidade radial para *h* = 2, *Re* = 100 e 2000, Pr = 1,0, à diferentes números de Richardson e varias posições axiais em r = 0,5..... 62

Tabela 3.3 Convergência da velocidade tangencial para *h* = 2, *Re* = 100 e 2000, Pr = 1,0, à diferentes números de Richardson e varias posições axiais em r = 0,5..... 63

Tabela 3.4 Convergência para os números de Nusselt médio *h* = 2 e Pr = 1,0, à diferentes números de Richardson e Reynolds..... 64

NOMENCLATURA

$\bar{f}_i, \bar{g}_i, \bar{h}_i, \bar{i}_i$	Condições iniciais transformadas
g	Vetor aceleração da gravidade
H	Altura do cilindro
L_i	Integral de normalização, eqs. (2.11.f) e (3.11.f)
M_i	Integral de normalização, eqs. (2.12.d) e (3.12.d)
NF	Número de termos na expansão para a função corrente
NT	Número de termos na expansão para a temperatura
NV	Número de termos na expansão para a velocidade tangencial
N_i	Integral de normalização, eq.(3.13.d)
P	Pressão
Pr	Número de Prandtl
Re	Número de Reynolds
Ri	Número de Richardson
R	Raio da cavidade
r, z	Coordenadas espaciais adimensionais
s_b	Parâmetro de rotação da base
s_t	Parâmetro de rotação do topo
T	Temperatura adimensional
$\bar{T}$	Potencial de temperatura transformado
To	Temperatura de referência
v_z	Componente axial da velocidade
v_r	Componente radial da velocidade
v_θ	Componente tangencial da velocidade do problema de escoamento
v_ϕ	Componente tangencial da velocidade do problema de convecção
X_i	Autofunção para a função corrente

LETRAS GREGAS

α_i	Autovalor, eqs (2.11.f) e (3.11.h)
β	Coeficiente de expansão térmica
β_i	Autovalor, eqs (2.11.f) e (3.11.h)
μ_i	Autovalor, eq (3.13.f)
Ω_i	Autofunção para a velocidade tangencial

Γ_i	Autofunção para a temperatura
ρ	Densidade do fluido
ω_b	Velocidade angular da base rotativa
ω_t	Velocidade angular do topo rotativo
α	Coeficiente de expansão térmica
ΔT	Diferença de temperatura entre os discos do topo e da base
k	Coeficiente de difusão térmica
ν	Viscosidade cinemática
θ	Coordenada espacial adimensional do problema de escoamento
ϕ	Coordenada espacial adimensional do problema de convecção
Ψ	Função corrente
$\bar{\Psi}$	Potencial de função corrente transformado

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O presente capítulo estabelece as motivações, referenciais bibliográficos e os principais objetivos ligados ao estudo do escoamento com transferência de calor em cavidades cilíndricas com ambas as extremidades em rotação, pela aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) na solução das equações de Navier-Stokes e energia, em regime permanente, com formulação em função corrente.

1.1 – MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

O estudo de problemas envolvendo o escoamento de fluidos e transferência de calor sempre motivou os pesquisadores em diversas áreas da engenharia devido a grandes aplicações industriais, tais como: trocadores de calor, resfriamento de reatores nucleares e entre outros. Muitos desses problemas, envolve a modelagem matemática das equações (Navier-Stokes e energia) que não apresentam soluções analíticas devido a sua natureza não-linear, presente nos termos convectivos.

A necessidade de se obter soluções em casos onde o problema não podia ser simplificado fez com que fossem desenvolvidos e adaptados métodos numéricos que permitissem resolver estas equações, com maior ou menor eficiência e precisão, ao longo dos últimos anos, em paralelo com a evolução de computadores com processadores mais velozes.

Atualmente, os métodos numéricos mais utilizados na solução de escoamentos desta natureza são: métodos dos elementos finitos e diferenças finitas. A partir da década de 80, surgiu uma metodologia alternativa analítico-numérica (híbrida) que solucionou diversos problemas de características convectivo-difusivas, tais como, na publicação de COTTA (1993) e que apresentaram como vantagem uma excelente precisão.

A tese aqui apresentada consiste em se utilizar a GITT para resolver as equações de Navier-stokes e de energia, envolvendo os fenômenos de convecção natural em cavidade cilíndrica com extremidades rotativas.

O presente trabalho objetiva também avaliar o potencial da GITT, na solução do escoamento giratório e a transferência de calor em uma cavidade cilíndrica com as extremidades inferior e superior em rotação. A solução do problema é representada pelas equações de Navier-stokes e energia em um sistema de coordenadas cilíndricas e formuladas em termos de função corrente.

Resultados para os campos de velocidade e temperatura são apresentados, variando-se os parâmetros como: número de Reynolds, número de Richardson, razões de aspecto e parâmetros de rotação, à diferentes posições axiais e radiais. Deste modo, visando a covalidação do método para situações descritas no sistema de coordenadas cilíndricas, são realizadas comparações com os resultados semelhantes aos deste trabalho, presentes nas literaturas.

1.2 - SÍNTESE DO TRABALHO

O capítulo introdutório apresenta as motivações, objetivos e as contribuições do presente trabalho. É feito também uma revisão bibliográfica sobre a importância do escoamento rotativo em cavidades cilíndricas, o qual é um assunto de interesse nos campos da engenharia, de projetos e de pesquisa.

O Capítulo 2 aborda a modelagem matemática do problema do escoamento rotativo de fluidos em cavidades cilíndricas onde se apresentam as hipóteses adotadas, a metodologia de solução, os resultados alcançados e discussões e finalmente as conclusões inerentes ao problema em escoamentos rotativos. O estudo desenvolvido nesse capítulo teve a finalidade de investigar a capacidade da GITT na solução do problema, como o proposto no referido capítulo.

O Capítulo 3 aborda a modelagem matemática do problema de escoamento de fluidos e transferência de calor em cavidades cilíndricas com as extremidades inferior e superior rotativas, onde também se apresentam as hipóteses adotadas e a metodologia de solução, os resultados alcançados e discussões e finalmente as conclusões inerentes a este problema. Este estudo teve como objetivo investigar a capacidade da técnica GITT na solução do problema de escoamentos giratórios com extremidades rotativas como proposto no referido capítulo.

Finalmente, no Capítulo 4 é apresentado as conclusões gerais do trabalho desenvolvido e as sugestões das principais atividades que podem ser realizadas em trabalhos futuros.

1.3 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Escoamentos rotativos são observados em escoamentos naturais, como em tornados e tufões, e tem sido amplamente utilizados, por muitos anos, em aplicações técnicas como aeronáuticas, por exemplo. Sua importância e complexidade tem preocupado as pesquisas por décadas. Também, o processo de convecção em cavidades cilíndricas verticais foi amplamente estudada tanto experimentalmente quanto numericamente nos campos das pesquisas.

Nesse contexto, muitos autores preocuparam-se em estudar o problema como PAO (1970) que realizou uma análise numérica e experimental de um fluido viscoso e incompressível em uma cavidade cilíndrica circular fechada. O topo e as paredes laterais estavam em rotação com uma velocidade angular constante e a base mantida fixa. Para números pequenos e moderados números de Reynolds, a convergência da iteração foi bastante rápida. Quando se aumentou o número de Reynolds, o escoamento na camada limite e um núcleo viscoso foram intensificadas. Os resultados das soluções numéricas apresentaram ótima concordâncias com as soluções analíticas para pequenos números de Reynolds.

Novamente PAO (1972) avaliou numericamente o fluido viscoso incompressível confinado em uma cavidade cilíndrica circular fechada com o topo do disco rotacionando à uma velocidade angular constante com a base e as paredes laterais mantidas fixa. Foram realizados cálculos para vários números de Reynolds até o valor máximo de Re = 400. Foi observado que para Re > 10 as equações governantes são precisamente lineares e os valores numéricos concordam muito bem com os resultados analíticos. Para números maiores de Reynolds, o escoamento próximos dos contornos são intensificados. A vazão volumétrica do escoamento secundário devido à ação centrífuga e o atrito do disco também foram calculados.

HALL (1972) relatou vários trabalhos numéricos e experimentais, que foram observados por outros autores, com o objetivo de contribuir para o entendimento das características físicas das quebras de vórtices nas últimas décadas.

LEIBOVICH (1978) descreveu uma quebra de vórtice como uma mudança na estrutura de vórtice iniciado pela variação na característica da razão das componentes das velocidades tangencial e axial.

O presente trabalho aproxima-se do ESCUDIER (1984) que observou o fenômeno das quebras de vórtices em escoamentos giratórios em uma cavidade

cilíndrica com uma extremidade inferior em rotação utilizando a técnica de fluorescência induzida à laser. No experimento verificou-se a região de uma, duas e três bolhas de quebra de vórtice à partir de um determinado números de Reynolds e razão de aspecto da cavidade. A Figura 1.1 mostra o gráfico com os limites de estabilidade e a quantidade de *vortex breakdown* axissimétrico para diferentes razões H/R e números de Reynolds.

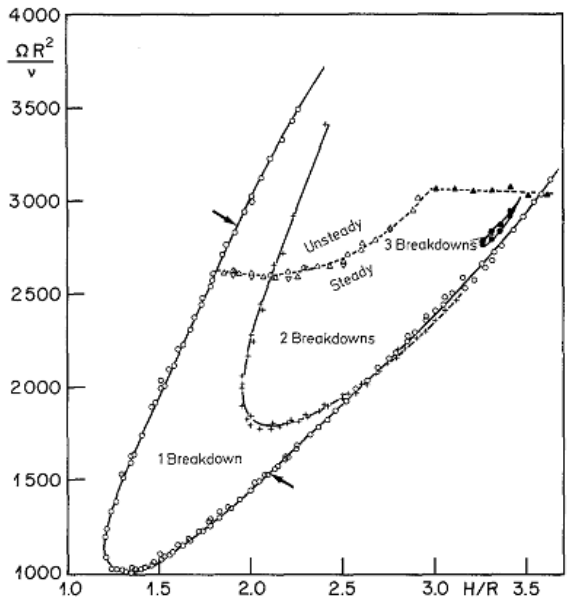


Figura 1.1 – Regiões da quebra de vórtice no problema de escoamento na cavidade cilíndrica com a tampa superior em rotação sobre o espaço paramétrico da razão de aspecto e número de Reynolds. ESCUDIER (1984).

Ainda ESCUDIER (1988) preparou uma revisão das pesquisas sobre a quebra de vórtice para encontrar a partir de níveis de correntes o entendimento ou desconhecimento, tendo em vistas as evidências experimentais realizadas e outras propostas teóricas avaliados nos últimos anos.

LOPEZ (1990) comparou experimentalmente e numericamente as ocorrências de quebras de vórtices em um escoamento giratório e laminar produzidos por uma extremidade rotativa. As visualizações experimentais de ESCUDIER (1984), que detectou a presença de múltiplas zonas de recirculação, foram comparadas por um modelo numérico. O modelo resolveu as equações de Navier-Stokes completas e permanentes reproduzindo com exatidão os fenômenos e as outras características observadas no escoamento em questão.

Neste contexto um estudo experimental foi conduzido por SPOHN *et al.* (1993) que utilizou uma técnica de fluorescência induzida à laser para visualizar o escoamento permanente conduzido por uma base rotativa em uma cavidade cilíndrica aberta. O

comportamento do escoamento e as condições de quebra de vórtice foram estudados como função da razão de aspecto da cavidade (H/R) e o número de Reynolds ($Re = \Omega R^2/\nu$). Foi observado que quando se aumenta o número de Reynolds as quebras de vórtice são direcionadas para a superfície livre da cavidade aumentando o seu diâmetro.

SIGINER e KNIGHT (1993) realizaram um procedimento numérico para analisar o escoamento em superfícies livres em um cilindro com rotação permanente na base inferior. Os campos de velocidades foram constituídos das superposições dos campos azimutais e meridionais. O campo meridional foi resolvido ambos por séries biortogonais e um algoritmo numérico. Concluíram que a razão de aspecto do cilindro pode gerar uma estrutura de múltiplas células no plano meridional que por sua vez acomoda na superfície livre.

Ainda este ano TSITVERBLIT (1993) utilizou um método numérico para resolver as equações axissimétricas e permanentes de Navier-Stokes para o escoamento em uma cavidade cilíndrica com rotação em umas das extremidades. Os resultados foram encontrados por estar em boa concordância com os trabalhos experimentais e numéricos anteriores sobre uma gama de parâmetros dentro dos quais existem quebras permanentes, a forma da quebra e os parâmetros geométricos das bolhas.

DELERY (1994) revisou alguns resultados obtidos por estes estudos com cavidades cilíndricas relatando as quebras de vórtices. Relatou que as teorias mais populares para a quebra de vórtice pertencem a quatro classes principais: uma aproximação quase-cilíndrica e analogia da camada limite, soluções das equações axissimétricas de Navier-Stokes, o conceito de estado crítico e instabilidade hidrodinâmica. Utilizou uma simulação numérica direta dos problemas que também foram desenvolvidos e os resultados obtidos estão em boa concordância com as observações experimentais.

SORENSEN e CHRISTENSEN (1995) estudaram o problema, em um cenário de transição do escoamento, de um fluido em um cilindro fechado com rotação em uma das extremidades. As equações de Navier-Stokes axissimétricas foram resolvidas pelo método de diferenças finitas e validadas por resultados experimentais nos escoamentos transientes e permanentes.

Um estudo numérico do escoamento tridimensional em uma cavidade cúbica com estratificação vertical de temperatura foi apresentado por IWATSU e HYUN (1995). O escoamento foi direcionado pela tampa da cavidade que deslizava no seu próprio plano a uma velocidade constante. O topo foi mantido a uma alta temperatura

em relação à base. Soluções numéricas foram obtidas em uma faixa de parâmetros de: $100 \leq Re \leq 2000$, $0 \leq Ri \leq 10$ e Pr = 1, onde o parâmetro da convecção mista seja $Ri = Gr/Re^2$. Quando $Ri < 1$ o efeito do gradiente vertical de temperatura foi menor. Quando $Ri > 1$ o movimento do fluido exibiu verticalmente camadas de estruturas de vórtices.

WATSON e NEITZEL (1996) utilizaram experimentações numéricas para examinar o aparecimento de quebras de vórtice axissimétricas em um ambiente confinado e cilíndrico. Concluíram que as quebras de vórtices foram causadas pelo desenvolvimento de um componente azimutal negativo da vorticidade que se iniciou pela divergência das superfícies do escoamento.

Na análise experimental ESCUDIER e CULLEN (1996) aplicaram a técnica de visualização de fluxo por fluorescência à laser-induzido para avaliar os padrões de fluxo produzidos pela rotação de uma extremidade de um cilindro circular completamente preenchido com um líquido pseudoplástico viscoelástico. Foram observados que a estrutura dupla do vórtice é diferente daqueles observados em líquidos newtonianos ou pseudoplástico e/ou escoamentos com baixos números de Reynolds de líquidos viscoelástico.

KIM e HYUN (1997) estudaram numericamente a transferência de calor em um cilindro com rotação da tampa com estratificação estável. O fluxo é gerado pelo disco do topo do cilindro que rotaciona constantemente enquanto que os outros contornos do sólido permanecem estáveis. Foi adotada uma metodologia numérica baseada no algoritmo SIMPLER juntamente com o esquema QUICK. Os resultados das soluções numéricas presentes foram sujeitos à verificação experimental.

INAMURO *et al.* (1997) estudaram numericamente o escoamento de um fluido em um cilindro rotativo com um disco rotacionando co-axialmente na superfície do fluido. Neste trabalho as equações axissimétrica de Navier-Stokes foram resolvidas pelo método de volumes finitos para avaliar as magnitudes e direções do disco e as rotações do cilindro. Os resultados numéricos foram comparados com os dados experimentais publicados na literatura.

BHATTACHARYYA e PAL (1998) analisaram numericamente o escoamento giratório e laminar dentro de uma cavidade cilíndrica com co-rotação das extremidades da base e do topo. As equações permanentes de Navier-Stokes foram resolvidas para diferentes valores da razão de aspecto da cavidade, razão de rotação topo-base e números de Reynolds. Os resultados numéricos mostraram que as quebras de vórtice

surgem próximas dos eixos de rotação do cilindro e que seus tamanhos só aumentam com o acréscimo do número de Reynolds.

No contexto mais teórico SHTERN e HUSSAIN (1999) apresentaram uma revisão das características marcantes dos escoamentos rotativos como: colapso, geração de turbilhões, quebra dos vórtices e histereses com os mecanismos envolvidos a partir do auxílio das soluções de similaridade cônicas das equações de Navier-Stokes. Muitos fenômenos decorrentes deste tipo de escoamento foram tratados no estudo como por exemplos: o fluxo em uma asa do tipo delta que corresponde como colapso e as instabilidades divergentes que explica os efeitos da divisão de um tornado.

Um estudo computacional para o escoamento de um fluido de densidade estratificada em um cilindro vertical com uma tampa rotacional no topo foi conduzido por LEE e HYUN (1999). Considerou-se no estudo os efeitos dos números de Prandtl, números de Reynolds rotacionais e razão de aspecto do cilindro. Verificaram que para as configurações gravitacionalmente estáveis e instáveis o argumento baseado no comportamento da vorticidade azimutal proporcionaram resultados consistentes com os resultados disponíveis na literatura.

XUE *et al.* (1999) estudaram numericamente o problema tridimensional e transiente de escoamentos rotacionais de um fluido viscoelástico em cilindros confinados . Os autores utilizaram o método de volume finito implícito para o sistema de coordenadas cilíndricas. Os resultados mostraram que para os campos de velocidades e o desenvolvimento de quebras dos vórtices em termos de números de Reynolds e a razão de aspecto foram muito bem reproduzidos quando comparados com os resultados experimentais para fluidos newtonianos.

SOTIROPOULOS e VENTIKOS (2001) estudaram numericamente o escoamento na cavidade cilíndrica resolvendo as equações tridimensionais de Navier-Stokes. As “bolhas” estacionárias da quebra de vórtice apresentaram todas as simetrias observadas em laboratório através da técnica de injeção de traçador (SMH). Através dos cálculos das análises das características lagrangianas dos campos de escoamentos evidenciou-se também que no interior dessas “bolhas” da quebra percebem-se caminhos de partículas caóticas.

FUJIMURA *et al* (2001) realizaram medidas experimentais das componentes de velocidades em uma cavidade cilíndrica com rotação na extremidade superior. Através do velocímetro Dopler á laser conseguiram descrever as características do fenômeno de quebra de vórtice analisando diferentes razões de aspecto e números de Reynolds.

No contexto mais teórico LUCCA-NEGRO e DOHERTY (2001) revisaram estudos anteriores a respeito de quebra de vórtice nos últimos 45 anos. Dividiram o artigo em uma área com três seções: experimental, numérico e finalmente o teórico fornecendo um "guia" que direciona os leitores nas determinadas áreas específicas.

A verificação experimental de SOTIROPOULOS *et al.* (2002) novamente avaliou o transporte lagrangiano no interior das quebras de bolhas utilizando a fluorescência induzida à laser (LIF). Aplicaram-se o método para visualizar a dinâmica no interior das quebras de vórtice que se formam na sequência da primeira "bolha" com os parâmetros governantes do regime de duas "bolhas" estáveis. As "bolhas" estacionárias trocam fluidos com o escoamento externo através de movimentos aleatórios a qual as manchas do corante saem das bolhas através de espirais. O trabalho teve ótimas concordâncias com os trabalhos numéricos.

HERRADA e SHTERN (2003) realizaram simulações numéricas de um escoamento compressível em cilindro fechado induzido por uma base rotativa. Os parâmetros de estudo foram o gradiente de temperatura (ε) e os números de Mach (Ma), Froude (Fr) e Reynolds (*Re*) e razão de aspecto (*h*). Como resultados verificaram que quando ε aumenta as quebras de vórtices diminuem e então desaparecem totalmente. Os efeitos da convecção centrífuga tornaram-se mais evidente com o aumento de Ma e *Re*.

O estudo de IWATSU (2004) analisou os padrões de fluxo e as características de transferência de calor de um escoamento rotacional de fluidos incompressíveis e viscosos, em um recipiente cilíndrico com rotação da tampa superior. A solução foi obtida através dos métodos numéricos de esquemas de diferenças finitas de segunda ordem (SOR) para vários valores de números de Reynolds e números de Richardson com os valores fixos do número de Prandtl e razão de aspecto do cilindro. Os autores concluíram que os padrões de fluxo foram classificados em diferentes tipos como uma função decrescente de Ri e uma função crescente de Re. Avaliou também que o coeficiente de torque é uma função ligeiramente decrescente de Ri para os parâmetros analisados.

Novamente IWATSU (2005) analisou numericamente o escoamento giratório permanente de fluidos incompressíveis viscosos em uma cavidade cilíndrica direcionada pela base rotativa a uma velocidade angular e superfície livre do topo. Computação paramétrica foi realizada com os parâmetros: números de Reynolds e razão de aspecto. Comparações com os estudos experimentais e numéricos anteriores foram discutidas em detalhes e mostraram boas concordâncias.

OMI e IWATSU (2005) investigaram numericamente, pelo esquema de diferenças finitas de segunda ordem (SOR), o problema de escoamentos giratórios em um recipiente cilíndrico com ou sem rotação dos discos das extremidades As análises numéricas foram realizadas para números de Reynolds ($100 \leq \mathrm{Re} \leq 2000$) e números de Richardson ($0 \leq \mathrm{Ri} \leq 1$) à numero de Prandtl e razão de aspecto iguais a 1. Foram verificados que para todos os valores da razão da velocidade angular do disco do topo com o disco da base (s) o volume do fluido é levado ao repouso com o fluido nas vizinhanças de ambos os discos rotacionais em cada direção.

LIM e CUI (2005) verificaram experimentalmente a formação da quebra de vórtice do tipo espiral em uma cavidade cilíndrica. Estas quebras foram analisadas através de técnicas de visualizações com corantes para razões de aspecto H/R $\leq$ 2,5. O estudo revelou que a formação de quebra de vórtice do tipo bolha é associada com a estabilidade helical através do decréscimo do comprimento de onda.

IWATSU (2006) estudou os escoamentos estratificados em dutos com as extremidades e as paredes laterais rotacionando diferencialmente com diferenças de temperaturas entre o topo e a base. As equações governantes foram resolvidas numericamentes pelo método de diferenças finitas centrais de segunda ordem e pelo método explicito de Euler de primeira ordem. Os resultados obtidos mostraram que o fluido interno tende a rotacionar quase rigidamente com as paredes laterais, e as camadas limites são formadas nas vizinhanças dos discos das extremidades quando imposta uma diferença de temperatura vertical maior.

BHAUMIK e LAKSHMISHA (2007) investigaram o escoamento giratório por tampa em uma cavidade cilíndrica utilizando o método de Boltzmann Lattice. O escoamento é tridimensional e permanente examinado à diferentes razões de aspecto e números de Reynolds. As simulações foram comparadas com os resultados numéricos e experimentais disponíveis na literatura. Destacou-se a ocorrência de quebras de vórtices de acordo com o diagrama de ESCUDIER (1984).

A transferência de calor por convecção mista e bidimensional em cavidade retangulares com razão de aspecto igual a 10 foi analisada numericamente por SHARIFF (2007). A tampa rotativa da cavidade estava a uma alta temperatura em relação a base. Uma análise computacional foi realizada para números de Rayleighs na faixa de 10^5 para 10^8 mantendo o número de Reynolds fixo à 408,21. Os efeitos da inclinação da cavidade sob os campos de escoamento e térmico foram investigados para

ângulos de inclinação na faixa de 0° a 30°. Notou que o número de Nusselt aumenta com a inclinação da cavidade.

DOBY *et al.* (2007) realizaram análises numéricas e experimentais para o escoamento rotacionais em recipientes cilíndricos com as extremidades em rotação. As tampas superior e inferior são capazes de girar nas direções horárias e anti-horárias à diferentes velocidades angulares. O fluxo induzido é medido com um anemômetro de Doppler à laser e comparados com os perfis de velocidades. O trabalho mostrou algumas melhorias nos mecanismos de separação em hidrociclones por meio de controles das características dos escoamentos rotacionais.

Um método numérico de quarta ordem foi apresentado por IWATSU (2009) que estudou o escoamento rotativo axissimétrico de fluidos Boussinesq em cavidades com simetria rotacional. O esquema de diferenças finitas explícitas de quarta ordem em coordenadas curvilíneas, um método de multimalhas ciclo V, e um de baixo armazenamento otimizado, método de Runge-Kutta de quarta ordem foram empregados. Soluções numéricas foram apresentadas para várias formas da cavidade com diferenças de temperatura e forças de empuxo mostrando assim boas concordâncias com os estudos prévios e na literatura.

GUO *et al.* (2009) propuseram uma equação de Boltzmann Lattice (LBE) para o escoamento axissimétrico em estudo. O modelo LBE proposto conseguiu descrever os componentes de velocidades axiais, radiais e azimutais confirmando-se que pode servir como um método viável e eficiente para escoamentos axissimétricos com baixas velocidades.

BOUFFANAIS e JACONO (2009) resolveram as equações de Navier-Stokes tridimensional no escoamento giratório de um fluido confinado em uma cavidade cilíndrica com a superfície do topo aberta e direcionada pela rotação constante da extremidade inferior. As soluções obtidas numericamente foram baseadas no método de elemento espectral de Legendre.

JORGENSEN *et al.* (2010) empregou o método de diferenças finitas para resolver o problema de escoamento rotativo em cilindros fechados com a tampa superior rotacionando. Simulações numéricas para vários valores de parâmetros foram realizados a fim de reproduzir a influência das fontes de vorticidade locais a partir de uma haste rotativa posicionada ao longo do eixo do cilindro. Os resultados mostraram que as quebras dos vórtices no escoamento axissimétrico podem ser afetadas dramaticamente pela rotação da haste.

ZHOU (2011) realizou um melhoramento no modelo reformulado de Boltzmann Lattice para o escoamento axissimétrico incompressível com ou sem giros. O esquema incluiu termos fontes que resolveu naturalmente este tipo de escoamento rotacional. As soluções numéricas apresentaram ótima precisão com outros autores e capacidade de reprodução de problemas mais difíceis.

CHENG (2011) investigou o escoamento e a transferência de calor em uma cavidade quadrada onde o fluxo foi induzido por uma força cisalhante resultante do movimento da tampa combinado com a força de empuxo devido o aquecimento da base. As simulações numéricas foram realizadas para as seguintes faixas de parâmetros: números de Reynolds ($10 \leq Re \leq 2000$), Grashof ($100 \leq Gr \leq 4{,}84x10^6$), Prandtl ($0{,}01 \leq Pr \leq 50$) e Richardson($0{,}01 \leq Ri \leq 100$). Os números de Nusselt médios foram reportados para ilustrar a influência das variações dos parâmetros do escoamento na transferência de calor.

O trabalho de MAHFOUD e BESSAIH (2011) analisou numericamente o escoamento giratório oscilatório em uma cavidade cilíndrica preenchido com um metal líquido e submetidos a gradientes verticais de temperaturas. Os números de Reynolds críticos e a frequência crítica de oscilação foram calculados como uma função do número de Richardson nas faixas de 0 a 4. Os resultados numéricos mostraram que o aumento no número de Richardson causa o decréscimo de número de Reynolds críticos.

ZHANG *et al.* (2012) propuseram um modelo de Boltzmann Lattice para simular o escoamento axissimétrico incompressível. Simulações numéricas do escoamento de Hagen-Poiseville, o escoamento pulsátil de Womersley, escoamento sob uma esfera e o escoamento giratório na cavidade cilíndrica fechada foram realizadas. Os resultados concordaram com as soluções analíticas e os dados numéricos e experimentais reportados em alguns estudos anteriores.

LOPEZ (2012) analisou numericamente o escoamento rotacional em cilindros relativamente grandes direcionados pela rotação de uma extremidade. As equações governantes foram resolvidas utilizando o método de Passo Fracionado de Segunda Ordem. As simulações foram realizadas em termos de números de Reynolds críticos, frequências e números de ondas azimutais dos fluxos. Os resultados mostraram que as ondas de rotações em cilindros com H/R maiores é a mesma para cilindros menores com H/R aproximadamente igual a 1,5.

WANG *et al.* (2014) propuseram um solver para o escoamento de Boltzmann Lattice axissimétrico (ALBFS) para simular escoamentos rotativos e giratórios

incompressíveis. Validou-se o presente solver com simulações de escoamentos em tubos, Taylor-Couette e cavidades cilíndricas apresentando uma excelente concordância com as soluções analíticas e os dados disponíveis na literatura.

1.4 – A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

A complexidade dos problemas envolvendo escoamento de fluidos e transferência de calor, modelados a partir das equações de Navier-stokes e da energia, é que devido a sua natureza não-linear, a solução para essas equações é obtida pela utilização de métodos puramente numéricos ou de métodos analítico-numéricos.

Com trabalho de ÖZISIK e MURRAY (1974), sobre a solução de problemas difusivos com condições de contorno variáveis, surgiu um novo método para o tratamento de problemas a priori não transformáveis pela técnica clássica de transformação integral (ÖZISIK, 1984).

Muitas foram as contribuições na solução numérica do problema de cavidade, mas nem todos obtiveram sucesso em seus resultados, seja pela pouca precisão ou porque apresentaram falsas convergências (PÉREZ-GUERRERO e COTTA, 1992).

A técnica já foi utilizada com sucesso em várias classes de problemas presentes na mecânica dos fluidos e na transferência de calor. A aplicação da GITT pode ser resumida nos seguintes passos:

- ✓ Escolha de um problema auxiliar com base nos termos difusivos da formulação original, que contenham informações a respeito da geometria e da coordenada a ser eliminada;
- ✓ Solução do problema auxiliar, obtenção das autofunções, autovalores, norma e propriedade de ortogonalidade;
- ✓ Desenvolvimento do par transformada-inversa através da propriedade de ortogonalidade;
- ✓ Transformação do sistema diferencial parcial em um sistema diferencial ordinário, infinito e acoplado;
- ✓ Truncamento do sistema diferencial ordinário infinito e solução numérica do sistema resultante, para obtenção dos campos transformados com precisão prescrita.
- ✓ Utilização da fórmula de inversão para a construção dos potenciais originais.

A ideia básica na técnica da transformada integral generalizada é relaxar a necessidade de se encontrar uma transformação integral exata, ou seja, que resulte em um sistema diferencial transformado em forma desacoplada. Assim, pode-se escolher um problema auxiliar de autovalor que seja característico do problema original, desenvolver o par transformada-inversa associado e efetuar a transformação integral do sistema diferencial parcial, chegando-se a um sistema diferencial ordinário infinito e acoplado. Após truncamento em ordem suficientemente grande para a precisão requerida, automaticamente selecionada durante o próprio processo de solução. O sistema diferencial ordinário é resolvido numericamente por algoritmos bem estabelecidos, por exemplo, oriundos da biblioteca IMSL (2014), com controle automático de erro. A fórmula explícita de inversão fornece uma representação analítica nas demais variáveis independentes eliminadas pela transformação integral. Desta forma, a tarefa numérica por este método, ocorrerá sempre em uma única variável independente, com representação analítica do potencial desejado nas demais variáveis do problema.

A técnica já foi utilizada com sucesso em vários problemas presentes na mecânica dos fluidos e na transferência de calor. Pioneiramente, COTTA (1993) compilou diversos problemas que já foram tratados com o auxilio da GITT. No decorrer dos últimos anos, muitos trabalhos ganharam notoriedade como o de PÉREZ-GUERRERO e COTTA (1992) que usaram a GITT para solucionar o campo de velocidade em termos de função corrente e o campo de temperatura para o problema da convecção natural em cavidade quadrada. Novamente, PÉREZ-GUERRERO (1999) obteve uma solução formalmente analítica do problema de Stokes para um escoamento dentro de uma cavidade com tampa deslizante, combinando o uso das GITT com a estratégia de solução de equações diferenciais ordinárias via autovalores e autovetores. LEAL (1999) empregou a técnica hibrida para estudar a convecção natural laminar em cavidades retangulares. PEREIRA (2000) que obteve a solução das equações de Navier-Stokes e energia no estudo da convecção forçada e natural para o escoamento laminar em regime permanente em dutos circulares concentricos. SOUSA (2002) aplicou a GITT no clássico problema da cavidade quadrada, em sua forma transiente, com os lados aquecidos a diferentes temperaturas e altos valores de números de Rayleigh. Os efeitos da razão de aspecto e ângulo de inclinação na transferência de calor por convecção via GITT, através de simulações em uma cavidade quadrada e plana com um fluido de propriedades constantes e variáveis foi estudado por SILVA (2002).

OLIVEIRA (2010) avaliou o problema de difusão de calor no interior de uma cavidade cilíndrica utilizando dois métodos de resolução: um método direto (GITT) e um inverso que determinou a difusividade térmica do líquido (água). SILVA (2011) avaliou numericamente com o auxilio da técnica o escoamento magnetohidrodinamico no estudo da convecção natural em cavidades quadradas.

CAPÍTULO 2

ESCOAMENTO EM CAVIDADE CILÍNDRICA COM EXTREMIDADES EM ROTAÇÃO

No presente capítulo é apresentado uma análise numérica para o escoamento rotativo de fluidos incompressíveis em uma cavidade cilíndrica com rotação nas extremidades e parede fixa. As equações governantes do escoamento são as equações de Navier-Stokes axissimétricas juntamente com a equação da continuidade e as condições de contornos apropriadas para avaliar os padrões do escoamento. Neste problema foi empregada a GITT na solução das equações resultantes da modelagem do problema físico.

2.1 - INTRODUÇÃO

O estudo de escoamentos rotativos de fluidos confinados em recipientes cilíndricos tem contribuído para o desenvolvimento de equipamentos mais sofisticados e com níveis de eficiência cada vez maiores em aplicações tecnológicas. Algumas destas aplicações podem ser encontradas em máquinas centrífugas, viscosímetros, turbo máquinas, câmaras de combustão, trocadores de calor, secagem, separação e etc.

Em sistema de combustão, por exemplo, tais como em motores de turbina a gás, motores a diesel, queimadores industriais e evaporadores, escoamentos giratórios são utilizados para melhorar o controle das taxas de misturas entre o combustível e o oxidante a fim de permitir melhores queimas e taxas de liberação de calor adequados a aplicações particulares de processo.

Como nos demais tipos de escoamentos, o rotativo tem características e estruturas peculiares. Uma estrutura ou fenômeno típico em escoamentos rotativos é conhecido como *vortex breakdown ou* quebra de vórtice, que pode ser definido como uma mudança abrupta no sentido do escoamento na região do eixo axial do vórtice, formando uma ou mais zonas de recirculação.

2.2 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

2.2.1 – Descrição do Problema Físico

Considera-se o problema de escoamento permanente e laminar, de um fluido viscoso, incompressível, em uma cavidade cilíndrica, com rotação nas extremidades superior e inferior. A configuração esquemática do problema a ser analisado é mostrada na Figura 2.1.

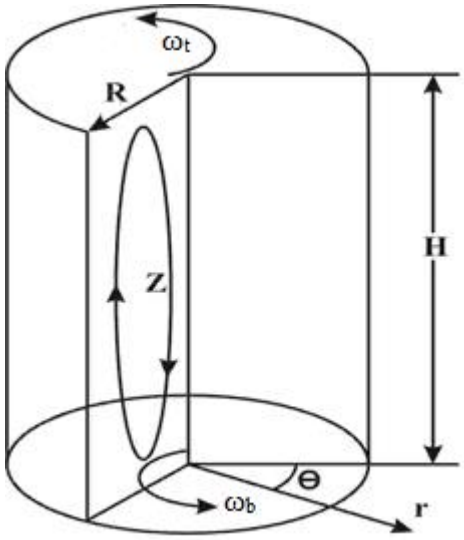


Figura 2.1 – Geometria do problema de escoamento em cavidade cilíndrica com as extremidades em rotação. Figura desenhada pelo autor a partir de informações da obra de FUJIMURA *et al.* (2005)

A tampa rotativa funciona como uma bomba, devido às forças viscosas que direciona o escoamento para as paredes laterais até alcançar a tampa estacionária onde as espirais recuam para formar um vórtice concentrado sobre os eixos.

2.2.2 – Formulação Matemática do Problema

As equações da continuidade e Navier-Stokes, que modelam o movimento desse fluido na cavidade cilíndrica, devido às extremidades rotativas, são descritas, respectivamente, como se segue:

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial(r^* v_r^*)}{\partial r^*}+\frac{\partial \mathrm{v}_z^*}{\partial z^*}=0 \tag{2.1.a}$$

$$\rho\left(\mathrm{v}_r^*\frac{\partial \mathrm{v}_r^*}{\partial r^*}-\frac{\mathrm{v}_\theta^{*2}}{r^*}+\mathrm{v}_z^*\frac{\partial \mathrm{v}_r^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial r^*}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial(r^* v_r^*)}{\partial r^*}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v}_r^*}{\partial z^{*2}}\right] \tag{2.1.b}$$

$$\rho\left(\mathrm{v}_r^*\frac{\partial \mathrm{v}_z^*}{\partial r^*}+\mathrm{v}_z^*\frac{\partial \mathrm{v}_z^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial z^*}+\mu\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v}_z^*}{\partial z^{*2}}\right] \tag{2.1.c}$$

$$\rho\left(\mathrm{v}_r^*\frac{\partial \mathrm{v}_\theta^*}{\partial r^*}+\frac{\mathrm{v}_r^*\mathrm{v}_\theta^*}{r^*}+\mathrm{v}_z^*\frac{\partial \mathrm{v}_\theta^*}{\partial z^*}\right)=\mu\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial\left(r^*\mathrm{v}_\theta^*\right)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v}_\theta^*}{\partial z^{*2}}\right] \tag{2.1.d}$$

As condições de contorno originais do problema são dadas por:

$$\text{Em } \mathrm{r}^*=0 \qquad \mathrm{v}_\mathrm{r}^*=\frac{\partial \mathrm{v}_\mathrm{z}^*}{\partial \mathrm{r}^*}=\mathrm{v}_\theta^*=0 \tag{2.2.a-c}$$

$$\text{Em } \mathrm{r}^*=\mathrm{R} \qquad \mathrm{v}_\mathrm{r}^*=\mathrm{v}_\mathrm{z}^*=\mathrm{v}_\theta^*=0 \tag{2.2.d-f}$$

$$\text{Em } \mathrm{z}^*=0 \qquad \mathrm{v}_\mathrm{r}^*=\mathrm{v}_\mathrm{z}^*=0\,; \quad \mathrm{v}_\theta^*=\omega_\mathrm{b}\mathrm{r}^* \tag{2.2.g-i}$$

$$\text{Em } \mathrm{z}^*=\mathrm{H} \qquad \mathrm{v}_\mathrm{r}^*=\mathrm{v}_\mathrm{z}^*=0\,; \quad \mathrm{v}_\theta^*=\omega_\mathrm{t}\mathrm{r}^* \tag{2.2.j-l}$$

As equações acima são escritas na forma adimensional utilizando-se os seguintes grupos adimensionais:

$$r=\frac{r^*}{R};\ \ \mathrm{z}=\frac{z^*}{R};\ \ h=\frac{H}{R};\ \ \omega_b=s_b\omega;\ \ \omega_t=s_t\omega;\ \ P=\frac{P^*}{\rho R^2\omega^2}; \tag{2.3.a-f}$$

$$\mathrm{v}_r=\frac{\mathrm{v}_r^*}{R\omega};\ \ \mathrm{v}_z=\frac{\mathrm{v}_z^*}{R\omega};\ \ \mathrm{v}_\theta=\frac{\mathrm{v}_\theta^*}{R\omega}; \tag{2.3.g-i}$$

onde *h* é a razão de aspecto da cavidade cilíndrica.

Substituindo as quantidades adimensionais (2.3) nas equações (2.1) a (2.2), resulta em:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\mathrm{v}_r)}{\partial r}+\frac{\partial \mathrm{v}_z}{\partial \mathrm{z}}=0 \tag{2.4.a}$$

$$\mathrm{v}_r\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial r}-\frac{\mathrm{v}_\theta^2}{r}+\mathrm{v}_z\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\mathrm{v}_r)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v}_r}{\partial z^2}\right] \tag{2.4.b}$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] \tag{2.4.c}$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] \tag{2.4.d}$$

sendo:

$$\mathrm{Re} = \frac{R^2 \omega}{\nu} \tag{2.5}$$

As condições de contorno adimensionais são dadas por:

$$\text{Em } r = 0 \qquad v_r = \frac{\partial v_z}{\partial r} = v_\theta = 0 \tag{2.6.a-c}$$

$$\text{Em } r = 1 \qquad v_r = v_z = v_\theta = 0 \tag{2.6.d-f}$$

$$\text{Em } z = 0 \qquad v_r = v_z = 0; \quad v_\theta = s_b r \tag{2.6.g-i}$$

$$\text{Em } z = h \qquad v_r = v_z = 0; \quad v_\theta = s_t r^* \tag{2.6.j-l}$$

A função corrente bidimensional é definida em termos das componentes das velocidades nas direções *r* e *z*, respectivamente, como:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}; \qquad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{2.7.a-b}$$

A fim de se expressar as equações de momento em termos de função corrente deriva-se a equação (2.4.b) com relação a *"z"* e a equação (2.4.c) com relação a *"r"*, os resultados são subtraídos e a definição de função corrente é introduzida no resultado tornando-se:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial (E^2\Psi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial (E^2\Psi)}{\partial z} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}E^2\Psi - 2v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}E^4\Psi \tag{2.8.a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} - \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right) \tag{2.8.b}$$

sendo que os operadores associados E^2, E^4 e ∇^2 são definidos como:

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.9.a}$$

$$E^4\Psi = E^2\left(E^2\Psi\right) \tag{2.9.b}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.9.c}$$

As condições de contorno do problema após a definição de função corrente tomam a forma a seguir:

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{\Psi(0,z)}{r}\right] = \lim_{r\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi(0,z)}{\partial r}\right]\right\} = v_\theta(0,z) = 0 \tag{2.10.a-c}$$

$$\Psi(1,z) = \frac{\partial\Psi(1,z)}{\partial r} = v_\theta(1,z) = 0 \tag{2.10.d-f}$$

$$\Psi(r,0) = \frac{\partial\Psi(r,0)}{\partial z} = 0; \qquad v_\theta(r,0) = s_b r; ; \tag{2.10.g-i}$$

$$\Psi(r,h) = \frac{\partial\Psi(r,h)}{\partial z} = 0; \qquad v_\theta(r,h) = s_t r; \tag{2.10.j-l}$$

2.3.– METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A equação (2.8.a) resulta em um sistema diferencial de quarta ordem. A solução para este tipo de equação e as demais será resolvida através do uso da GITT, e cada uma das etapas de aplicação da técnica será mostrada a seguir.

2.3.1 Determinação dos Problemas Auxiliares

A aplicação da GITT requer a escolha dos problemas de autovalores, que servirão como base para a expansão em autofunções dos campos de função corrente e velocidade tangencial que serão obtidas de problemas auxiliares associados respectivamente as equações (2.8.a-b), com a finalidade de explorar suas propriedades de ortogonalidade.

A próxima etapa deste método, que define os problemas auxiliares que permitirão encontrar suas respectivas autofunções e autovalores, será definida a seguir:

– Problema auxiliar para o potencial auxiliar da função corrente $\Psi(r,z)$**:**

O problema de autovalor do tipo bi-harmônico escolhido para o potencial auxiliar da função corrente, descrito pela equação (2.8.a), será aquele proposto por FEDELE (2005), e que é dado por:

$$\left(\frac{d^4}{dr^4}-\frac{2}{r}\frac{d^3}{dr^3}+\frac{3}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}-\frac{3}{r^3}\frac{d}{dr}\right)X_i(r)=-\alpha_i^2\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\right]X_i(r) \qquad \text{para i=1,2,3,....} \quad (2.11.a)$$

com condições de contorno:

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{X_i(r)}{r}\right]=0; \quad \lim_{r\to 0}\left\{\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dX_i(r)}{dr}\right]\right\}=0 \qquad (2.11.b\text{-}c)$$

$$X_i(1)=0; \quad \frac{dX_i(1)}{dr}=0 \qquad (2.11.d\text{-}e)$$

em que $X_i(r)$ e α_i são as autofunções e os autovalores, respectivamente, que satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \frac{1}{r}\frac{dX_i(r)}{dr}\frac{dX_j(r)}{dr}dr=\begin{cases}0, & i\neq j\\ L_i, & i=j\end{cases} \qquad (2.11.f)$$

sendo que L_i é a norma ou integral de normalização.

A equação (2.11.a) é solucionada analiticamente para fornecer:

$$X_i(r)=r^2-\frac{rJ_1(\alpha_i r)}{J_1(\alpha_i)}; \qquad \text{para i=1,2,3,...} \qquad (2.11.g)$$

em que os autovalores α_is são calculados a partir da seguinte equação transcendental:

$$J_2(\alpha_i)=0; \qquad \text{para i=1,2,3,...} \qquad (2.11.h)$$

e a norma definida como:

$$L_i = \int_0^1 \frac{1}{r}\left[\frac{dX_i(r)}{dr}\right]^2 dr = \frac{\alpha_i^2}{2} \qquad \text{para i=1,2,3,...} \qquad (2.11.i)$$

– Problema auxiliar para o potencial auxiliar da velocidade tangencial $v_\theta(r,z)$ **:**

Para a componente $v_\theta(r,z)$ utilizaremos o problema auxiliar definido como:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Omega_i(r)}{dr}\right) - \left(\frac{1}{r^2} - \beta_i^2\right)\Omega_i(r) = 0 \qquad \text{para i=1,2,3,....} \qquad (2.12.a)$$

com condições de contorno

$$\Omega_i(0) = 0; \quad \Omega_i(1) = 0 \qquad (2.12.b\text{-}c)$$

em que $\Omega_i(r)$ e β_i são as autofunções e os autovalores, respectivamente, que satisfazem a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 r\Omega_i(r)\Omega_j(r)dr = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ M_i, & i = j \end{cases} \qquad (2.12.d)$$

onde M_i é a norma ou integral de normalização.

A equação (2.12.a) é solucionada analiticamente para fornecer:

$$\Omega_i(r) = J_1(\beta_i r) \qquad (2.12.e)$$

onde os autovalores β_i's são calculados a partir da seguinte equação transcendental:

$$J_1(\beta_i) = 0; \qquad \text{para i = 1,2,3,....} \qquad (2.12.f)$$

e a norma definida como:

$$M_i = \int_0^1 r\Omega_i^2(r)dr = \frac{J_0^2(\beta_i)}{2} \qquad \text{para i=1,2,3,..} \tag{2.12.g}$$

2.3.2 Determinação dos Pares Transformada-Inversa

As propriedades de ortogonalidade (2.11.f) e (2.12.d) fornecem os seguintes pares transformada-inversa para $\Psi(r,z)$ e $v_\theta(r,z)$, respectivamente:

$$\bar{\Psi}_i(z) = -\frac{1}{L_i}\int_0^1 \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\right] X_i(r)\Psi(r,z)dr, \qquad \text{transformada} \tag{2.13.a}$$

$$\Psi(r,z) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(r)\bar{\Psi}_i(z), \qquad \text{inversa} \tag{2.13.b}$$

$$\bar{v}_{\theta,i}(z) = \frac{1}{M_i}\int_0^1 r\Omega_i(r)v_\theta(r,z)dr \qquad \text{transformada} \tag{2.13.c}$$

$$v_\theta(r,z) = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i(r)\bar{v}_{\theta,i}(z) \qquad \text{inversa} \tag{2.13.d}$$

Determinado os pares transformada inversa, utilizam-se essas definições na transformação integral dos sistemas de equações diferenciais parciais resultantes obtendo-se um sistema de EDOs para o cálculo dos potenciais transformados $\bar{\Psi}_i(r,z)$ e $\bar{v}_{\theta,i}(r,z)$.

2.3.3 Transformação Integral do Sistema de EDP's

Seguindo o formalismo da GITT, ocorrerá a transformação integral das equações diferenciais parciais (2.8.a-b) que resultará em um sistema diferencial ordinário, o qual fornecerá os potenciais transformados $\bar{\Psi}_i(r,z)$ e $\bar{v}_{\theta,i}(r,z)$. Primeiramente, faz-se o uso do operador $\int_0^1 \frac{X_i(r)}{r}dr$ na equação (2.8.a), problema do campo de função corrente, resultando no sistema infinito e acoplado de EDOs:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d^4\bar{\Psi}_j(z)}{dz^4} = \alpha_i^2 \frac{d^2\bar{\Psi}_i(z)}{dz^2} - \frac{\alpha_i^4}{2}\bar{\Psi}_i(z) + Re\left[\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_{ijk}\bar{\Psi}_j(z)\frac{d\bar{\Psi}_k(z)}{dz} + C_{ijk}\frac{d\bar{\Psi}_j(z)}{dz}\frac{d^2\bar{\Psi}_k(z)}{dz^2} + D_{ijk}\bar{\Psi}_j(z)\frac{d^3\bar{\Psi}_k(z)}{dz^3}\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} E_{ijk}\bar{v}_{\theta,j}(z)\frac{d\bar{v}_k(z)}{dz}\right] \tag{2.14.a}$$

em que os coeficientes são definidos pelas integrais:

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{X_i(r)X_j(r)}{r} dr \tag{2.14.b}$$

$$B_{ijk} = \int_0^1 X_i(r)\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^3X_j(r)}{dr^3} - \frac{3}{r^3}\frac{d^2X_j(r)}{dr^2} + \frac{3}{r^4}\frac{dX_j(r)}{dr}\right)X_k(r) - \frac{1}{r^2}\frac{dX_j(r)}{dr}\frac{d^2X_k(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dX_j(r)}{dr}\frac{dX_k(r)}{dr}\right]dr \tag{2.14.c}$$

$$C_{ijk} = \int_0^1 X_i(r)\left(\frac{X_j(r)}{r^2}\frac{dX_k(r)}{dr} - \frac{2}{r^3}X_j(r)X_k(r)\right)dr \tag{2.14.d}$$

$$D_{ijk} = -\int_0^1 \frac{X_i(r)}{r^2}\frac{dX_j(r)}{dr}X_k(r)dr \tag{2.14.e}$$

$$E_{ijk} = -2\int_0^1 \frac{X_i(r)\Omega_j(r)\Omega_k(r)}{r}\, dr \tag{2.14.f}$$

Para o problema da velocidade tangencial, faz-se o uso do operador $\int_0^1 r\Omega_i(r)dr$ na equação (2.8.b), resultando também em um sistema infinito e acoplado de EDO's abaixo:

$$\frac{d^2\bar{v}_{\theta,i}(z)}{dz^2} = \beta_i^2\bar{v}_{\theta,i}(z) + Re\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(G_{ijk}\bar{v}_{\theta,j}(z)\frac{d\bar{\Psi}_k(z)}{dz} + H_{ijk}\frac{d\bar{v}_{\theta,j}(z)}{dz}\bar{\Psi}_k(z)\right) \tag{2.15.a}$$

sendo que os coeficientes são definidos pelas integrais:

$$G_{ijk} = \frac{1}{M_i}\int_0^1 \Omega_i(r)\left(\frac{d\Omega_j(r)}{dr} + \frac{\Omega_j(r)}{r}\right)X_k(r)dr \tag{2.15.b}$$

$$H_{ijk} = -\frac{1}{M_i}\int_0^1 \Omega_i(r)\Omega_j(r)\frac{dX_k(r)}{dr}dr \tag{2.15.c}$$

O mesmo procedimento pode ser conduzido nas condições de contorno definidas pelas Eqs. (2.10.a-l), para assim resultar:

$$\bar{\Psi}_i(0) = \frac{d\bar{\Psi}_i(0)}{dz} = 0; \qquad \bar{v}_{\theta,i}(0) = \bar{f}_i; \tag{2.16.a-c}$$

$$\bar{\Psi}_i(h) = \frac{d\bar{\Psi}_i(h)}{dz} = 0; \qquad \bar{v}_{\theta,i}(h) = \bar{g}_i; \tag{2.16.d-f}$$

sendo:

$$\bar{f}_i = \frac{s_b}{M_i}\int_0^1 r^2 \Omega_i(r) dr = -\frac{2s_b}{\beta_i J_0(\beta_i)} \tag{2.17.b}$$

$$\bar{g}_i = \frac{s_t}{M_i}\int_0^1 r^2 \Omega_i(r) dr = -\frac{2s_t}{\beta_i J_0(\beta_i)} \tag{2.17.b}$$

Os coeficientes integrais foram resolvidos numericamente, utilizando a sub-rotina DQDAG da biblioteca IMSL (2014) para obter os resultados dentro de uma precisão prescrita de 10^{-10}. O tempo computacional para o cálculo dessas integrais aumenta, substancialmente, à medida que aumentamos a quantidade de termos nas expansões.

Desta forma o problema diferencial parcial original foi transformado num sistema infinito de EDOs acopladas, constituindo um de segunda e quarta ordem não lineares.

2.3.4 O Algoritmo Computacional

Ao transformar o sistema diferencial parcial obteve-se um sistema infinito de equações ordinárias não lineares de quarta ordem para a função corrente e de segunda ordem oara a velocidade tangencial com condições de contorno em dois pontos. Para resolver este sistema, é necessário truncar a expansão em um número finito de termos, suficientemente grande que permita obter soluções convergidas para uma precisão desejada. A solução numérica deste sistema, com controle automático de erro, é obtida através da subrotina DBVPFD da biblioteca IMSL (2014), com o objetivo de resolver problemas de natureza rígida (*stiff*), ou seja, problemas que apresentam um elevado grau de não linearidade.

Deste modo, para adaptar a estrutura das equações (2.14.a) e (2.15.a) é necessário reescrever os sistema de equações diferenciais de quarta ordem e de segunda ordem como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, definindo-se o vetor solução W_i como:

$$\bar{\Psi}_i = W_i; \qquad i = 1,2,3,...,NF \tag{2.18.a}$$

$$\frac{d\bar{\Psi}_i}{dz} = \frac{dW_i}{dz} = W_{i+NF} \tag{2.18.b}$$

$$\frac{d^2\bar{\Psi}_i}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\bar{\Psi}_i}{dz}\right) = \frac{dW_{i+NF}}{dz} = W_{i+2NF} \tag{2.18.c}$$

$$\frac{d^3\bar{\Psi}_i}{dz^3} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d^2\bar{\Psi}_i}{dz^2}\right) = \frac{dW_{i+2NF}}{dz} = W_{i+3NF} \tag{2.18.d}$$

$$\frac{d^4\bar{\Psi}_i}{dz^4} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d^3\bar{\Psi}_i}{dz^3}\right) = \frac{dW_{i+3NF}}{dz} \tag{2.18.e}$$

$$\bar{v}_{\theta,i} = W_{i+4NF}; \qquad i=1,2,3,...,NV \tag{2.18.f}$$

$$\frac{d\bar{v}_{\theta,i}}{dz} = \frac{dW_{i+4NF}}{dz} = W_{i+4NF+NV} \tag{2.18.g}$$

$$\frac{d^2\bar{v}_{\theta,i}}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\bar{v}_{\theta,i}}{dz}\right) = \frac{dW_{i+4NF+NV}}{dz} \tag{2.18.h}$$

Substituindo as equações (2.18.a-h) nas equações (2.14.a) e (2.15.a) , obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{NF} A_{ij}\frac{dW_{i+3NF}}{dz} = \alpha_i^2 W_{i+2NF} - \frac{\alpha_i^4}{2}W_i + Re\left[\sum_{j=1}^{NF}\sum_{k=1}^{NF}\left(B_{ijk}W_jW_{k+NF} + C_{ijk}W_{j+NF}W_{k+2NF} + D_{ijk}W_jW_{k+3NF}\right) + \sum_{j=1}^{NV}\sum_{k=1}^{NV}E_{ijk}W_{j+4NF}W_{k+4NF+NV}\right] \tag{2.19.a}$$

$$\frac{dW_{i+4NF+NV}}{dz} = \beta_i^2 W_{i+4NF} + Re\sum_{j=1}^{NV}\sum_{k=1}^{NF}\left(G_{ijk}W_{j+4NF}W_{k+NF} + H_{ijk}W_{j+4NF+NV}W_k\right) \tag{2.19.b}$$

Com as condições de contorno (3.16.a-f) sendo submetidas ao mesmo procedimento, tem-se:

$$W_i(0) = W_{i+NF}(0) = 0; \qquad W_{i+4NF}(0) = \bar{f}_i; \tag{2.20.a-c}$$

$$W_i(h) = W_{i+NF}(h) = 0; \qquad W_{i+4NF}(h) = \bar{g}_i; \tag{2.20.d-f}$$

O sistema de equações (2.19.a-b) agora está no formato para a solução numérica. As expansões são então, truncadas em NF e NV termos para os campos de função corrente e velocidade, respectivamente, onde as ordens de truncamento são automaticamente selecionadas ao longo da integração, de modo a atingir a precisão desejada.

2.3.5 Cálculo do Campo de Velocidades

A componente tangencial da velocidade é calculada pela equação (2.13.d) enquanto que os campos de velocidades axiais e radiais podem ser obtidos a partir da definição de função corrente dada pelas Equações (2.7.a-b), depois de introduzir a fórmula de inversão (2.13.b) tem-se:

$$v_r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{r} \frac{\mathrm{d}\bar{\Psi}_i(z)}{\mathrm{d}z} \tag{2.21.a}$$

$$v_z = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}X_i(r)}{\mathrm{d}r} \bar{\Psi}_i(z) \tag{2.21.b}$$

2.4.– RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram estudados os casos para vários números de Reynolds (*Re*) e razões de aspecto (*h*) da cavidade cilíndrica preenchida com fluido newtoniano, correspondente aos valores experimentais utilizados por FUJIMURA *et al.* (2001) e outros autores, e sendo utilizados para comparação dos resultados deste trabalho.

Para a solução do sistema diferencial ordinário utilizou-se a subrotina DBVPFD da biblioteca IMSL (2014) com erro relativo global prescrito de 10^{-4} obtenção dos potenciais transformados e com iguais ordens de truncamento N=NF=NV para todos os campos.

2.4.1.– Comparação das velocidades máximas e localização e análise de Convergência

As velocidades máximas axiais (Vz,max) e suas posições (H/R) são mostradas na Tabela 2.1 e em comparação com os dados experimentais de FUJIMURA *et*

al.(2001) e outros resultados numéricos a partir do método 3D de Boltzmann Lattice (LBM) e a solução de Navier-Stokes (N-S) dos autores BHAUMIK e LAKSHMISHA (2007). Os erros relativos calculados entre as soluções numéricas e as medidas experimentais são dados por: Er = (Vz, cal – Vz,exp)/ Vz,exp.

Pode ser visto a partir da Tabela 2.1 que para Re = 990 o erro relativo do presente trabalho é 1,55 %, que é menor o que o valor da solução 3D LBM com 4,2% e o resultado de Navier-Stokes com 2,1 %. Para Re = 1290 é 3,53%, a solução 3D LBM que é quase o modelo melhorado com 5,5% e o resultado de Navier-Stokes com 2,2%, e para Re = 1010 é 0,97%, que é muito próximo da solução 3D LBM com 0,9% e o resultado de Navier-Stokes com 2,9%. Isto indica que o modelo numérico proposto pode produzir soluções precisas, concordando muito bem com as investigações anteriores.

Para análise de convergência, os resultados foram obtidos para dois números de Reynolds (*Re* = 2000 e 3061), e para duas razões de aspecto (*h* =1,0 e 3,5). Deste modo, os resultados são tabelados de acordo com as posições ao longo das direções *r* e *z*, tornando possível observar o progresso da convergência com o aumento da ordem de truncamento dos termos nos somatórios.

Desse modo foram escolhidas três posições ao longo da direção z da cavidade com tampas giratórias, sendo uma próxima da extremidade inferior, outra na metade da altura cavidade (correspondente H/2) e uma terceira próxima a extremidade superior. A análise da velocidade axial é realizada no centro do cilindro (r = 0) enquanto que a função corrente, velocidade radial e tangencial na posição r = 0,1.

Tabela 2.1: Comparações das velocidades máximas axiais para *Re* = 990, 1010 e 1290, em r = 0,0.

Referência	Re = 990		Re = 1010		Re = 1290	
	$V_{z,max}/V_0$	h_{max}/H	$V_{z,max}/V_0$	h_{max}/H	$V_{z,max}/V_0$	h_{max}/H
Presente Trabalho	0,0985	0,2070	0,1020	0,4450	0,7040	0,1420
Fujimura *et al.*(2001) (Experimental)	0,0970	0,2100	0,1030	0,4600	0,6800	0,1400
Bhaumik e Lakshmisha (2007) (3D LBM)	0,0930	0,2200	0,1020	0,5200	0,7200	0,1600
Bhaumik e Lakshmisha (2007) (Navier-Stokes)	0,0990	0,1900	0,1060	0,4400	0,6650	0,1250
Diferença GITT	**1,55%**	**1,45%**	**0,97%**	**3,37%**	**3,53%**	**1,40%**

Nas Tabelas 2.2 e 2.3 são apresentados os resultados para o comportamento da convergência da velocidade axial em r = 0,0 e para as funções correntes, velocidades radiais e tangenciais em r = 0,1, com diferentes posições axiais ao longo da cavidade, para *Re* = 2000 e 3061 e *h* = 1,0 e 3,5, respectivamente.

Pode-se verificar na Tabela 2.2 que para *Re* = 2000 e razão de aspecto (*h* = H/R) igual a 1,0, que os resultados apresentaram uma boa taxa de convergência alcançada com três dígitos significativos (N = 60) nas expansões, para todas as posições de r e z. Aumentando-se o número de Reynolds (*Re* = 3061), percebe-se que, com razão de aspecto de *h* = 3,5 a taxa de convergência (N = 80), com três dígitos significativos, é mais lenta em relação ao número de *Re* = 2000. De fato, para este valor de Re = 3061, Tabela 2.3, os números de termos utilizados na série não foram suficientes para alcançar a convergência completa da velocidade axial acarretando o aumento do custo computacional. Podemos observar que a equação (2.21.b), que descreve a velocidade axial, é dificultada pela presença do efeito da zona de instabilidade oscilatória, que se encontra no plano médio da cavidade para o escoamento rotativo.

A convergência da componente tangencial da velocidade ocorre com menor número de termos nas séries do que para a componente radial, quando consideradas as

mesmas posições da seção da cavidade. Novamente quando se aumenta *Re* a convergência da componente tangencial da velocidade acontece com 60 termos no terceiro dígito significativo na posição mais próxima do topo do cilindro. No entanto, para a componente radial, essa convergência é dificultada necessitando de mais séries nas expansões. Isto ocorre, porque a equação (2.21.a) que relaciona a componente radial com a função corrente é calculada a partir da derivada da função corrente com relação à *z* dificultando a convergência dessa componente em comparação com a velocidade tangencial originada da equação (2.13.d).

Conclui-se que a dificuldade do processo de convergência dos potenciais transformados da função corrente e, consequentemente, os campos de velocidade no interior da cavidade cilíndrica, possivelmente, sofre mais influência na zona de formação dos vórtices axissimétricos através dos efeitos do fenômeno no escoamento.

Tabela 2.2 - Convergência da velocidade axial, função corrente, velocidade radial e tangencial nas posições radiais r = 0,0 e 0,1, para *h* = 1,0 e *Re* = 2000

r = 0,0						
Velocidade axial						
z	**N = 10**	**N = 20**	**N = 40**	**N = 60**	**N = 80**	**N = 90**
0,1	0,619E-01	0,419E-01	0,406E-01	0,406E-01	0,406E-01	0,406E-01
0,5	0,347E-02	-0,282E-02	-0,153E-02	-0,139E-02	-0,135E-02	-0,135E-02
0,9	0,437E-01	0,126E-01	0,985E-02	0,985E-02	0,986E-02	0,986E-02
r = 0,1						
Função Corrente						
z	**N = 10**	**N = 20**	**N = 40**	**N = 60**	**N = 80**	**N = 90**
0,1	-0,435E-03	-0.159E-03	-0.117E-03	-0.117E-03	-0.117E-03	-0.117E-03
0,5	-0,350E-03	-0.145E-03	-0.873E-04	-0.869E-04	-0.869E-04	-0.869E-04
0,9	-0,680E-03	-0.323E-03	-0.895E-04	-0.864E-04	-0.863E-04	-0.863E-04
Velocidade radial						
z	**N = 10**	**N = 20**	**N = 40**	**N = 60**	**N = 80**	**N = 90**
0,1	-0,738E-02	-0.811E-02	-0.685E-02	-0.687E-02	-0.688E-02	-0.688E-02
0,5	-0,140E-03	-0.784E-04	0.623E-03	0.618E-03	0.616E-03	0.615E-03
0,9	-0,385E-02	-0.223E-01	0.475E-03	0.772E-03	0.785E-03	0.791E-03
Velocidade tangencial						
z	**N = 10**	**N = 20**	**N = 40**	**N = 60**	**N = 80**	**N = 90**
0,1	0,146E+00	0.539E-01	0.401E-01	0.400E-01	0.400E-01	0.400E-01
0,5	0,971E-01	0.409E-01	0.295E-01	0.294E-01	0.294E-01	0.294E-01
0,9	0,134E+00	0.579E-01	0.275E-01	0.273E-01	0.273E-01	0.273E-01

N = NF=NV

Tabela 2.3: Convergência da velocidade axial, função corrente, velocidade radial e tangencial nas posições radiais r = 0,0 e 0,1 para h = 3,5 e Re = 3061

r = 0,0						
Velocidade axial						
z	**N = 10**	**N = 20**	**N = 40**	**N = 60**	**N = 80**	**N = 90**
0,1	0,926E-01	0,632E-01	0,487E-01	0,477E-01	0,475E-01	0,475E-01
1,5	0,951E-02	0,362E-03	-0,124E-02	-0,964E-03	-0,886E-03	-0,871E-03
3,4	-0,443E-01	0,988E-01	0,279E-01	0,157E-01	0,157E-01	0,158E-01
r = 0,1						
Função Corrente						
z	**N = 10**	**N = 20**	**N = 40**	**N = 60**	**N = 80**	**N = 90**
0,1	0.363E-03	0.242E-03	0.193E-03	0.190E-03	0.189E-03	0.189E-03
1,5	0.646E-04	0.146E-04	0.668E-05	0.831E-05	0.876E-05	0.884E-05
3,4	0.609E-03	0.423E-03	0.109E-03	0.810E-04	0.804E-04	0.804E-04
Velocidade radial						
z	**N = 10**	**N = 20**	**N = 40**	**N = 60**	**N = 80**	**N = 90**
0,1	0.336E-01	0.278E-01	0.242E-01	0.239E-01	0.239E-01	0.239E-01
1,5	0.525E-03	0.594E-03	0.221E-04	0.130E-03	0.157E-03	0.162E-03
3,4	0.171E-01	0.195E-01	0.223E-02	0.483E-03	0.549E-03	0.557E-03
Velocidade tangencial						
z	**N = 10**	**N = 20**	**N = 40**	**N = 60**	**N = 80**	**N = 90**
0,1	0.923E-01	0.550E-01	0.416E-01	0.4070E-01	0.405E-01	0.405E-01
1,5	0.351E-01	0.169E-01	0.103E-01	0.988E-02	0.983E-02	0.982E-02
3,4	0.778E-01	0.510E-01	0.171E-01	0.138E-01	0.138E-01	0.138E-01

N = NF=NV

2.4.2 – Isolinhas de Função Corrente do Topo Rotativo, Co e Contra Rotação da Extremidade Inferior.

2.4.2.1 – Topo Rotativo

As Figuras (2.2) e (2.3) mostram o comportamento das isolinhas de função corrente para vários números de Reynolds e razões de aspectos. O propósito da avaliação é examinar os efeitos do escoamento rotativo confinado nos campos de velocidades tratando o fenômeno da quebra de vórtice ("*vortex breakdown*"). Foram simulados casos com as características dos experimentos realizados por ESCUDIER (1984) e FUJIMURA *et al.* (2001) e outros autores, que analisaram experimentalmente e numericamente as linhas de correntes que se formam nesse tipo de escoamento rotativo.

Para Re = 2000 e h = 1,0, a Figura (2.2.a) mostra concordância com a Figura 1.1, que estabelece os limites da estabilidade para bolhas axissimétricas. O vórtice central no plano meridional que possui espessura pequena na região próxima a extremidade inferior, e aumenta quando se aproxima da camada limite de Ekman na extremidade rotativa. O comportamento do escoamento no plano meridional também é exemplificado nas Figuras (2.2.b-d) para h = 1,5 e 2,5. É observado que os resultados correspondentes a Re = 1290 exibem uma quebra de vórtice simples enquanto que os resultados para Re = 990 e 1110 não revelaram nenhuma quebra de vórtice. Quando o número de Reynolds está ligeiramente abaixo do valor crítico não se verifica a presença de quebras de vórtices. Desta forma, quando o Re aumenta além do valor crítico, a Figura 2.2.c, um vórtice simples é notado, o que é perceptível na interseção zero da velocidade axial nos eixos. É ainda observado que para os escoamentos com quebra (Re = 1290) e apenas próximo da quebra (Re = 990), a curvatura das isolinhas em relação as linhas de eixo mudam do convexo para o côncavo, ou seja, para o escoamento sem quebra, a curvatura das linhas de corrente são convexas em relação as linhas de eixo ao longo da altura da cavidade.

As configurações dos seguintes casos simulados para comparação dos resultados numéricos com os resultados experimentais obtidos por ESCUDIER (1984) são mostrados nas Figuras (2.3.a-c). Nota-se que para H/R = 2 com número de Reynolds igual a 1854 o vórtice superior diminui, e abaixo desta surge outra quebra de vórtice com maior dimensão. Segundo ESCUDIER (1984) a forma ampulheta do núcleo de vórtice prenuncia a aparição de uma segunda quebra. Também nesse caso existe

somente um ponto de estagnação e duas zonas de recirculação, pois com o aumento do número de Reynolds a quebra de vórtice superior se movimenta em direção ao inferior, e seu ponto de estagnação deixa de existir.

As Figuras (2.3.b-c), com o aumento do número de Reynolds e das razões de aspectos verifica-se a aparição de três quebras de vórtices. Na Figura 2.3.b visualizam-se três estruturas de quebra de vórtice, sendo as duas superiores acopladas e a inferior separada, mantendo a tendência dos resultados experimentais. Para altos valores de H/R, como visto na Figura 2.3.c, que esta sequência de eventos é novamente diferente. Percebe-se que a quebra de vórtice move-se a partir dos eixos e se desenvolve em movimento circulares.

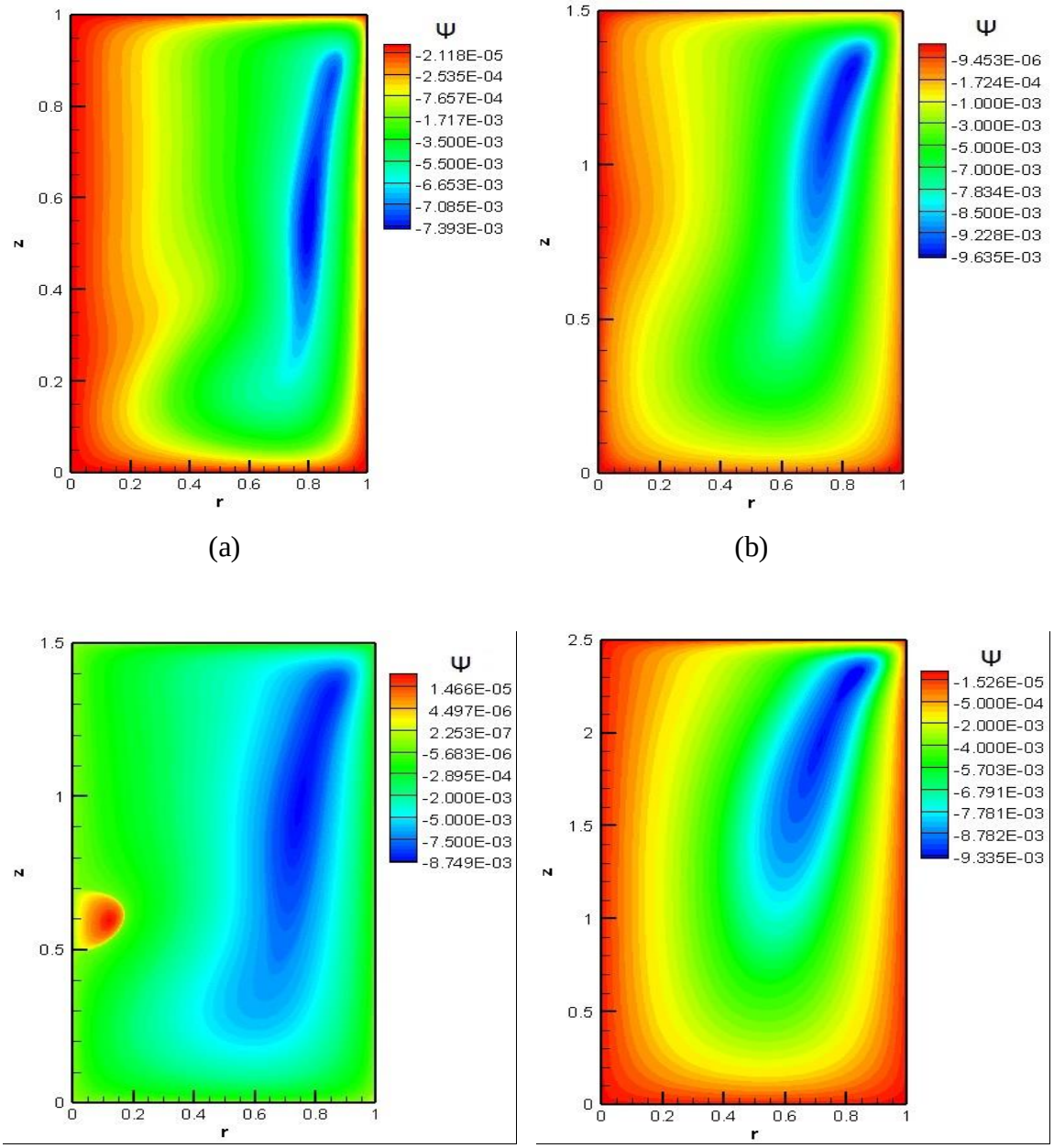


Figura 2.2 - Isolinhas de função corrente: (a) *Re* = 2000 e *h* = 1,0; (b) *Re* = 990 e *h* = 1,5; (c) *Re* = 1290 e *h* = 1,5; (d) *Re* = 1010 e *h* = 2,5.

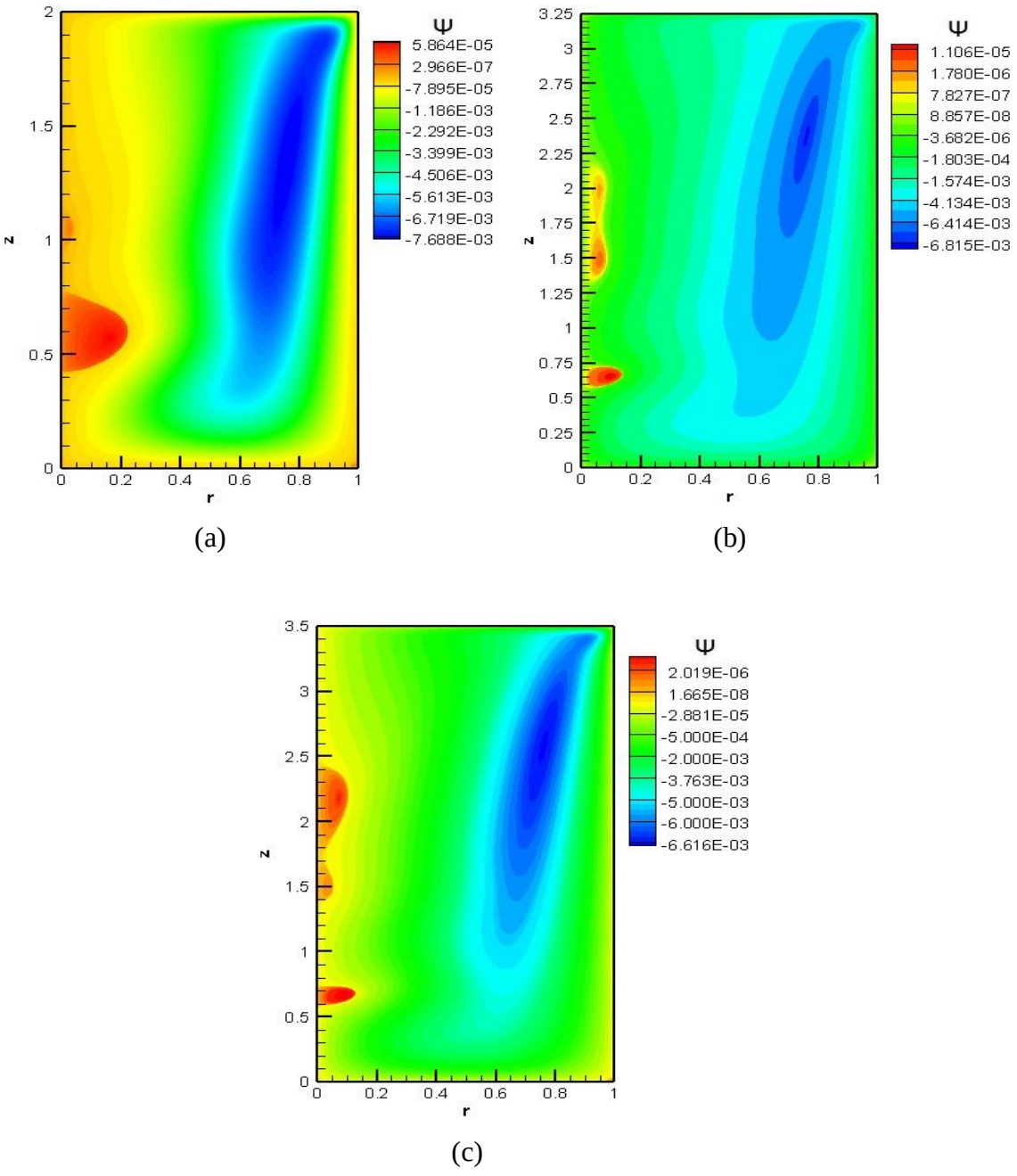


Figura 2.3 - Isolinhas de função corrente: (a) *Re* = 1854 e *h* = 2,0; (b) *Re* = 2819 e *h* = 3,25; (c) *Re* = 3061 e *h* = 3,5.

2.4.2.2 – Co e contra rotação da extremidade inferior

As Figuras (2.4) e (2.5) mostram o comportamento das isolinhas de função corrente induzido pela co-rotação e contra rotação das extremidades para os devidos números de Reynolds (*Re* = 2000, 990 e 2819) e razões de aspectos (*h* = 1,0; 1,5 e 3,25). Neste caso, um dos objetivos do presente trabalho é analisar os efeitos da co e contra-

rotação da base da cavidade sobre o escoamento permanente e o início da instabilidade oscilatória. A princípio foi encontrado que a contra rotação da base elimina a quebra de vórtice enquanto que a co-rotação deva causar esta quebra no escoamento. Deste modo nas Figuras 2.4, que analisa a mudança do escoamento meridional da corotação da extremidade inferior, percebe-se o aparecimento de dois vórtices de separação antissimétricos que estão ligados ao eixo. A influência da co-rotação sob o escoamento provoca o aumento das quebras que continuamente transformam-se umas nas outras com o aumento do número de Reynolds e da razão de aspecto. Para *Re* = 2819 os pontos de estagnação superior e inferior no eixo do cilindro movem em direção ao meio do ponto de estagnação em r = 0 ocorrendo uma deformação no escoamento, em 4 campos de recirculação, dois dos quais são destacadas as bolhas simétricas.

As Figuras 2.5 representam a mudança do escoamento meridional quando existir a contra-rotação da base da cavidade. Este caso permite o aparecimento de duas regiões de recirculações ambas no sentido horário e anti-horário tornando-se antissimétrica. Caracteriza-se pelo desprendimento das quebras de vórtices de separação nos eixos do cilindro e a formação de dois anéis de vórtice. Segundo BHATTACHARYYA e PAL (1999) que estas zonas de separação aparecem quando a função corrente é igual a zero desenvolvendo uma camada cisalhante ao longo do meio do plano. É evidente que a partir de números maiores de Reynolds os contornos das isolinhas exibem ondulações. Os vórtices crescem em tamanho quando se aumenta o número de Reynolds e também elas expandem com o aumento da razão de aspecto.

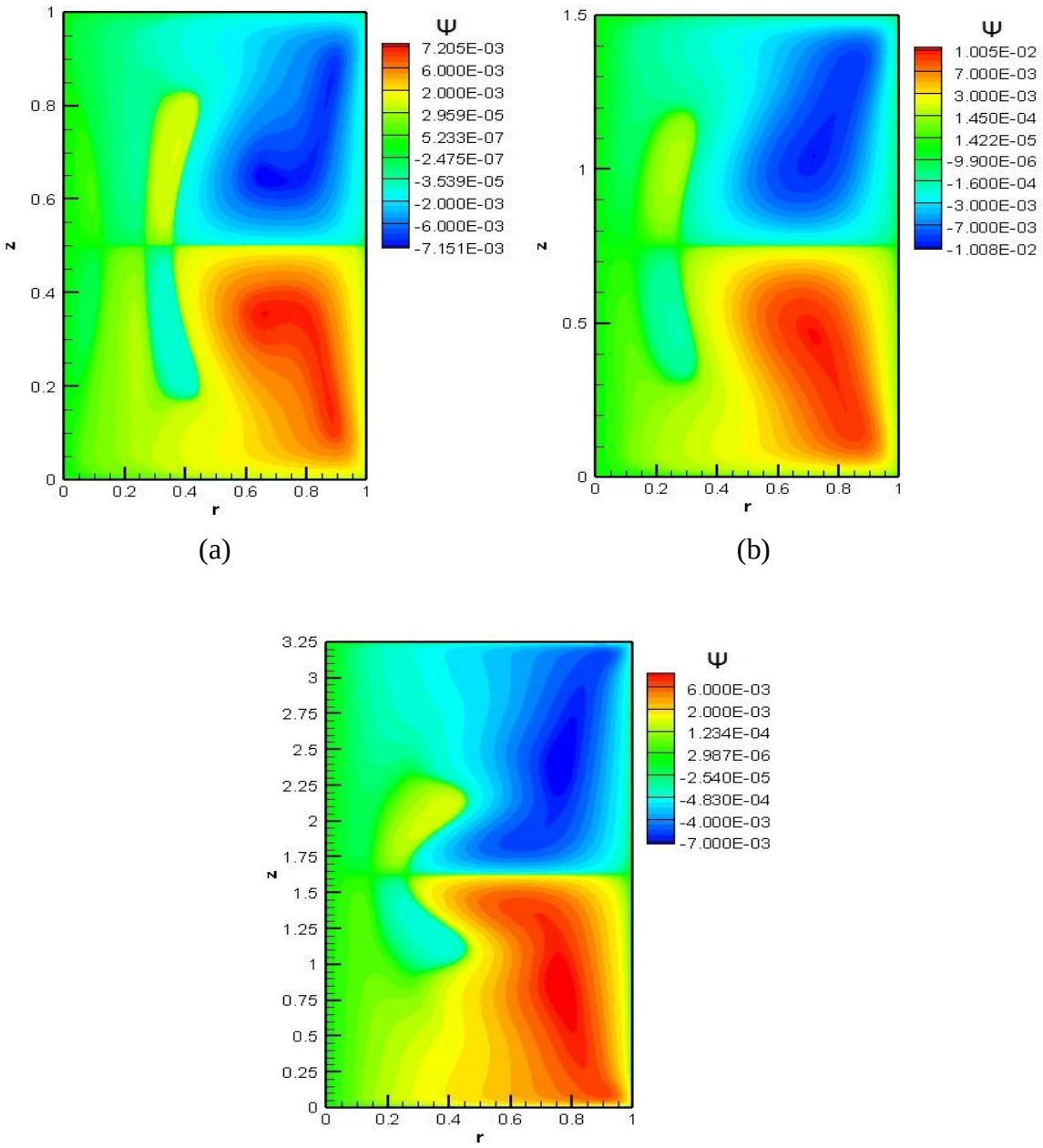


Figura 2.4 - Isolinhas de função corrente da co-rotação: (a) *Re* = 2000 e *h* = 1,0; (b) Re = 990 e *h* = 1,5; (c) *Re* = 2819 e *h* = 3,25.

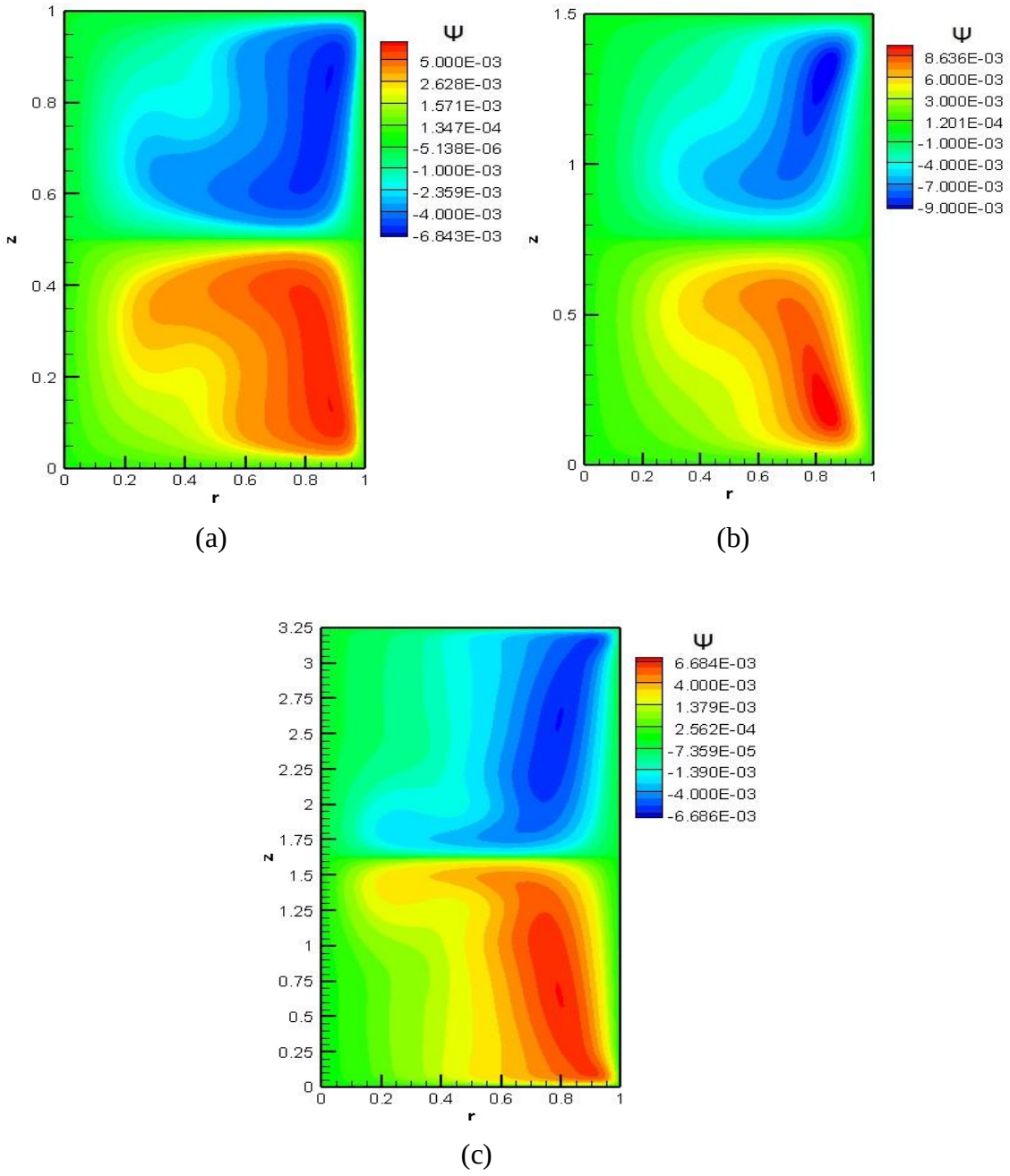


Figura 2.5 - Isolinhas de função corrente da contra-rotação: (a) *Re* = 2000 e *h* = 1,0; (b) *Re* = 990 e *h* = 1,5; (c) *Re* = 2819 e *h* = 3,25.

2.4.3.– Perfil de velocidade

O comportamento do campo de velocidades axiais no escoamento rotacional axissimétrico é mostrado através de gráficos comparando-se com os resultados obtidos via GITT e os resultados obtidos experimentalmente por FUJIMURA *et al* (2004) e

numericamente por BHAUMIK e LAKSHMISHA (2007) e GUO *et al.* (2009) e o perfil de velocidade axial em r = 0,0 para *Re* = 990, 1290 e 1010 e razões de aspecto 1,5 e 2,5.

Primeiramente, realizando-se uma comparação gráfica dos resultados da velocidade axial com os dos autores mencionados, observam-se na posição analisada, os resultados obtidos pela GITT convergem completamente. Sabe-se que através dos gráficos de isolinhas que a quebra de vórtice ocorre para *Re* =1010 e *h* = 1,5 enquanto que para *Re* = 990 e *h* = 1,5 e *Re* = 1290 e *h* = 2,5 não ocorre esta quebra. Os gráficos dos perfis de velocidades axiais abaixo mostram que a quebra de vórtice (*vortex breakdown*) é o resultado de um valor negativo da velocidade como visto na Figura 2.6.b. É observado também que a velocidade axial ao longo da linha de centro tem uma tendência geralmente à diminuir com o aumento do número de Reynolds. E para alguns números críticos de Reynolds, o mínimo desta velocidade axial diminui para zero, estabelecendo assim um único ponto de estagnação. Qualquer aumento adicional no número de Reynolds conduziria a um valor negativo da velocidade axial mínima e, por conseguinte, dois pontos de estagnação. Estes dois pontos de estagnação identificam os limites inferior e superior da quebra de vórtice.

É evidente que as medições das velocidades são substancialmente consistentes com as visualizações em termos de localização e o tamanho das “bolhas” da quebra de vórtice.

Na Figura 2.6.c a velocidade axial no eixo é máxima próximo da meia altura da cavidade. Nota-se que, nesta combinação de *Re* e H/R, nenhuma quebra de vórtice é vista quando Re está levemente abaixo do valor crítico, como visto na Figura 2.6.a. O comportamento da velocidade axial é muito próximo do limite dos dois regimes de escoamento. A velocidade axial tem um valor máximo próximo da extremidade inferior. A variação *z* da velocidade axial Vz nos eixos é notável. Quando o número de Reynolds (*Re* = 1290) aumenta além do valor crítico, uma unica quebra de vórtice é notado, o que é evidenciado pelo contorno da componente da velocidade na direção z somente com valores negativos, em um plano medio no eixo x.

Conclui-se que quando o escoamento do fluido desestabiliza para formar um vórtice local, a velocidade axial diminui em uma pequena distância do centro de linha do cilindro, e eventualmente, tornando-se um valor negativo (o que significa uma reversão na direção do fluxo). A região onde ocorre essa reversão de fluxo é geralmente pequena e a velocidade axial novamente reverte-se para uma direção ascendente. Esta região de fluxo reverso tem sido chamada de “quebra de vórtice” na literatura.

Nas Figuras 2.7.a-c percebe-se que as velocidades radiais são máximas próximas da extremidade rotativa aumentando consideravelmente com o aumento do número de Reynolds no escoamento. A velocidade radial é geralmente proporcional a distância radial *r*, com a exceção da região próxima da parede lateral. Na região onde se forma o *vortex breakdown* é observado a alteração no sentido do escoamento radial na região central do dominio, evidenciando a presença do fenômeno.

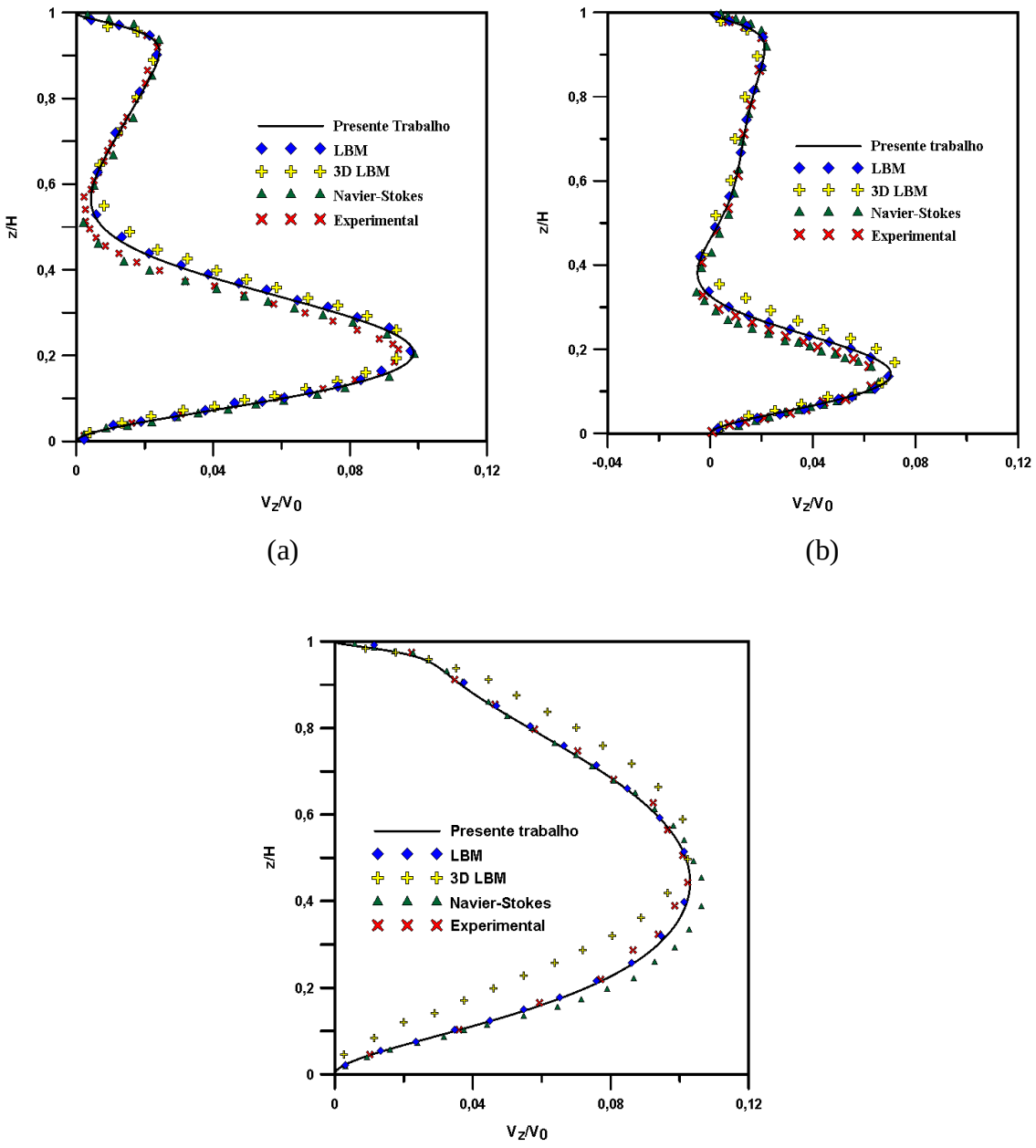
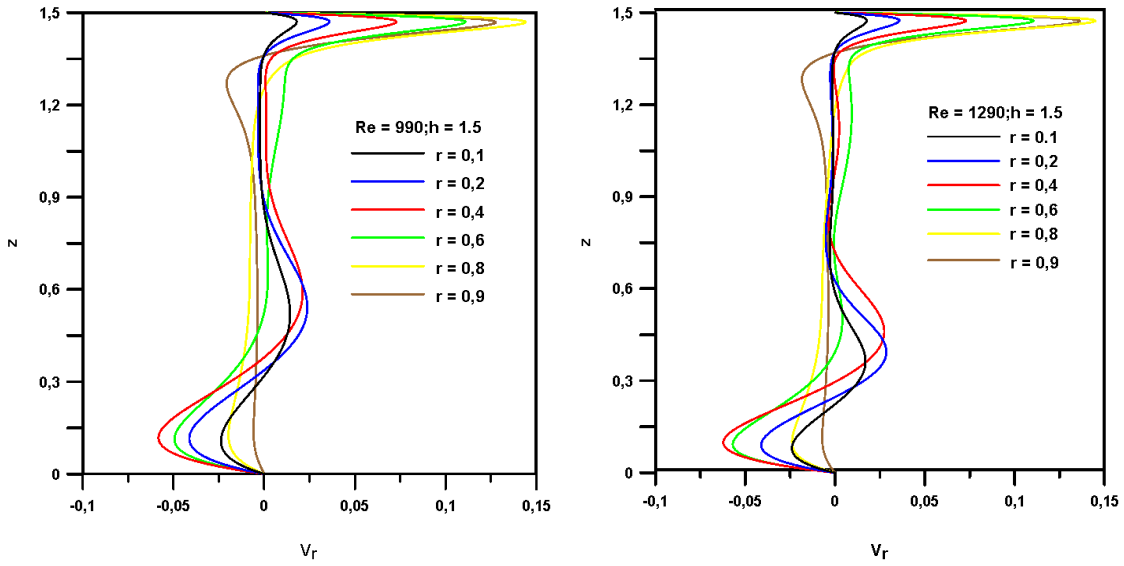
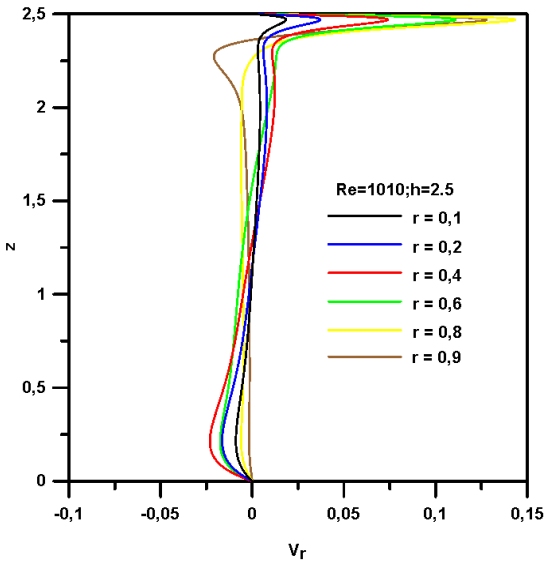


Figura. 2.6 - Perfil das componentes de velocidade axial em r = 0,0. (a) *Re* = 990 e *h* = 1,5; (b) *Re* = 1290 e *h* = 1,5, (c) *Re* = 1010 e *h* = 2,5



(a)

(b)



(c)

Figura. 2.7 Perfil das componentes de velocidade radial em varias posições. (a) Re = 990 e *h* = 1,5, (b) Re = 1290 e *h* = 1,5, (c) Re = 1010 e *h* = 2,5.

2.6.– CONCLUSÃO

A análise da função corrente proporcionou uma validação do código computacional desenvolvido, quando comparados os resultados do presente trabalho com aqueles apresentados por ESCUDIER (1984) e FUJIMURA *et al.* (2001) e numericamente por BHAUMIK e LAKSHMISHA (2007) e GUO *et al.* (1996),que avaliaram o mesmo problema.

Com relação ao desenvolvimento dos componentes de velocidade, foi observado que à medida que os números de Reynolds e razão de aspecto aumentam alguns fenômenos físicos ocorrem, como por exemplo, o fenômeno conhecido como "vortex breakdown" no movimento giratório. As causas para a formação da quebra de vórtice são as mesmas, ou seja, os elevados valores das velocidades angulares na região próxima as extremidades rotativa que desacelera o escoamento axial na região do vórtice, induzindo-o a reversão e gerando zonas de recirculações com pontos de estagnação e de sela. Estas zonas de recirculação quase estagnadas são denominadas *vortex breakdown* (quebra de vórtice) ou separação de vórtice.

O capitulo mostrou também que os vórtices de recirculação ocorrem em cavidades cilíndricas com as extremidades superior e inferior para certas combinações de números de Reynolds e razão de aspecto. Para altos valores de razão de aspecto da cavidade e números relativamente baixos de número de Reynolds vórtices de recirculação delgadas aparecem sob os eixos do cilindro. Para altos números de Reynolds os vórtices de recirculação movem-se em direção ao plano médio, eventualmente formando um vórtice toroidal ao redor de um núcleo de vórtice axial.

É preciso estender esses tipos de escoamentos com novas simulações numéricas para regimes com altos números de Reynolds e razões de aspectos a fim de investigar outras estruturas de escoamento com múltiplas quebras de vórtices e regime estável.

CAPÍTULO 3

CONVECÇÃO EM CAVIDADES CILÍNDRICAS COM CO-/CONTRA ROTAÇÃO DAS EXTREMIDADES

No presente capítulo é apresentada uma análise híbrido-numérica para a convecção mista em escoamentos rotativos confinados de fluidos viscosos em uma cavidade cilíndrica com as extremidades em rotação. As formulações das funções correntes, velocidades axiais, radiais e tangenciais e da energia em coordenadas cilíndricas foram utilizadas para avaliar os padrões do fluxo e as características de transferência de calor. Foi empregada a GITT na solução das equações resultantes da modelagem do problema físico.

3.1 - INTRODUÇÃO

O estudo de escoamentos rotativos de fluidos confinados e a transferência de calor por convecção em recipientes cilíndricos têm contribuído para o desenvolvimento de equipamentos mais sofisticados e com níveis de eficiência cada vez maiores em aplicações tecnológicas. A convecção natural consiste na transferência de calor dentro de um fluído através de movimentos do próprio fluido, ocorrendo como consequência de diferenças na densidade, ocasionada pela distribuição de temperaturas associadas à força gravitacional local e forças centrífugas.

Seu estudo é de considerável importância em problemas de engenharia, uma vez que esta configuração pode ser tomada como uma representação simplificada de muitas situações práticas em diversas áreas da engenharia (nuclear, solar, mecânica). Algumas destas aplicações podem ser encontradas em máquinas rotativas, coletores solares, trocadores de calor, projetos de fabricação de cristais para uso em memórias de computadores, etc. Sua utilização se justifica por apresentar condições favoráveis à condução de calor, por exemplo, no caso de trocadores ou em processos de separação pela utilização da força centrifuga.

3.2 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.2.1 – Descrição do Problema Físico

Considera-se o problema de convecção no escoamento permanente e laminar de um fluido viscoso incompressível em uma cavidade cilíndrica com rotação nas extremidades. A configuração esquemática do problema a ser analisado é mostrada na Figura 3.1.

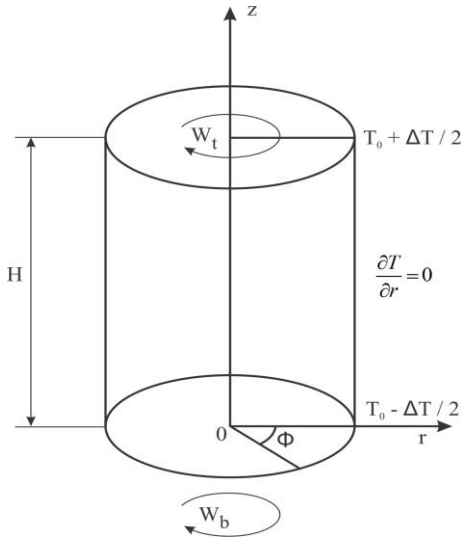


Figura 3.1 - Geometria do problema de convecção em cavidade cilindrica com as extremidades em rotação. Figura desenhada pelo autor a partir de informações da obra de OMI e IWATSU (2005).

A velocidade angular da extremidade inferior é fixada em ω_b (s_b = -1) enquanto que o disco superior ω_t varia conforme a razão das velocidades angulares do disco do topo (s_t) variado na faixa de $-1{,}0 \leq s_t \leq 1{,}0$. A temperatura da extremidade superior é mantida maior que a extremidade inferior ($\Delta T \geq 0$).A parede lateral do cilindro é assumida ser adiabática.

3.2.2 – Formulação Matemática do Problema

Baseado na aproximação de Boussinesq (BIRD, 2002), as equações da continuidade, quantidade de movimento e energia, que modelam o movimento desse fluido e a transferência de calor entre ele e as extremidades do cilindro são descritas, respectivamente, como se segue:

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial(r^* v_r^*)}{\partial r^*}+\frac{\partial \mathrm{v}_z^*}{\partial z^*}=0 \tag{3.1.a}$$

$$\rho\left(\mathrm{v}_r^*\frac{\partial \mathrm{v}_r^*}{\partial r^*}-\frac{\mathrm{v}_\phi^{*2}}{r^*}+\mathrm{v}_z^*\frac{\partial \mathrm{v}_r^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial r^*}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial(r^* v_r^*)}{\partial r^*}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v}_r^*}{\partial z^{*2}}\right] \tag{3.1.b}$$

$$\rho\left(\mathrm{v}_r^*\frac{\partial \mathrm{v}_z^*}{\partial r^*}+\mathrm{v}_z^*\frac{\partial \mathrm{v}_z^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial z^*}+\mu\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v}_z^*}{\partial z^{*2}}\right]+\rho g\beta(T^*-T_0) \tag{3.1.c}$$

$$\rho\left(\mathrm{v}_r^*\frac{\partial \mathrm{v}_\phi^*}{\partial r^*}+\frac{\mathrm{v}_r^*\mathrm{v}_\phi^*}{r^*}+\mathrm{v}_z^*\frac{\partial \mathrm{v}_\phi^*}{\partial z^*}\right)=\mu\left[\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial\left(r^*\mathrm{v}_\phi^*\right)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v}_\phi^*}{\partial z^{*2}}\right] \tag{3.1.d}$$

$$\mathrm{v}_r^*\frac{\partial T^*}{\partial r^*}+\mathrm{v}_z^*\frac{\partial \mathrm{T}^*}{\partial z^*}=\alpha\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial \mathrm{T}^*}{\partial r^*}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{T}^*}{\partial z^{*2}}\right] \tag{3.1.e}$$

As condições de contorno originais do problema são dadas por:

$$\text{Em } \mathrm{r}^*=0 \qquad \mathrm{v}_\mathrm{r}^*=\frac{\partial \mathrm{v}_\mathrm{z}^*}{\partial \mathrm{r}^*}=\mathrm{v}_\phi^*=0\,; \qquad \frac{\partial \mathrm{T}^*}{\partial \mathrm{r}^*}=0 \tag{3.2.a-d}$$

$$\text{Em } \mathrm{r}^*=\mathrm{r} \qquad \mathrm{v}_\mathrm{r}^*=\mathrm{v}_\mathrm{z}^*=\mathrm{v}_\phi^*=0\,; \qquad \frac{\partial \mathrm{T}^*}{\partial \mathrm{r}^*}=0 \tag{3.2.e-h}$$

$$\text{Em } \mathrm{z}^*=0 \qquad \mathrm{v}_\mathrm{r}^*=\mathrm{v}_\mathrm{z}^*=0\,; \quad \mathrm{v}_\phi^*=\omega_\mathrm{b}\mathrm{r}^*\,; \quad \mathrm{T}^*=\mathrm{T}_0-\frac{\Delta \mathrm{T}^*}{2} \tag{3.2.i-l}$$

$$\text{Em } \mathrm{z}^*=\mathrm{H} \qquad \mathrm{v}_\mathrm{r}^*=\mathrm{v}_\mathrm{z}^*=0\,; \quad \mathrm{v}_\phi^*=\omega_\mathrm{t}\mathrm{r}^*\,; \quad \mathrm{T}^*=\mathrm{T}_0+\frac{\Delta \mathrm{T}^*}{2} \tag{3.2.m-p}$$

As equações acima são escritas na forma adimensional utilizando-se os seguintes grupos adimensionais:

$$r=\frac{r^*}{R};\ \mathrm{z}=\frac{z^*}{R};\quad h=\frac{H}{R};\ \omega_b=s_b\omega;\ \omega_t=s_t\omega;\ T=\frac{T^*-T_0}{\Delta T};P=\frac{P^*}{\rho R^2\omega^2}; \tag{3.3.a-g}$$

$$\mathrm{v}_r=\frac{\mathrm{v}_r^*}{R\omega};\ \mathrm{v}_z=\frac{\mathrm{v}_z^*}{R\omega};\quad \mathrm{v}_\phi=\frac{\mathrm{v}_\phi^*}{R\omega}; \tag{3.3.h-j}$$

sendo *h* é a razão de aspecto da cavidade cilíndrica.

Substituindo as quantidades adimensionais nas equações (3.1) a (3.2), resulta em:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial z}=0 \tag{3.4.a}$$

$$\mathrm{v_r}\frac{\partial \mathrm{v_r}}{\partial r}-\frac{\mathrm{v_\phi^2}}{r}+\mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{v_r}}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v_r}}{\partial z^2}\right] \tag{3.4.b}$$

$$\mathrm{v_r}\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial r}+\mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial z}=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v_z}}{\partial z^2}\right]+RiT \tag{3.4.c}$$

$$\mathrm{v_r}\frac{\partial \mathrm{v_\phi}}{\partial r}+\frac{\mathrm{v_r v_\phi}}{r}+\mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{v_\phi}}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\mathrm{v_\phi}\right)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{v_\phi}}{\partial z^2}\right] \tag{3.4.d}$$

$$\mathrm{v_r}\frac{\partial T}{\partial r}+\mathrm{v_z}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re\,Pr}}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial z^2}\right] \tag{3.4.e}$$

em que:

$$\mathrm{Ri}=\frac{\beta\Delta Tg}{R\omega^2} \tag{3.5.a}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{R^2\omega}{\nu} \tag{3.5.b}$$

$$\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\alpha} \tag{3.5.c}$$

As condições de contorno adimensionais são dadas por:

$$\text{Em } \mathrm{r}=0 \qquad \mathrm{v_r}=\frac{\partial \mathrm{v_z}}{\partial \mathrm{r}}=\mathrm{v_\phi}=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}}=0 \tag{3.6.a-d}$$

$$\text{Em } \mathrm{r}=1 \qquad \mathrm{v_r}=\mathrm{v_z}=\mathrm{v_\phi}=\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{r}}=0 \tag{3.6.e-h}$$

$$\text{Em } \mathrm{z}=0 \qquad \mathrm{v_r}=\mathrm{v_z}=0; \quad \mathrm{v_\phi}=\mathrm{s_b r}; \quad \mathrm{T}=-\frac{1}{2} \tag{3.6.i-l}$$

$$\text{Em } \mathrm{z}=\mathrm{h} \qquad \mathrm{v_r}=\mathrm{v_z}=0; \quad \mathrm{v_\phi}=\mathrm{s_t r}; \quad \mathrm{T}=\frac{1}{2} \tag{3.6.m-p}$$

A função corrente bidimensional é definida em termos das componentes das velocidades nas direções *r* e *z*, respectivamente, como:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}; \qquad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} \tag{3.7.a-b}$$

A fim de se expressar as equações de momento e de energia em termos de função corrente, deriva-se a equação (3.4.b) com relação a *"z"* e a equação (3.4.c) com relação a *"r"*, os resultados são subtraídos e a definição de função corrente é introduzida no resultado, tornando-se:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial (E^2\Psi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial (E^2\Psi)}{\partial z} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \Psi}{\partial z}E^2\Psi - 2v_\phi\frac{\partial v_\phi}{\partial z} = \frac{1}{Re}E^4\Psi - Rir\frac{\partial T}{\partial r} \tag{3.8.a}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial v_\phi}{\partial z} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} - \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial z^2}\right) \tag{3.8.b}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Re\,Pr}\nabla^2 T \tag{3.8.c}$$

Sendo que os operadores associados E^2, E^4 e ∇^2 são novamentes definidos como:

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.9.a}$$

$$E^4\Psi = E^2\left(E^2\Psi\right) \tag{3.9.b}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.9.c}$$

As condições de contorno do problema após a definição de função corrente tomam a forma a seguir:

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{\Psi(0,z)}{r}\right] = \lim_{r\to 0}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi(0,z)}{\partial r}\right]\right\} = v_\phi(0,z) = \frac{\partial T(0,z)}{\partial r} = 0 \tag{3.10.a-d}$$

$$\Psi(1,z) = \frac{\partial \Psi(1,z)}{\partial r} = v_\phi(1,z) = \frac{\partial T(1,z)}{\partial r} = 0 \tag{3.10.e-h}$$

$$\Psi(r,0) = \frac{\partial \Psi(r,0)}{\partial z} = 0\,; \quad v_\phi(r,0) = s_b r\,; \quad T(r,0) = -\frac{1}{2} \tag{3.10.i-l}$$

$$\Psi(r,h)=\frac{\partial\Psi(r,h)}{\partial z}=0\,;\quad v_{\phi}(r,h)=s_t r\,;\quad T(r,h)=\frac{1}{2} \tag{3.10.m-p}$$

3.3.– METODOLOGIA DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA

A equação (3.8.a) resulta em um sistema diferencial de quarta ordem. A solução para este tipo de equação e as demais será resolvida através do uso da GITT, e cada uma das etapas de aplicação da técnica será mostrada a seguir.

3.3.1 Determinação dos Problemas Auxiliares

A aplicação da GITT requer a escolha dos problemas de autovalores, que servirão como base para a expansão em autofunções dos campos de função corrente, velocidade tangencial e temperatura que serão obtidas de problemas auxiliares associados respectivamente as equações (3.8.a-c), com a finalidade de explorar suas propriedades de ortogonalidade.

A próxima etapa deste método, que defini os problemas auxiliares que permitirão encontrar suas respectivas autofunções e autovalores, será definida a seguir:

– Problema auxiliar para o potencial auxiliar da função corrente $\Psi(r,z)$**:**

O problema de autovalor do tipo bi-harmônico escolhido para o potencial auxiliar da função corrente, descrito pela equação (3.8.a), será aquele proposto anteriormente por FEDELE (2005), e que é dado por:

$$\left(\frac{d^4}{dr^4}-\frac{2}{r}\frac{d^3}{dr^3}+\frac{3}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}-\frac{3}{r^3}\frac{d}{dr}\right)X_i(r)=-\alpha_i^2\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\right]X_i(r) \qquad \text{para i=1,2,3,....} \tag{3.11.a}$$

com condições de contorno:

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{X_i(r)}{r}\right]=0;\quad \lim_{r\to 0}\left\{\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dX_i(r)}{dr}\right]\right\}=0 \tag{3.11.b-c}$$

$$X_i(1)=0;\quad \frac{dX_i(1)}{dr}=0 \tag{3.11.d-e}$$

em que $X_i(r)$ e α_i é a autofunção e o autovalor, respectivamente, que satisfaz a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \frac{1}{r}\frac{dX_i(r)}{dr}\frac{dX_j(r)}{dr}dr = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ L_i, & i = j \end{cases} \qquad (3.11.f)$$

sendo L_i a norma ou integral de normalização.

A equação (3.11.a) é solucionada analiticamente para fornecer:

$$X_i(r) = r^2 - \frac{rJ_1(\alpha_i r)}{J_1(\alpha_i)}; \quad \text{para i=1,2,3,...} \qquad (3.11.g)$$

sendo que os autovalores α_is são calculados da seguinte equação transcendental:

$$J_2(\alpha_i) = 0; \quad \text{para i=1,2,3,...} \qquad (3.11.h)$$

e a norma definida como:

$$L_i = \int_0^1 \frac{1}{r}\left[\frac{dX_i(r)}{dr}\right]^2 dr = \frac{\alpha_i^2}{2} \qquad \text{para i=1,2,3,4,...} \qquad (3.11.i)$$

– Problema auxiliar para o potencial auxiliar da velocidade tangencial $v_\phi(r,z)$**:**

Para a componente $v_\phi(r,z)$ utilizaremos o problema auxiliar definido como:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Omega_i(r)}{dr}\right) - \left(\frac{1}{r^2} - \beta_i^2\right)\Omega_i(r) = 0 \qquad \text{para i=1,2,3,....} \qquad (3.12.a)$$

com condições de contorno

$$\Omega_i(0) = 0; \quad \Omega_i(1) = 0 \qquad (3.12.b\text{-}c)$$

sendo $\Omega_i(r)$ e β_i a autofunção e o autovalor, respectivamente, que satisfaz a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 r\Omega_i(r)\Omega_j(r)dr = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ M_i, & i = j \end{cases} \qquad (3.12.d)$$

sendo M_i a norma ou integral de normalização.

A equação (3.12.a) é solucionada analiticamente para fornecer:

$$\Omega_i(r) = J_1(\beta_i r) \qquad (3.12.e)$$

sendo que os autovalores β_is são calculados da seguinte equação transcendental:

$$J_1(\beta_i) = 0; \qquad \text{para } i = 1,2,3,4,.... \qquad (3.12.f)$$

e a norma definida como:

$$M_i = \int_0^1 r\Omega_i^2(r)dr = \frac{J_0^2(\beta_i)}{2} \qquad \text{para } i=1,2,3,4,... \qquad (3.12.g)$$

– Problema auxiliar para o potencial auxiliar da temperatura $T(r,z)$ **:**

Para a componente $T(r,z)$ o problema auxiliar está associado ao operador difusivo de segunda ordem, que da origem a um problema de tipo Sturm-Liouville definido como:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Gamma_i(r)}{dr}\right) + \mu_i^2\Gamma_i(r) = 0 \qquad \text{para } i=1,2,3,.... \qquad (3.13.a)$$

com condições de contorno

$$\frac{d\Gamma_i(0)}{dr} = 0; \quad \frac{d\Gamma_i(1)}{dr} = 0 \tag{3.13.b-c}$$

sendo $\Gamma_i(r)$ e μ_i é a autofunção e o autovalor, respectivamente, que satisfaz a seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 r\Gamma_i(r)\Gamma_j(r)dr = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N_i, & i = j \end{cases} \tag{3.13.d}$$

sendo N_i é a norma ou integral de normalização.

A equação (3.8.a) é solucionada analiticamente para fornecer:

$$\Gamma_i(r) = J_0(\mu_i r) \tag{3.13.e}$$

em que os autovalores μ_is são calculados da seguinte equação transcendental:

$$J_1(\mu_i) = 0; \qquad \text{para } i = 1,2,3,4,.... \tag{3.13.f}$$

e a norma definida como:

$$N_i = \int_0^1 r\Gamma_i^2(r)dr = \frac{J_0^2(\mu_i)}{2} \qquad \text{para } i=1,2,3,4,... \tag{3.13.g}$$

3.3.2 Determinação dos Pares Transformada-Inversa

As propriedades de ortogonalidade (3.11.f), (3.12.d) e (3.13.d) fornecem os seguintes pares transformada-inversa para $\Psi(r,z)$, $v_\phi(r,z)$ e $T(r,z)$, respectivamente:

$$\bar{\Psi}_i(z) = -\frac{1}{L_i}\int_0^1 \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\right] X_i(r)\Psi(r,z)dr, \qquad \text{transformada} \tag{3.14.a}$$

$$\Psi(r,z) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(r)\bar{\Psi}_i(z), \qquad \text{inversa} \tag{3.14.b}$$

$$\bar{v}_{\phi,i}(z) = \frac{1}{M_i}\int_0^1 r\Omega_i(r)v_\phi(r,z)dr \qquad \text{transformada} \qquad (3.14.c)$$

$$v_\phi(r,z) = \sum_{i=1}^{\infty}\Omega_i(r)\bar{v}_{\phi,i}(z) \qquad \text{inversa} \qquad (3.14.d)$$

$$\bar{T}_i(z) = \frac{1}{N_i}\int_0^1 r\Gamma_i(r)T(r,z)dr \qquad \text{transformada} \qquad (3.14.e)$$

$$T(r,z) = \sum_{i=1}^{\infty}\Gamma_i(r)\bar{T}_i(z) \qquad \text{inversa} \qquad (3.14.f)$$

Determinado os pares transformada inversa, utilizam-se essas definições na transformação integral dos sistemas de equações diferenciais parciais resultantes obtendo-se um sistema de EDOs para os cálculos dos potenciais transformados $\bar{\Psi}(r,z)$, $\bar{v}_\phi(r,z)$ e $\bar{T}(r,z)$.

3.3.3 Transformação Integral do Sistema de EDPs

Seguindo o formalismo da GITT, ocorrerá a transformação integral das equações diferenciais parciais (3.8.a-c) que resultará em um sistema diferencial ordinário, o qual fornecerá os potenciais transformados $\bar{\Psi}(r,z)$, $\bar{v}_\phi(r,z)$ e $\bar{T}(r,z)$. Primeiramente, faz-se o uso do operador $\int_0^1 \frac{X_i(r)}{r}\,dr$ na equação (3.8.a), problema do campo de função corrente, resultando em um sistema infinito e acoplado de EDOs:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}\frac{d^4\bar{\Psi}_j(z)}{dz^4} = \alpha_i^2\frac{d^2\bar{\Psi}_i(z)}{dz^2} - \frac{\alpha_i^4}{2}\bar{\Psi}_i(z) + Re\left[\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_{ijk}\bar{\Psi}_j(z)\frac{d\bar{\Psi}_k(z)}{dz} + C_{ijk}\frac{d\bar{\Psi}_j(z)}{dz}\frac{d^2\bar{\Psi}_k(z)}{dz^2} + D_{ijk}\bar{\Psi}_j(z)\frac{d^3\bar{\Psi}_k(z)}{dz^3}\right) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}E_{ijk}\bar{v}_{\theta,j}(z)\frac{d\bar{v}_k(z)}{dz} + Ri\sum_{j=1}^{\infty}F_{ij}\bar{T}_j(z)\right] \qquad (3.15.a)$$

sendo os coeficientes definidos pelas integrais:

$$A_{ijk} = \int_0^1 \frac{X_i(r)X_j(r)}{r}dr \qquad (3.15.b)$$

$$B_{ijk} = \int_0^1 X_i(r)\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^3X_j(r)}{dr^3} - \frac{3}{r^3}\frac{d^2X_j(r)}{dr^2} + \frac{3}{r^4}\frac{dX_j(r)}{dr}\right)X_k(r) - \frac{1}{r^2}\frac{dX_j(r)}{dr}\frac{d^2X_k(r)}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dX_j(r)}{dr}\frac{dX_k(r)}{dr}\right]dr \quad (3.15.c)$$

$$C_{ijk} = \int_0^1 X_i(r)\left(\frac{X_j(r)}{r^2}\frac{dX_k(r)}{dr} - \frac{2}{r^3}X_j(r)X_k(r)\right)dr \quad (3.15.d)$$

$$D_{ijk} = -\int_0^1 \frac{X_i(r)}{r^2}\frac{dX_j(r)}{dr}X_k(r)dr \quad (3.15.e)$$

$$E_{ijk} = -2\int_0^1 \frac{X_i(r)\Omega_j(r)\Omega_k(r)}{r}dr \quad (3.15.f)$$

$$F_{ij} = \int_0^1 \frac{X_i(r)}{r}\frac{d\Gamma_j(r)}{dr}dr \quad (3.15.g)$$

Para o problema da velocidade tangencial, faz-se o uso do operador $\int_0^1 \frac{\Omega_i(r)}{r}dr$ na equação (3.8.b), resultando também em um sistema infinito e acoplado de EDO's:

$$\frac{d^2\bar{v}_{\phi,i}(z)}{dz^2} = \beta_i^2\bar{v}_{\phi,i}(z) + Re\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(G_{ijk}\bar{v}_{\phi,j}(z)\frac{d\bar{\Psi}_k(z)}{dz} + H_{ijk}\frac{d\bar{v}_{\phi,j}(z)}{dz}\bar{\Psi}_k(z)\right) \quad (3.16.a)$$

sendo os coeficientes definidos pelas integrais:

$$G_{ijk} = \frac{1}{M_i}\int_0^1 \Omega_i(r)\left(\frac{d\Omega_j(r)}{dr} + \frac{\Omega_j(r)}{r}\right)X_k(r)dr \quad (3.16.b)$$

$$H_{ijk} = -\frac{1}{M_i}\int_0^1 \Omega_i(r)\Omega_j(r)\frac{dX_k(r)}{dr}dr \quad (3.16.c)$$

Finalmente, para operar a equação (3.8.c), problema do campo de temperatura, usa-se o operador $\int_0^1 r\Gamma_i(r)dr$, resultando mais uma vez em um sistema infinito e acoplado de EDOs:

$$\frac{d^2\bar{T}_i(z)}{dz^2} = \mu_i^2\bar{T}_i(z) + RePr\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(I_{ijk}\bar{T}_j(z)\frac{d\bar{\Psi}_k(z)}{dz} + J_{ijk}\frac{d\bar{T}_j(z)}{dz}\bar{\Psi}_k(z)\right) \quad (3.17.a)$$

os coeficientes integrais são definidos por:

$$I_{ijk} = \frac{1}{N_i}\int_0^1 \Gamma_i(r)\frac{d\Gamma_j(r)}{dr}X_k(r)dr \tag{3.17.b}$$

$$J_{ijk} = -\frac{1}{N_i}\int_0^1 \Gamma_i(r)\Gamma_j(r)\frac{dX_k(r)}{dr}dr \tag{3.17.c}$$

O mesmo procedimento pode ser conduzido nas condições de contorno definidas pelas Eqs. (3.10.i-p), para assim resultar:

$$\bar{\Psi}_i(0) = \frac{d\bar{\Psi}_i(0)}{dz} = 0; \quad \bar{v}_{\phi,i}(0) = \bar{f}_i; \quad \bar{T}_i(0) = \bar{h}_i \tag{3.17.a-d}$$

$$\bar{\Psi}_i(h) = \frac{d\bar{\Psi}_i(h)}{dz} = 0; \quad \bar{v}_{\phi,i}(h) = \bar{g}_i; \quad \bar{T}_i(h) = \bar{i}_i \tag{3.17.e-h}$$

em que:

$$\bar{f}_i = \frac{s_b}{M_i}\int_0^1 r^2\Omega_i(r)dr = -\frac{2s_b}{\beta_i J_0(\beta_i)} \tag{3.18.a}$$

$$\bar{g}_i = \frac{s_t}{M_i}\int_0^1 r^2\Omega_i(r)dr = -\frac{2s_t}{\beta_i J_0(\beta_i)} \tag{3.18.b}$$

$$\bar{h}_i = -\frac{1}{2N_i}\int_0^1 r\Gamma_i(r)dr = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & i=1 \\ 0, & i>1 \end{cases} \tag{3.18.c}$$

$$\bar{i}_i = \frac{1}{2N_i}\int_0^1 r\Gamma_i(r)dr = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i=1 \\ 0, & i>1 \end{cases} \tag{3.18.d}$$

Os coeficientes integrais foram resolvidos numericamente, utilizando novamente a subrotina da biblioteca IMSL (2014) para obter os resultados dentro de uma precisão prescrita de 10^{-10}. O tempo computacional para o cálculo dessas integrais aumenta, substancialmente, à medida que aumentamos a quantidade de termos nas expansões.

Novamente o problema diferencial parcial original foi transformado num sistema infinito de EDOs acopladas, constituindo um problema de contorno, de segunda ordem e não lineares.

3.3.4 O Algoritmo Computacional

Para a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas e infinitas, e do ponto de vista computacional o sistema deve ser truncado em uma ordem finita, suficientemente grande que permita obter soluções convergidas para uma determinada precisão desejada.

Deste modo, para adaptar a estrutura da equação (3.15.a) é necessário reescrever o sistema de equações diferenciais de quarta como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, definindo-se o vetor solução W_i como:

$$\bar{\Psi}_i = W_i; \qquad i = 1, 2, 3, ..., NF \tag{3.19.a}$$

$$\frac{d\bar{\Psi}_i}{dz} = \frac{dW_i}{dz} = W_{i+NF} \tag{3.19.b}$$

$$\frac{d^2\bar{\Psi}_i}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\bar{\Psi}_i}{dz}\right) = \frac{dW_{i+NF}}{dz} = W_{i+2NF} \tag{3.19.c}$$

$$\frac{d^3\bar{\Psi}_i}{dz^3} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d^2\bar{\Psi}_i}{dz^2}\right) = \frac{dW_{i+2NF}}{dz} = W_{i+3NF} \tag{3.19.d}$$

$$\frac{d^4\bar{\Psi}_i}{dz^4} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d^3\bar{\Psi}_i}{dz^3}\right) = \frac{dW_{i+3NF}}{dz} \tag{3.19.e}$$

$$\bar{v}_{\phi,i} = W_{i+4NF}; \qquad i=1,2,3,...,NV \tag{3.19.f}$$

$$\frac{d\bar{v}_{\phi,i}}{dz} = \frac{dW_{i+4NF}}{dz} = W_{i+4NF+NV} \tag{3.19.g}$$

$$\frac{d^2\bar{v}_{\phi,i}}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\bar{v}_{\phi,i}}{dz}\right) = \frac{dW_{i+4NF+NV}}{dz} \tag{3.19.h}$$

$$\bar{T}_i = W_{i+4NF+2NV}; \qquad i=1,2,3,...,NT \tag{3.19.i}$$

$$\frac{d\bar{T}_i}{dz} = \frac{dW_{i+4NF+2NV}}{dz} = W_{i+4NF+2NV+NT} \tag{3.19.j}$$

$$\frac{d^2\bar{T}_i}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\bar{T}_i}{dz}\right) = \frac{dW_{i+4NF+2NV+NT}}{dz} \tag{3.19.l}$$

Substituindo as equações (3.19.a-l) nas equações (3.15.a), (3.16.a) e (3.17.a), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{NF} A_{ij} \frac{dW_{i+3NF}}{dz} = \alpha_i^2 W_{i+2NF} - \frac{\alpha_i^4}{2} W_i + Re\left[\sum_{j=1}^{NF}\sum_{k=1}^{NF}\left(B_{ijk} W_j W_{k+NF} + C_{ijk} W_{j+NF} W_{k+2NF} \right.\right.$$
$$\left.\left. + D_{ijk} W_j W_{k+3NF} \right) + \sum_{j=1}^{NV}\sum_{k=1}^{NV} E_{ijk} W_{j+4NF} W_{k+4NF+NV} + Ri \sum_{j=1}^{NT} F_{ij} W_{j+4NF+2NV} \right] \quad (3.20.a)$$

$$\frac{dW_{i+4NF+NV}}{dz} = \beta_i^2 W_{i+4NF} + Re \sum_{j=1}^{NV}\sum_{k=1}^{NF}\left(G_{ijk} W_{j+4NF} W_{k+NF} + H_{ijk} W_{j+4NF+NV} W_k \right) \quad (3.20.b)$$

$$\frac{dW_{i+4NF+2NV+NT}}{dz} = \mu_i^2 W_{i+4NF+2NV} + RePr \sum_{j=1}^{NT}\sum_{k=1}^{NF}\left(I_{ijk} W_{j+4NF+2NV} W_{k+NF} \right.$$
$$\left. + J_{ijk} W_{j+4NF+2NV+NT} W_k \right) \quad (3.20.c)$$

Com as condições de contorno (3.17.a-h) sendo submetidas ao mesmo procedimento, tem-se:

$$W_i(0) = W_{i+NF}(0) = 0; \qquad W_{i+4NF}(0) = \bar{f}_i; \qquad W_{i+4NF+2NV}(0) = \bar{h}_i \quad (3.21.a\text{-}d)$$

$$W_i(h) = W_{i+NF}(h) = 0; \qquad W_{i+4NF}(h) = \bar{g}_i; \qquad W_{i+4NF+2NV}(h) = \bar{i}_i \quad (3.21.e\text{-}h)$$

O sistema de equações (3.20.a-c) agora está no formato para a solução numérica. As expansões são então, truncadas em NF, NV e NT termos para os campos de função corrente, velocidade e temperatura, respectivamente, onde as ordens de truncamento são automaticamente selecionadas ao longo da integração, de modo a atingir a precisão desejada.

3.3.5 Cálculo do Campo de Velocidade

A componente tangencial é calculada pela equação (3.14.d) enquanto que os campos de velocidades axiais e radiais podem ser obtidos a partir da definição de função corrente dada pelas Equações (3.7.a-b), depois de introduzir a fórmula de inversão (3.14.b) obtém-se:

$$v_r = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i}{r} \frac{d\bar{\Psi}_i(z)}{dz} \quad (3.22.a)$$

$$v_z = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{dX_i(r)}{dr} \bar{\Psi}_i(z) \quad (3.22.b)$$

3.3.6 Cálculo do Número de Nusselt

Os números de Nusselt local, para a extremidade superior e inferior do recipiente cilíndrico, são definidos a partir de:

$$Nu = \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0 \text{ ou } h} \tag{3.23.a}$$

pode ser calculado analiticamente, ao se substituir a fórmula de inversão (3.14.f), resultando em:

$$Nu_0(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i(r) \frac{d\bar{T}_i(0)}{dz} \qquad \text{(para a extremidade fria do cilindro)} \tag{3.23.b}$$

$$Nu_h(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i(r) \frac{d\bar{T}_i(h)}{dz} \qquad \text{(para a extremidade quente do cilindro)} \tag{3.23.c}$$

O número de Nusselt médio é obtido da integração do número de Nusselt local através da cavidade, dado por:

$$\bar{Nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 Nu(r) 2\pi r dr \tag{3.23.d}$$

Os valores numéricos de Nusselt médio são calculados com o auxílio da fórmula de inversão (3.14.f).

3.4.– RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram estudados os casos para números de Reynolds na faixa de $100 \le \mathrm{Re} \le 2000$ e Richardson de $0 \le Ri \le 1$, sempre na cavidade cilíndrica (razão de aspecto igual a 2) preenchida com fluido newtoniano, e número de Prandtl igual a 1, correspondente ao valor utilizado por Omi e Iwatsu (2005), que utilizou o método de diferenças finitas, e sendo utilizados para comparação dos resultados deste trabalho.

Para a solução do sistema diferencial ordinário utilizou-se a subrotina DBVPFD da biblioteca IMSL (2014) com erro relativo global prescrito de 10^{-4} para obtenção dos potenciais transformados e com iguais ordens de truncamento N=NF=NV=NT para todos os campos.

3.4.1.– Análise de convergência e validação dos resultados

Os resultados foram obtidos para números de Reynolds na faixa $500 \leq Re \leq 2000$ e números de Richardson (Ri = 0,0 e 1,0). Em todos os casos apresentados, o número de Prandtl (Pr) e a razão de aspecto (h) utilizada foram iguais a 1,0 e 2,0, respectivamente. Deste modo os resultados são tabelados de acordo com as posições ao longo das direções r e z, tornando possível observar o progresso da convergência com o aumento da ordem de truncamento à medida que o fluxo escoa na cavidade cilíndrica nos sentidos de contra-rotação das extremidades.

No estudo foram escolhidas três posições ao longo da direção z, sendo uma próxima da extremidade inferior do cilindro (base no sentido anti-horário), outra na metade da altura cavidade (correspondente H/2) e uma terceira próxima á extremidade superior (topo no sentido horário). Na direção radial, escolheram-se duas posições fixas para a análise de convergência, sendo a primeira no centro do cilindro (r = 0) para a velocidade axial e a segunda na metade da espessura da cavidade (r = 0,5) para as velocidades radiais e tangenciais. As posições próximas da parede, do centro do cilindro, das extremidades superiores e inferiores foram escolhidas por pertencerem às regiões de maiores gradientes, onde se espera que a convergência seja atingida com maiores ordens de truncamento.

Na Tabela 3.1 são apresentados os resultados para o comportamento da convergência da velocidade axial na posição radial r = 0,0, em diferentes posições axiais, para h = 2, Pr = 1, Re = 100 e 2000 e Ri = 0,0 e 1,0.

Pode-se verificar que para Re = 100 e números de Ri = 0,0 e 1,0 que os resultados apresentaram uma excelente taxa de convergência alcançada com três dígitos significativos (N = 40) nas expansões, para todas as posições de r e z. No entanto, para Re = 2000 e Ri = 0 e 1 nas posições z = 0,1 e 1,9, os números de termos utilizados nas séries não foram suficientes para alcançar a convergência completa da velocidade axial acarretando o aumento do custo computacional. Percebe-se, que quando se aumenta os valores de Re e Ri, o processo de convecção mista vai ganhando importância e dificultando o processo de convergência dos potenciais transformados da função corrente, consequentemente, do campo de temperatura motivados pelo aumento da velocidade do fluido e os efeitos de flutuabilidade deste no escoamento rotativo. A equação (3.22.b), que descreve a velocidade axial, é dificultada pela presença do efeito da intensidade de rotação de ambas as extremidades do cilindro.

O comportamento da convergência para a velocidade radial e tangencial pode ser visto nas Tabelas 3.2 e 3.3, para números de Reynolds iguais a 100 e 2000 e números de Richardson iguais a 0 e 1 em r = 0,5 e várias posições axiais.

Verifica-se que quando se aumenta o número de Reynolds, a convergência da componente tangencial da velocidade ocorre com menor número de termos nas séries do que para a componente radial, quando consideradas as mesmas posições da seção da cavidade. Novamente quando se aumenta *Re* e *Ri* a convergência da componente tangencial da velocidade acontece com 60 termos no terceiro dígito significativo nas posições mais próxima das extremidades do cilindro. No entanto, para a componente radial, essa convergência só ocorre com 80 termos (no terceiro dígito significativo) nas expansões quando se aumenta o número de Reynolds. Isto ocorre, porque a equação (3.22.a) que relaciona a componente radial com a função corrente é calculada a partir da derivada da função corrente com relação à *z* dificultando a convergência dessa componente em comparação com a velocidade tangencial originada da equação (3.14.d).

Conclui-se, portanto que, para altos números de Reynolds e Richardson que o processo de convecção que atua como um termo fonte predomina nos termos de inércia (perfis de velocidades) e difusão afetando na estabilidade do fluxo através do aumento da flutuabilidade, ou seja, na cavidade deve possuir energia cinética suficiente para homogeneizar o fluido.

Analisa-se no presente trabalho, apresentado na Tabela 3.4, a taxa de convergência dos números de Nusselt médios ($\bar{N}u$) para *Re* = 500,1000 e 2000 e *Ri* = 0,0 e 1,0. O número de Nusselt médio local converge com menos termos na ordem de truncamento de dígitos (NT = 60), com quatro dígitos significativos, para *Re* e *Ri* menores. Quando se aumenta os números de Reynolds e Richardson essa convergência torna-se mais lenta.

Este fato é observado quando se analisa a equação (3.23.a) notamos que esse coeficiente é obtido pela derivada da velocidade tradial quando se aplica a fórmula da inversa dificulta a convergência principalmente nas posições próximas do topo do cilindro.

Tabela 3.1 - Convergência da velocidade axial para h = 2, Re = 100 e 2000, Pr = 1,0, à diferentes números de Richardson e várias posições axiais em r = 0,0.

Re = 100				
N	**Ri = 0,0**		**Ri = 1,0**	
	z = 0,1	**z = 1,9**	**z = 0,1**	**z = 1,9**
10	-0.251E-01	0.251E-01	-0.153E-01	-0.463E-16
20	-0.301E-01	0.301E-01	-0.200E-01	0.200E-01
40	-0.307E-01	0.307E-01	-0.206E-01	0.206E-01
60	-0.308E-01	0.308E-01	-0.206E-01	0.206E-01
80	-0.308E-01	0.308E-01	-0.207E-01	0.207E-01
90	-0.308E-01	0.308E-01	-0.207E-01	0.207E-01
Re = 2000				
N	**Ri = 0,0**		**Ri = 1,0**	
	z = 0,1	**z = 1,9**	**z = 0,1**	**z = 1,9**
10	-0.543E-01	0.543E-01	0.116E+00	-0.117E+00
20	-0.780E-01	0.780E-01	-0.441E-01	0.441E-01
40	-0.218E-01	0.218E-01	-0.369E-02	0.369E-02
60	-0.226E-01	0.226E-01	-0.503E-02	0.503E-02
80	-0.229E-01	0.229E-01	-0.533E-02	0.533E-02
90	-0.230E-01	0.230E-01	-0.541E-02	0.541E-02

N = NF=NV=NT

Tabela 3.2 - Convergência da velocidade radial para h = 2, Re=100 e 2000, Pr = 1,0, à diferentes números de Richardson e várias posições axiais em r = 0,5.

Re = 100						
N	**Ri = 0,0**			**Ri = 1,0**		
	z = 0,1	**z = 1,0**	**z = 1,9**	**z = 0,1**	**z = 1,0**	**z = 1,9**
10	0.948E-01	-0.273E-01	0.948E-01	0.665E-01	0.316E-02	0.665E-01
20	0.949E-01	-0.272E-01	0.949E-01	0.667E-01	0.317E-02	0.667E-01
40	0.949E-01	-0.272E-01	0.949E-01	0.667E-01	0.317E-02	0.667E-01
60	0.949E-01	-0.272E-01	0.949E-01	0.667E-01	0.317E-02	0.667E-01
80	0.949E-01	-0.272E-01	0.949E-01	0.667E-01	0.317E-02	0.667E-01
90	0.949E-01	-0.272E-01	0.949E-01	0.667E-01	0.317E-02	0.667E-01
Re = 2000						
N	**Ri = 0,0**			**Ri = 1,0**		
	z = 0,1	**z = 1,0**	**z = 1,9**	**z = 0,1**	**z = 1,0**	**z = 1,9**
10	0.193E-01	-0.153E+00	0.193E-01	0.364E-02	-0.661E-05	0.364E-02
20	0.904E-02	-0.124E+00	0.904E-02	-0.288E-02	0.272E-03	-0.288E-02
40	0.641E-02	-0.117E+00	0.641E-02	-0.432E-02	0.299E-03	-0.432E-02
60	0.629E-02	-0.117E+00	0.629E-02	-0.443E-02	0.302E-03	-0.443E-02
80	0.628E-02	-0.117E+00	0.628E-02	-0.444E-02	0.302E-03	-0.444E-02
90	0.627E-02	-0.117E+00	0.627E-02	-0.445E-02	0.303E-03	-0.445E-02

N = NF=NV=NT

Tabela 3.3 - Convergência da velocidade tangencial para *h* = 2, *Re*=100 e 2000, Pr = 1,0, à diferentes números de Richardson e várias posições axiais em r = 0,5.

Re = 100				
N	**Ri = 0,0**		**Ri = 1,0**	
	z = 0,1	**z = 1,9**	**z = 0,1**	**z = 1,9**
10	-0.270E+00	0.270E+00	-0.308E+00	0.308E+00
20	-0.269E+00	0.269E+00	-0.307E+00	0.307E+00
40	-0.269E+00	0.269E+00	-0.307E+00	0.307E+00
60	-0.269E+00	0.269E+00	-0.307E+00	0.307E+00
80	-0.269E+00	0.269E+00	-0.307E+00	0.307E+00
90	-0.269E+00	0.269E+00	-0.307E+00	0.307E+00
Re = 2000				
N	**Ri = 0,0**		**Ri = 1,0**	
	z = 0,1	**z = 1,9**	**z = 0,1**	**z = 1,9**
10	-0.121E+00	0.121E+00	-0.254E+00	0.254E+00
20	-0.849E-01	0.849E-01	-0.242E+00	0.242E+00
40	-0.806E-01	0.806E-01	-0.236E+00	0.236E+00
60	-0.803E-01	0.803E-01	-0.235E+00	0.235E+00
80	-0.802E-01	0.802E-01	-0.235E+00	0.235E+00
90	-0.802E-01	0.802E-01	-0.235E+00	0.235E+00

N = NF=NV=NT

Tabela 3.4 - Convergência para os números de Nusselt médios para h = 2 e Pr = 1,0, à diferentes números de Richardson e Reynolds.

Ri = 0						
N	**Re = 500**		**Re = 1000**		**Re = 2000**	
	$\overline{Nu}_0$	$\overline{Nu}_h$	$\overline{Nu}_0$	$\overline{Nu}_h$	$\overline{Nu}_0$	$\overline{Nu}_h$
10	0.226E+01	0.226E+01	0.376E+01	0.376E+01	0.605E+01	0.605E+01
20	0.221E+01	0.221E+01	0.357E+01	0.357E+01	0.557E+01	0.557E+01
40	0.220E+01	0.220E+01	0.356E+01	0.356E+01	0.544E+01	0.544E+01
60	0.220E+01	0.220E+01	0.356E+01	0.356E+01	0.543E+01	0.543E+01
80	0.220E+01	0.220E+01	0.356E+01	0.356E+01	0.543E+01	0.543E+01
90	0.220E+01	0.220E+01	0.356E+01	0.356E+01	0.543E+01	0.543E+01
Ri = 1						
N	**Re = 500**		**Re = 1000**		**Re = 2000**	
	$\overline{Nu}_0$	$\overline{Nu}_h$	$\overline{Nu}_0$	$\overline{Nu}_h$	$\overline{Nu}_0$	$\overline{Nu}_h$
10	0.690E+00	0.690E+00	0.832E+00	0.832E+00	0.108E+01	0.108E+01
20	0.679E+00	0.679E+00	0.773E+00	0.773E+00	0.925E+00	0.925E+00
40	0.678E+00	0.678E+00	0.766E+00	0.766E+00	0.883E+00	0.883E+00
60	0.678E+00	0.678E+00	0.766E+00	0.766E+00	0.880E+00	0.880E+00
80	0.678E+00	0.678E+00	0.766E+00	0.766E+00	0.879E+00	0.879E+00
90	0.678E+00	0.678E+00	0.766E+00	0.766E+00	0.879E+00	0.879E+00

N = NF=NV=NT

3.4.2 – Isolinhas de função corrente e temperatura.

As Figuras (3.2.a-e) e (3.3.a-e) mostram o comportamento das isolinhas de função corrente e temperatura para o número de Reynolds igual a 1000 e Richardson (*Ri* = 0 e 1) para a faixa de parâmetro de rotação de $-1 \leq s_t \leq 1$ com Prandtl fixo igual 1. Serão avaliados os efeitos do número de Richardson e os parâmetros de rotação da velocidade angular do topo (s_t) e o da base, que permanece fixa, ou seja, s_b é negativo (= -1). Quando s_t for igual a 1 as extremidades da cavidade executam uma máxima rotação. Sabe-se também que para s_t com valores negativos, os discos do topo e da base estão rotacionando na mesma direção com velocidades angulares diferentes. Devido a simetria geométrica, as isolinhas de função corrente e as isotermas são simétricas em relação a metade do plano a z = 1,0.

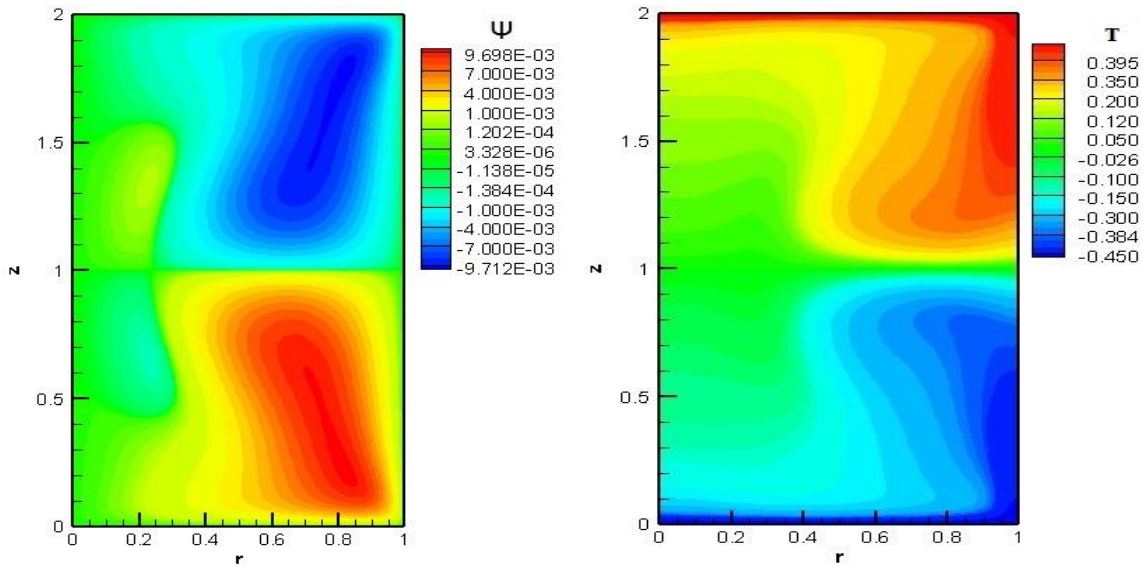
Primeiramente analisa-se a influência dos parâmetros de rotação do topo (s_t) para número de Richardson igual a 0. Na Figura 3.2.b ocorre o aparecimento de uma célula circulante (vórtice) criada no plano meridional que é o resultado da iteração dinâmica entre os componentes de rotação das extremidades movidos pela ação da força centrífuga e de inércia. Na Figura 3.2.a ocorre a presença de quebras de vórtices antissimétricas enquanto nas Figuras 3.2.c e 3.2.d as quebras ocorrem nos cantos superiores. Na Figura 3.2.e não ocorre o aparecimento de quebras antissimétricas. As isotermas nas Figuras (3.2.a-e) apresentam alta intensidade nas regiões próximas das paredes do topo e da base tornando cada vez mais visíveis a formação das camadas limites térmicas nas extremidades dessa cavidade.

Segundo OMI e IWATSU (2005) para o caso de escoamento co-rotativos ($s_t < 0$) o fluido no volume da cavidade exibe rotação quase rígida com uma velocidade angular intermediária de ambas as extremidades. Percebe-se o aparecimento de um fluxo axial quase uniforme nas vizinhanças dos eixos rotativos como o resultado da formação da camada limite de Ekman. Nesta, a força de Coriolis prepondera sobre o gradiente de pressão, forçando o transporte de massa para a parede lateral e formando uma região de baixa pressão no centro das extremidades rotativas. Para escoamentos contra-rotativos ($s_t > 0$) o fluxo cisalhante é criado entre os contornos do topo e da base e zonas de recirculações são formados em toda a seção meridional da cavidade. Sabe-se que quando $s_t = 1$, os campos de velocidades e temperatura são antissimétricos no plano de meia altura (z = 1).

Ainda segundo OMI e IWATSU (2005) para todos os valores de s_t e para este número de Reynolds a convecção domina o transporte térmico e o gradiente vertical de temperatura é concentrado nas vizinhanças dos contornos da base e do topo. Para s_t igual a 1 e -1, o gradiente vertical de temperatura também é mais visível no interior, sobre a porção radial externa (r > 0,5) do meio do plano à z = h/2.

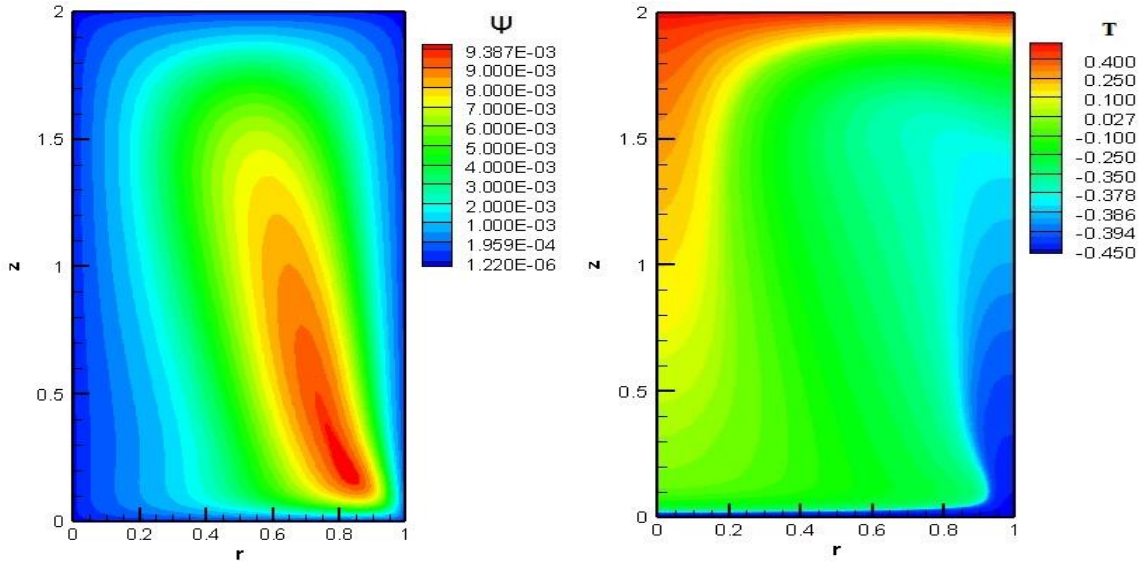
As Figuras (3.3.a-e) mostram a interferência do parâmetro s_t com o número de Richardson igual a 1. Notam-se para este número de Richardson que as isotermas são praticamente paralelas nas posições 0,5 < z < 1,5 e mais concentrado próximas do topo e da base do cilindro com um gradiente de temperatura constante na maior parte do fluido mostrando claramente a predominância do processo condutivo de transferência de calor. Segundo OMI e IWATSU (2005) a condição de que a estratificação da temperatura é importante, embora as camadas limites sejam formadas em ambas as extremidades rotativas, como um resultado da inibição do movimento vertical atuada pelas forças de empuxo e a sucção de Ekman desaparece no interior da cavidade. O fluido no interior permanece em repouso apesar das rotações. O comportamento está em constraste como o caso anterior de $Ri = 0$ onde o volume do fluido rotaciona com uma velocidade angular intermediária dos discos do topo e da base. A ligação entre as camadas limites da base e do topo desaparece e o fluido nas vizinhanças de cada disco rotaciona em cada direção.

Sabe-se que o número de Richardson for menor que um, a flutuabilidade não é importante. Caso contrário com $Ri > 1$, a flutuabilidade é dominante, pelo fato de que existe energia cinética insuficiente para homogeneizar o fluido. Se $Ri = 1$, o escoamento provavelmente é dirigido pela força de empuxo, ou seja, a energia do escoamento origina-se da energia potencial. Nota-se que aumento do número de Richardson desestabiliza o escoamento. Conclui-se que para $Ri = 0$, o escoamento no caso de contra-rotação é mais instável do que para escoamentos corotativos, e causa uma mudança notável nas estruturas do escoamento e transferência de calor.



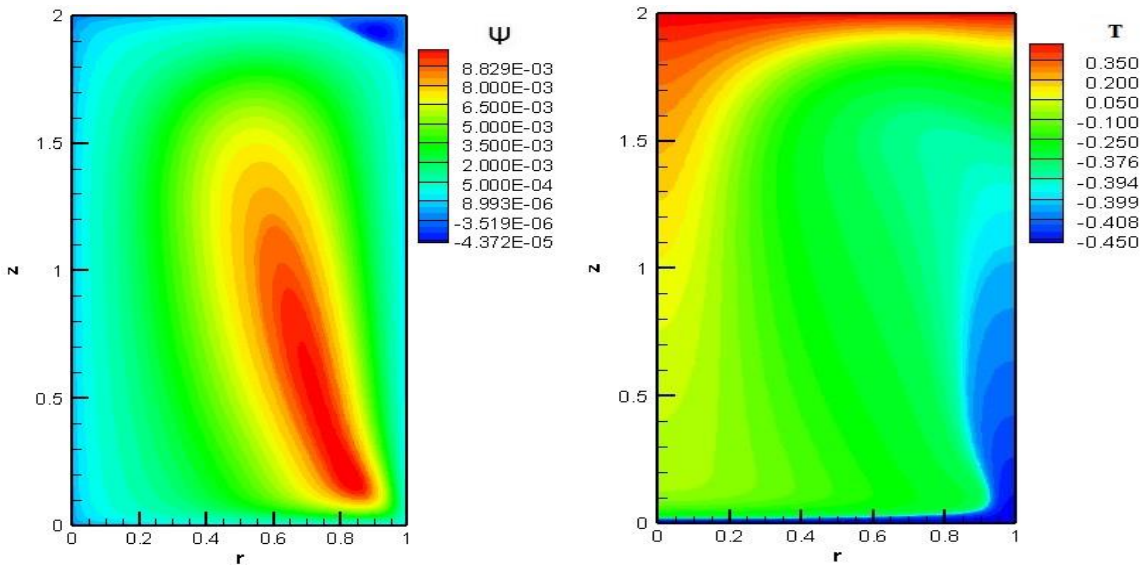
(a) (b)

Figura 3.2.a - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = -1; (a) Função corrente (b) Isotermas.



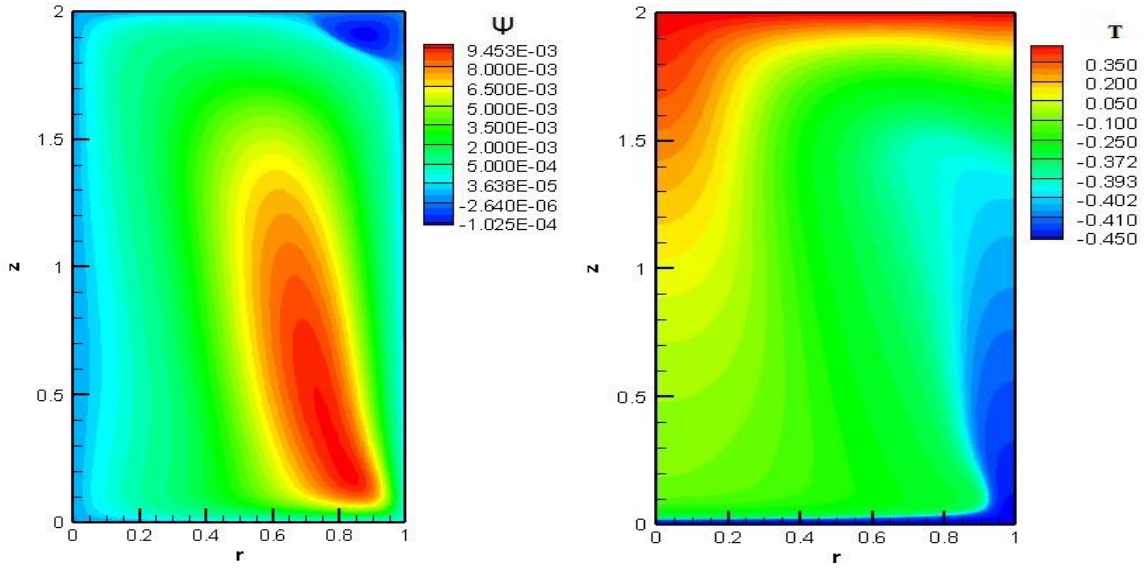
(a) (b)

Figura 3.2.b - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = 0; (a) Função corrente (b) Isotermas.



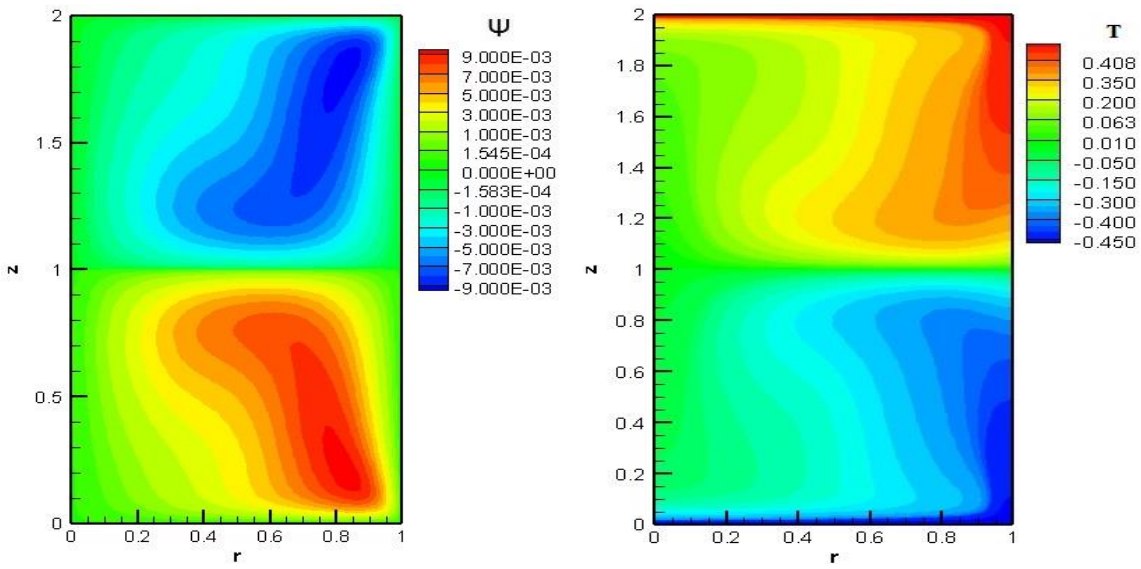
(a) (b)

Figura 3.2.c - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = 0,1; (a) Função corrente (b) Isotermas.



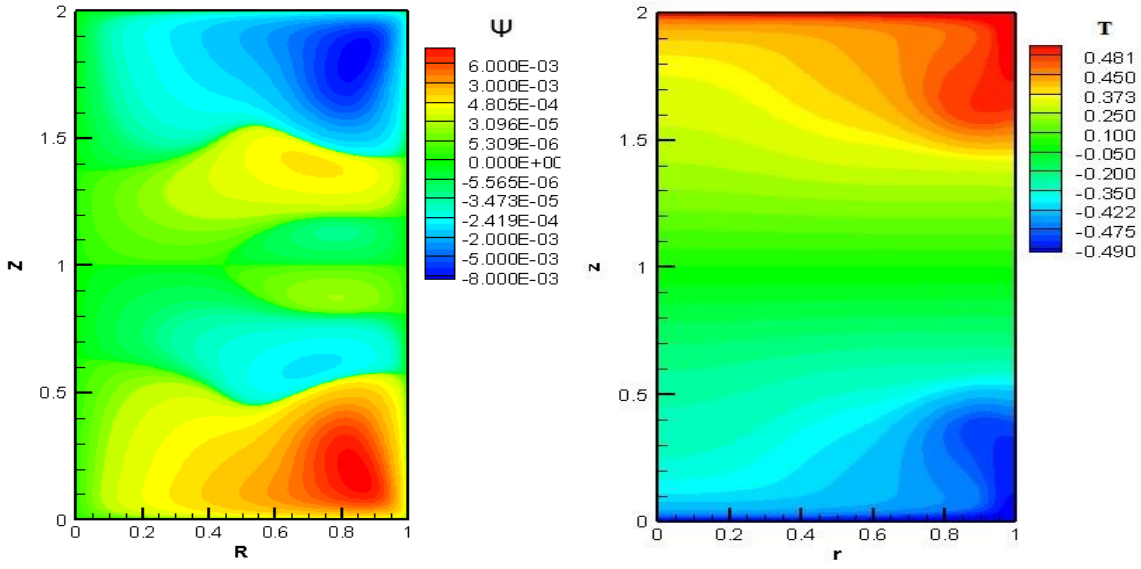
(a) (b)

Figura 3.2.d - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = -0,1; (a) Função corrente (b) Isotermas.



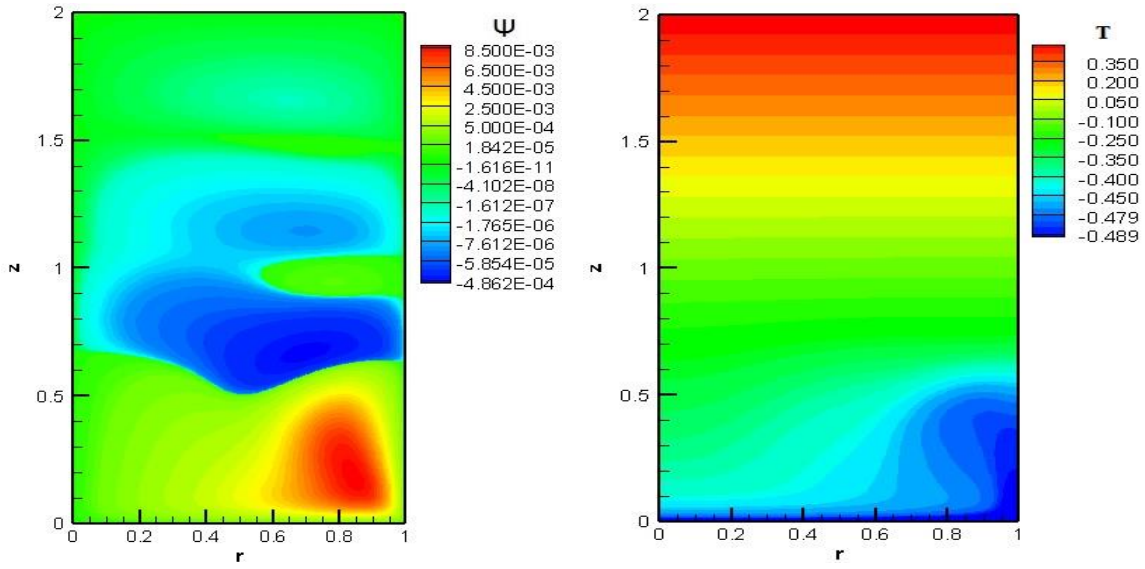
(a) (b)

Figura 3.2.e - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0, *Ri* = 0 e s_t = 1,0; (a) Função corrente (b) Isotermas.



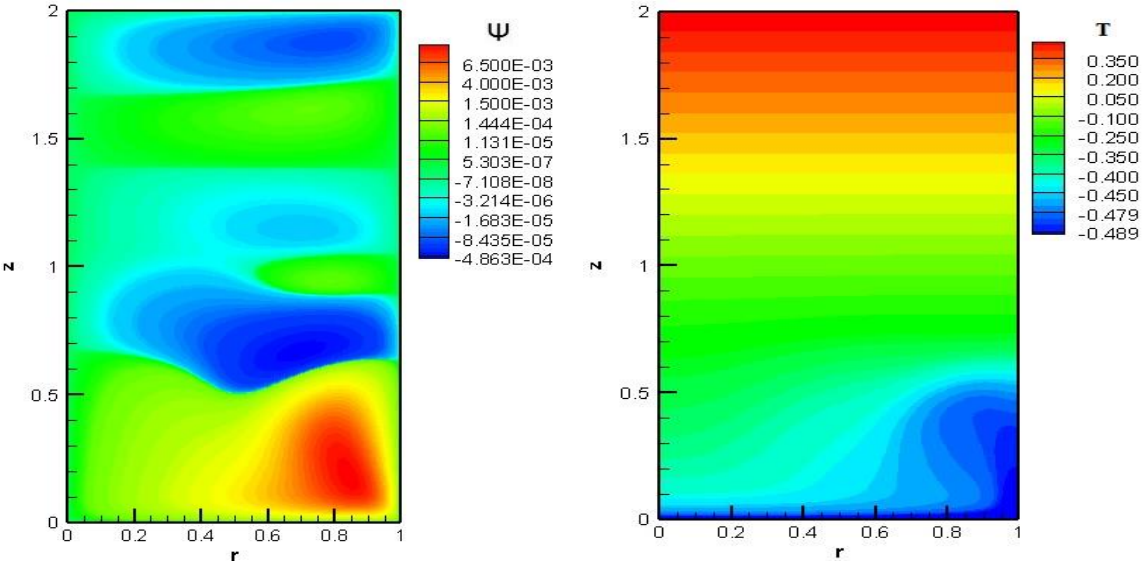
(a) (b)

Figura 3.3.a - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0; *Ri* = 1 e s_t = -1,0; (a) Função corrente (b) Isotermas.



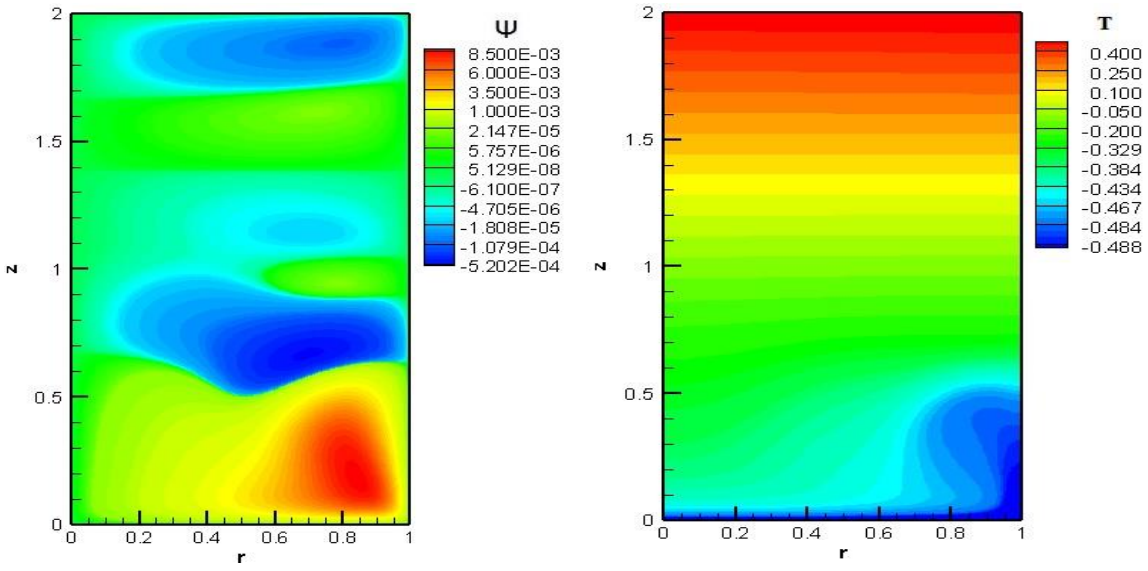
(a) (b)

Figura 3.3.b - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0; *Ri* = 1 e s_t = 0; (a) Função corrente (b) Isotermas.



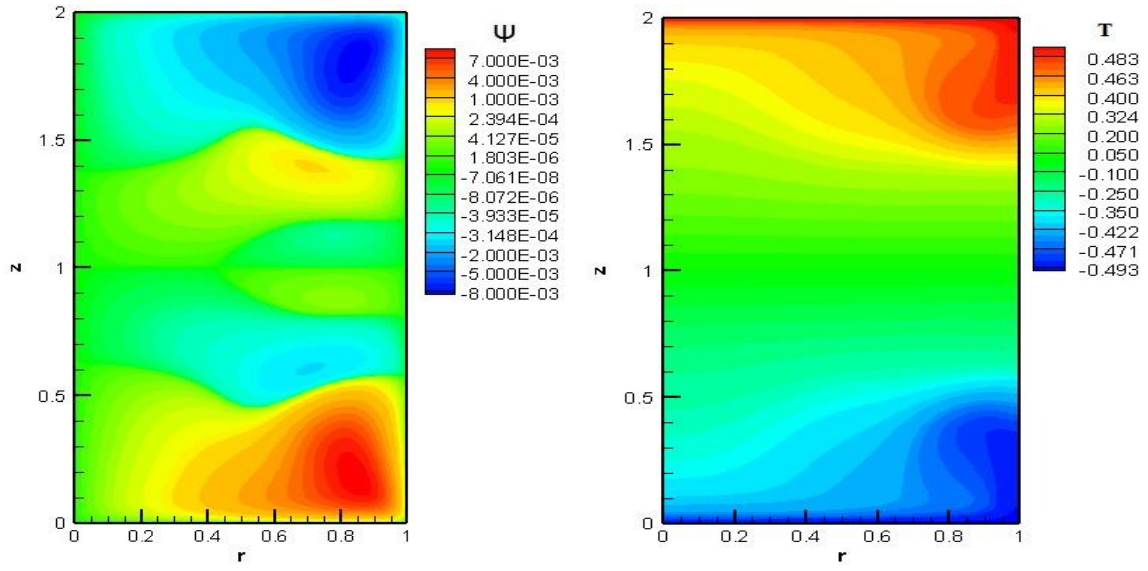
(a) (b)

Figura 3.3.c - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0; *Ri* = 1 e s_t = 0,1; (a) Função corrente (b) Isotermas.



(a) (b)

Figura 3.3.d - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h* = 2,0; *Ri* = 1 e s_t = -0,1; (a) Função corrente (b) Isotermas.



(a) (b)

Figura 3.3.e - Gráficos de contorno para *Re* = 1000, *h*=2,0; *Ri* = 1 e s_t = 1; (a) Função corrente (b) Isotermas.

3.4.3.– Perfil de Velocidade e Temperatura

Para ilustrar a influência das forças de empuxo no escoamento rotativo em ambas as extremidades mostra-se o comportamento dos campos de velocidades e temperatura, através de gráficos, onde se faz uma comparação com os resultados obtidos via GITT e os resultados obtidos por OMI e IWATSU (2005). Cada componente da velocidade e temperatura são plotados ao longo do plano vertical a r = 0.8 para *Ri* = 0 e 1,0 e os valores representativos de s_t.

Primeiramente, realizando-se uma comparação gráfica com os resultados de OMI e IWATSU (2005), observa-se que em todas as posições analisadas, os resultados obtidos pela GITT convergem completamente. Analisando-se o desenvolvimento da componente radial, como visto na Figura (3.4.a), verifica-se que os valores máximos das velocidades radiais ocorrem próximos das extremidades inferiores e superiores da cavidade cilíndrica sendo fortemente influenciado pelo parâmetro s_t quando este valor for unitário. Quando s_t é muito pequeno o parâmetro de rotação da base (s_b) prevalece no escoamento rotativo fazendo com que a velocidade radial do fluido seja máxima na extremidade inferior. Para *Ri* = 1 e s_t=-1, ou seja, o escoamento é co-rotativo, observa-se a alteração no sentido do escoamento radial em duas regiões centrais dos domínios (em z = 0,5 e z = 1,5), evidenciando a presença de duas quebras de vórtices antissimétricas como visto Figura 3.3.a.

A Figura 3.4.b apresenta o desenvolvimento das componentes axiais de velocidade, avaliados para *Re* = 1000 com números de Richardson iguais a 0 e 1. De acordo com a figura, observa-se que para s_t = -1 e ambos os números de Richardson que existe uma certa simetria do perfil de velocidade entre as extremidades rotativas da cavidade cilíndrica. Para *Ri* = 1,0 e s_t = -0,1 o perfil de velocidade axial do fluido é nula a partir da posição z = 0,8 obtendo-se uma pequena variação próxima do disco rotacional inferior. Para *Ri* = 1 e s_t = -1 existe um decréscimo de velocidade axial próximo da base rotativa e um acréscimo próximo do topo da cavidade acarretando a formação de pontos de quebras de vórtices devido à reversões na direção do fluxo.

Analisando-se o comportamento do perfil de temperatura, visto na Figura 3.4.c, verifica-se que a taxa de temperatura é mais acentuada na região da extremidade superior onde existe um gradiente de temperatura positivo. Para os valores de *Ri* = 1, a temperatura na maior parte da altura do cilindro é uma função linear de z sofrendo uma pequena alteração próxima das extremidades rotativas. Segundo IWATSU (2004) a

explicação para a alteração no gradiente de temperatura no fluido quando se aumenta o número de *Ri* de 0 para outros valores maiores é que ocorre a mudança de uma circulação principal meridional convectiva para uma circulação localizada na camada adjacente lisa no disco do topo tornando a distribuição de temperatura convectiva para condutiva.

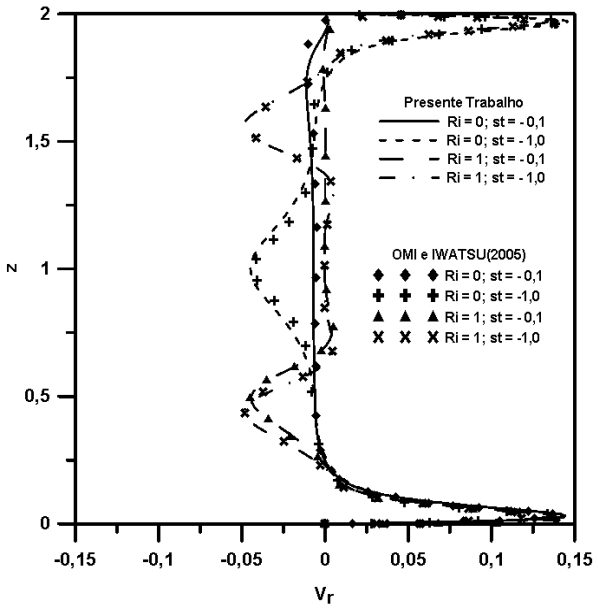


Figura 3.4.a - Perfil da componente radial de velocidade ao longo do plano vertical à r = 0,8 e *Re* = 1000 à valores de *Ri* = 0 e 1.

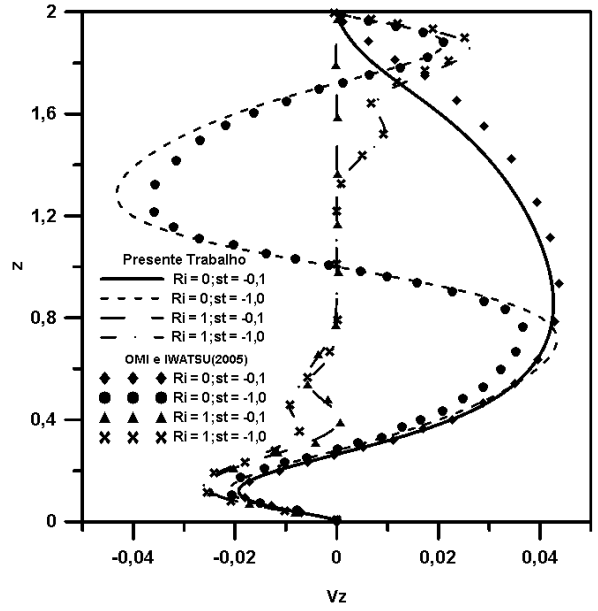


Figura 3.4.b - Perfil da componente axial de velocidade ao longo do plano vertical à r = 0,8 e *Re* = 1000 à valores de *Ri* = 0 e 1.

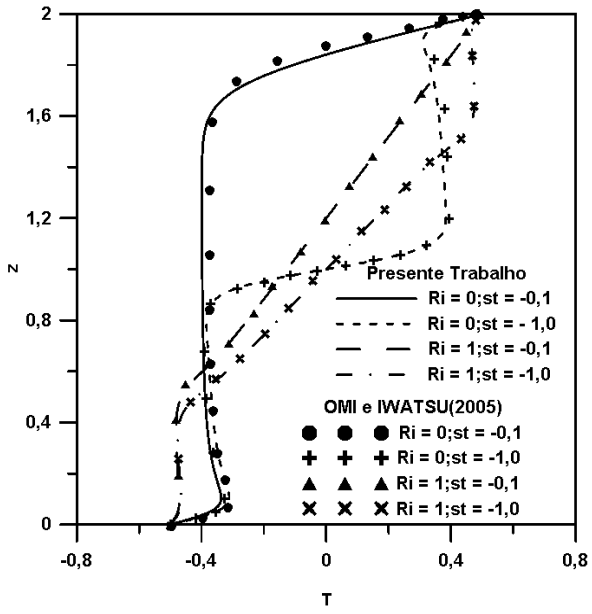


Figura 3.4.c - Perfil de temperatura ao longo do plano vertical à r = 0,8 e *Re* = 1000 a valores de *Ri* = 0 e 1.

3.4.4.– Número de Nusselt Local

A variação do número de Nusselt local para *Re* = 1000 e *Ri* = 1, é mostrado nas Figuras (3.5.a) e (3.5.b). Alguns resultados obtidos neste trabalho são comparados com os de OMI e IWATSU (2005) podendo-se verificar uma excelente concordância entre esses resultados. Verifica-se na Figura 3.5.a que para s_t = 1 e -1 o número de Nusselt local apresentam os mesmos valores a partir do pico máximo em r = 0,0 até um decréscimo em r = 1. Para os demais parâmetros (s_t = -0,1; 0,0 e 0,1) o Nusselt local apresentam as mesmas características dos anteriores.

Segundo OMI e IWATSU (2005) a condução domina a transferência vertical de calor e o número de Nusselt local aproxima-se para um valor quase constante. Esta tendência é mais visível no topo do disco com s ≈ 0. Para todos os valores de s_t computados, o número de Nusselt local é maior em r = 0 e diminui quando r aumenta na direção da parede lateral.

Outro fator importante é que existe uma distribuição quase uniforme de números de Nusselt que promove a anulação do movimento vertical do fluido pela estratificação térmica e deste modo a porção maior de transferência de calor entre os limites do topo e da base sejam realizados pela condução.

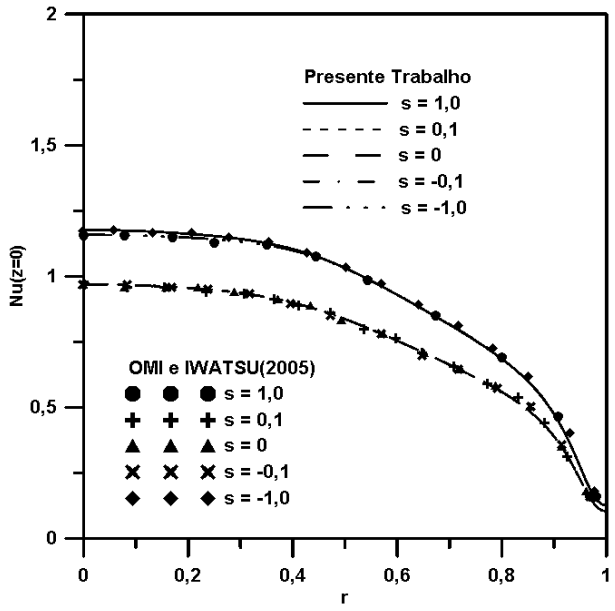


Figura 3.5.a - Número de Nusselt local na base (z = 0) do cilindro. Re = 1000 e Ri = 1,0; Pr = 1,0 e h=2,0.

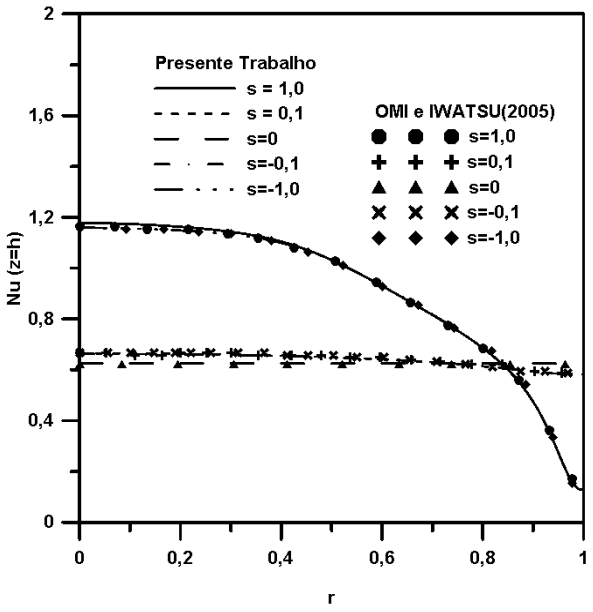


Figura 3.5.b - Número de Nusselt local no topo (z = h) do cilindro. Re = 1000 e Ri = 1,0; Pr = 1,0 e h=2,0.

3.5 – CONCLUSÃO

O presente capítulo avalia mais uma vez o potencial da GITT na solução do problema de convecção em regime permanente no interior de uma cavidade cilíndrica com co/contra rotação das extremidades da cavidade. Foi analisado a influência dos números de Reynolds, Richardson e os parâmetros de rotação das extremidades no escoamento, sobre os campos de velocidade e temperatura.

No entanto, o tempo computacional envolvido no trabalho deve-se em sua maioria ao cálculo dos coeficientes integrais, definidos pelas equações (3.15), onde se faz necessário uma avaliação mais sucinta desses coeficientes com o objetivo de buscar soluções analíticas ou numéricas acarretando um menor custo computacional.

A análise dos campos de velocidade e temperatura proporcionou uma validação do código computacional envolvido, quando comparados os resultados do presente trabalho com aquele apresentado por OMI e IWATSU (2005) que avaliou o escoamento em cavidades cilíndricas com rotação em ambas as extremidades e gradientes de temperaturas constantes nas extremidades.

Com relação ao desenvolvimento das componentes de velocidade, foi observado que à medida que os números de Reynolds e Richardson aumentam alguns fenômenos físicos ocorrem, como por exemplo, aparecimento de vórtices primários e secundários nos cantos e bases do cilindro e/ou separação desses vórtices, dependendo dos parâmetros de rotação s_t e s_b. De fato, para baixos números de Richardson os efeitos da flutuabilidade são desprezíveis e vórtices principais e simples são desenvolvidos no plano meridional inteiro, com uma menor separação ligeiramente visível nos cantos, entre as paredes do cilindro e o disco do topo. Quando o número de Richardson ($Ri = 1$) os efeitos da estratificação térmica são substanciais, camadas horizontalmente padronizadas aparecem com vórtices principais próximos do disco do topo e células secundárias recirculantes, horizontalmente estendidas, movem-se. Foram avaliados os parâmetros de rotação no processo de transferência de calor onde se verifica a importância dos termos convectivos em relação ao condutivo, quando se aumenta o número de Richardson.

Finalmente, os números de Nusselt foram analisados para diferentes números de Reynolds e Richardson e apresentaram resultados satisfatórios, principalmente para os números de Nusselt, quando comparados com o estudo de Omi e Iwatsu (2005).

Quando os efeitos da flutuabilidade são insignificantes e os discos são co-rotativos, o fluido rotaciona com uma velocidade angular intermediária das extremidades do disco com camadas limites formadas em todos os contornos. Quando os discos estão em contra-rotação, o escoamento azimutal cisalhante com fluxos de recirculações secundária meridionais é criado. Sob a condição de estratificação de temperatura devido a inibição do movimento vertical pela flutuabilidade, a sucção de Ekman é perdida e as camadas limites da parede lateral desaparecem.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

4.1 - CONCLUSÕES GERAIS

Com o presente trabalho buscou-se estender a aplicação da GITT para uma classe mais ampla de problemas complexos da física-matemática, envolvendo mecânica dos fluídos e transferência de calor, como no problema do escoamento giratório em cavidades cilíndricas bidimensionais com rotação das extremidades. A técnica híbrida mostrou-se uma ferramenta eficaz na obtenção de resultados acurados, para equações com alto grau de não-linearidade e acoplamento. A característica de controlar automaticamente o erro relativo sobre os resultados faz com que a metodologia utilizada neste trabalho seja empregada com sucesso para se obter resultados benchmark.

No estudo apresentado no Capítulo 2, para o escoamento de fluidos Newtonianos em cavidades cilíndricas com rotação das extremidades, observou-se que a aplicação da GITT na solução das equações de Navier Stokes bidimensionais, conduziu para resultados satisfatórios, conforme os dados presentes na literatura.

O Capítulo 3 abordou o problema de escoamento giratório com transferência de calor entre as extremidades, utilizando a GITT como metodologia de solução das equações dos campos de velocidades e temperatura. Nesse capítulo, mostrou-se que a GITT foi novamente capaz de solucionar as equações e que os resultados obtidos mostraram excelente concordância com os previamente reportados na literatura.

4.2 - SUGESTÕES

Como sugestões de trabalhos que podem ser feitos para promoverem uma continuação da pesquisa desenvolvida no presente trabalho propõem-se:

- ✓ Simulação analítico-numérica para outros valores de números de Richardson e Reynolds de modo a contribuir ainda mais com a validação da metodologia da solução empregadas nos Capítulos 2 e 3.
- ✓ Aplicar a técnica hibrida numérica em outras formas de cavidades envolvendo análises com escoamentos de fluidos não-Newtonianos, transferência de massa e campos magnéticos.

- ✓ Realizar o estudo em outras cavidades cilíndricas ou outras geometrias, adicionando-se a análise da influência das rotações das paredes laterais e campos magnéticos utilizando a GITT como metodologia de solução.

.

REFERÊNCIAS

BIRD, R. B., STEWART, W.E.,2002, Fenômenos de transporte. John Wiley, New York.

BHATTACHARYYA, S., PAL, A., 1998, "Axisymmetric Vortex Breakdown in a Filled Cylinder", ***Int. J. Engng Sci.,*** vol. 36, pp. 555-563.

BHATTACHARYYA, S., PAL, A., 1999, "On the flow between two rotating disks enclosed by a cylinder", ***Acta Mechanica,*** vol. 135, pp. 27-40.

BHAUMIK, S.K., LAKSHMISHA, L.N., 2007, "Lattice Boltzmann simulation of lid-driven swirling flow in confined cylindrical cavity", ***Computers & Fluids,*** vol. 36, pp. pp. 1651-1673.

BOUFFANAIS, R., JACONO, L.N., 2009, "Transitional cylindrical swirling flow in presence of a flat free surface", ***Computers & Fluids,*** vol. 38, pp. pp. 1163-1173.

BOYCE, W. E., DIPRIMA, R., C., 2001, Elementary differential equation and boundary value problems, Seventh Edition, John Wiley & Sons. Inc.

CHENG, T.S., 2011, "Characteristics of mixed convection heat transfer in a lid-driven square cavity with various Richardson and Prandtl numbers", ***Computers & Fluids,*** vol. 50, pp. pp. 197-205.

COTTA, R. M., 1993, Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow. CRC Press, Boca Raton, FL.

DELERY, J. M., 1994, "Aspects of vortex breakdown", ***Prog. Aerospace Sci.,,*** vol. 20, pp.1-59.

DOBY, M.J., NOWAKOWSKI, A.F., NOWAK, E., DYAKOWSKI, T., 2007, "Numerical and experimental examination of swirling flow in a cylindrical container with rotation lids", ***Minerals Engineering,*** vol. 20, pp. 361-367.

ESCUDIER, M. P., 1984, “Observations of the Flow Produced in a Cylindrical Container by a Rotating Endwall”, ***Experiments in Fluids***, vol. 2, pp.189-196.

ESCUDIER, M. P., 1988, “Vortex breakdown observations and explanations”, ***Prog. Aerospace Sci.***, vol. 25, pp.189-229.

ESCUDIER, M.P., CULLEN, L. M., 1996, “Flow of a shear-thinning liquid in a cylindrical container with a rotating end wall”, ***Experimental Thermal and Fluid Science***, vol. 12, pp.381-387.

FEDELE, F., HITT, D.L., PRABHU, R, D., 2005, “Revisiting the Stability of Pulsatile Pipe Flow”, ***European Journal B/Fluids***, vol. 24, pp.237-254.

FUJIMURA, K., YOSHIZAWA, H., IWATSU, R., KOYAMA, H.S., HYUN, J.M 2001, “Velocity measurements of vortex breakdown in an enclosed cylinder”, ***J. Fluid Mech.,*** vol. 123, pp.604.

GELFGAT, A.Y., BAR-YOSEPH, P.Z., SOLAN, A., 1996, “Steady States and Oscillatory Instability of Swirling Flow in a Cylinder with Rotating Top and Bottom”, ***Phys. Fluids***, vol. 8, Vol. 27, pp.2614-2625.

GUO, Z., HAN, H., SHI, B., ZHENG, C., 2009, “Theory of the Lattice Boltzmann equation Lattice Boltzmann model for axisymmetric flows”, ***Physical Review***, vol. 79.

HALL, M.G., 1972. “Vortex breakdown”, ***Annual Review of Fluid Mechanics***, vol. 4, pp.195-218.

HERRADA, M.A, SHTERN, V., 2003, “Control of vortex breakdown by temperature gradients”, ***Physical of Fluids***, vol. 15.

IMSL FORTRAN MATH LIBRARY, Boulder, CO 80301, USA, 2014.

INAMURO, T., YAMAGUCHI, A., OGINO, F., 1997, Fluid Flow in a Rotating Cylindrical Container with a Rotating Disk at the Fluid Surface, ***Fluids Dynamics Research***, ,vol. 21, pp.417-430.

IWATSU, R., HYUN, J.M., 1995, "Three-dimensional driven-cavity flows with a vertical temperature gradient", ***Int. J Heat Mass Transfer.,*** vol. 38, pp. 3319-3328.

IWATSU, R., 2004, "Flow pattern and heat transfer of swirling flows in cylindrical container with rotating top and stable temperature gradient", ***Int. J. Heat Mass Transfer,*** vol. 47, pp. 2755-2767.

IWATSU, R., 2005, "Numerical study of flows in a cylindr ical container with rotating bottom and top flat free surface", ***Journal of the Physical Society of Japan,*** vol. 74, pp. 333-344.

IWATSU, R., 2006, "Thermally Stratified Swirling Flows in Cylindrical Container with Rotating Co-Rotating Disks and Differentially Rotating Sidewall", ***Int. J. Heat Mass Transfer,*** vol. 49, pp. 4258-4263.

IWATSU, R., 2009, "Application of fourth-order explicit schemes to the computation of axisymmetric swirlingflows of Boussinesq fluid in containers with arbitrary cross sections", ***Numerical Heat Transfer,*** vol. 56, pp. 191-210.

JORGENSEN, B.H., SORENSEN, J.N., AUBRY, N., 2010, Control of Vortex Breakdown in a Closed Cylinder with a Rotating Lid, ***Theor. Comput. Fluid Dyn.,*** vol. 24, pp. 483-496.

KIM, W.N., HYUN, J.M., 1997, "Convective heat transfer in a cylinder with a rotating lid under stable stratification", ***Int. J. Heat and Fluid Flow***, vol. 18, pp.384-388.

LEAL, M.A., PÈREZ-GUERRERO, J.S., COTTA, R.M., 1999, "Natural convection inside two-dimensional cavities: The integral transform method", ***Commun. Numer. Meth. Engng,*** vol. 15, pp. 113-125.

LEE, C.H., HYUN, J.M., 1999, “Flow of a Stratified in a Cylinder with a Rotating Lid”, ***Int. J. Heat Fluid,*** vol. 20, pp. 26-33.

LEIBOVICH, S., 1978, “The structure of vortex breakdown”, ***Annual Review Fluid Mechanics,*** vol. 46, pp. 10-221.

LIM, T.T., CUI, Y.D., 2005, “On the generation of a spiral-type vortex breakdown in an enclosed cylindricalcontainer”, ***Phys. Fluids,*** vol. 17.

LOPEZ, J.M., 1990, “Axisymmetric vortex breakdown”, ***Journal of Fluids Mechanic,*** vol. 221, pp. 553-76.

LOPEZ, J.M., 2012, “Three-dimensional swirling flows in a tall cylinder driven by a rotating endwall”, ***FDMP,*** vol. 24, pp. 1-9.

LUCCA-NEGRO, O., O’DOHERTY, T., 2001, “Vortex breakdown: a review”, ***Progress in Energy and Combustion Science,*** pp. 431-481.

MAHFOUD, B., BESSAIH, R., 2011, Oscillatory swirling flows in a cylindrical enclosure with co-/counter-rotating end disks submitted to a vertical temperature gradient, ***FDMP,*** vol. 8, pp. 1-26.

OLIVEIRA, A.S.S., 2010, “Estudo teórico experimental da dinâmica de temperatura no interior de uma cavidade cilíndrica”***, Tese de Doutorado,*** Universidade Federal da Paraíba,PB.

OMI, Y., IWATSU, R., 2005, “Numerical study of swirling flows in cylindrical container with co-/counter-rotating end disks under stable temperature difference”, ***Int. J. Heat Mass Transfer,*** vol. 48, pp. 4854-4866.

ÖZISIK, M. N.; MURRAY, R. L., 1974, On the Solution of Liner Diffusion Problems whit Variable Boundary Conditions Parameters. ***J. Heat Transfer***, vol. 96, p. 48-51.

ÖZISIK, M. N., 1984, Heat Conduction. John Wiley, New York.

OZISIK, M, N., 1990, Transferencia de calor Um texto básico. Ed.Guanabara, Rio de Janeiro.

PAO, H.-P.,1970, " A numerical computation of a confined rotating flow", ***Journal of Applied Mech***, 37, pp. 480-487.

PAO, H.-P.,1972, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for Flows in the Disk-Cylinder System", ***Physics of Fluids***, 15, pp. 4-11.

PEREIRA, L. M., 2000, "Solução das Equações de Navier-Stokes e da Energia em Coordenadas Cilindricas Via Transformação Integral", Tese de Doutorado da COPPE-UFRJ, Programa de Engenharia Mecânica.

PÉREZ-GUERRERO, J.S., 1999, "Solução Analítica para o Problema da Cavidade com Tampa Deslizante para Números de Reynolds tendendo a Zero", ***15 th Brazillian Congresso f Mechanical Engineering***.

PÉREZ-GUERRERO, J.S, COTTA, R. M., 1992, "Integral transform method for Navier-Stokes equations in stream function-only formulation", ***International Journal for Numerical Methods in Fluids***, 15, pp. 399-409.

SPOHN, A., MORY, M., HOPFINGER, E.J., 1993, "Observations of Vortex Breakdown in an Open Cylindrical Container with a Rotating Bottom", **Experiments in Fluids,** vol. 14**,** pp.70-77.

SHTERN, V., HUSSAIN, F., 1999, Collapse, Symmetry Breaking, and Hysteresis in Swirling Flows, **Annu. Rev. Fluid Mech**., vol. 31, pp. 537-566.

SHARIF, M.A.R., 2007, "Laminar mixed convection in shallow inclined driven cavities with hot moving lid on top and cooled from bottom", **Applied Thermal Engineering**., vol. 27, pp. 1036-1042.

SILVA, M.S., 2002, “Análise dos Efeitos Razão de Aspecto e Inclinação na Convecção Natural em Cavidades Via Transformação Integral”, ***Disssertação de Mestrado,*** Universidade Federal de Uberlândia,MG.

SILVA, J.J.G.S., MACEDO, E.N., QUARESMA, J.N.N., COTTA, R.M., 2011, “Hybrid Integral Transform Solution for MHD Natural Convection in Cavities”, ***21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering*.**

SIGINER, A., KNIGHT, R., 1993, “Swirling free surface flow in cylindrical containers”, **Journal of Engineering Mathematics,** vol. 27, pp.245-264.

SORENSEN, J. N. & CHRISTENSEN, E.A., 1995, “Direct Numerical Simulation of Rotating Fluid Flow in a Closed Cylinder, **Phys. Fluids**, vol. 7, pp. 764-778

SOTIROPOULOS, F., VENTIKOS, Y., 2001, The Three-dimensional Structure of Confined Swirling Flows with Vortex Breakdown, **J. Fluid Mech.,** vol. 426, pp. 155-175.

SOTIROPOULOS, F., DONALD, R.W., TAHIRIH, C.L., 2002, “Experiments on Lagrangian transport in steady vortex-breakdown bubbles in a confined swirling flow” , **J. Fluid Mech.,** vol. 466, pp. 215-248.

SOUSA, M., 2002, “Simulação de convecção natural transiente em cavidades inclinadas com fluidos de propriedades variáveis a baixos números de Rayleigh”, ***IX Congresso Brasileiro de Engenharias e Ciências Térmicas***.

SPOHN, A., MORY, M., HOPFINGER, E.J., 1993, “Observations of Vortex Breakdown in an Open Cylindrical Container with a Rotating Bottom”, ***Experiments in Fluids ,*** vol. 14, pp. 70-77.

TSITVERBLIT, N., 1993, “Vortex breakdown in a cylindrical container in the light of continuation of a steady solution”, ***Fluid Dynamics Research,*** vol. 11, pp. 19-35.

VALENTINE, D.T., JAHNKE, C.C., 1994, “Flows induced in a cylinder with both end walls rotating”, ***Phys. Fluids.,*** vol. 6, pp. 2702-10.

ZHANG, T., BAOCHANG, S., ZHENHUA, C., RONG, F., 2012, “Lattice BGK Model for Incompressible Axisymmetric Flows”, ***Commun. Comput. Phys.,*** vol. 11, pp.1569-1590.

ZHOU, J.G., 2011, “Axisymmetric lattice Boltzmann method revised”, ***Physical Review,*** vol. 84.

XUE, S.C., PHAN-THIEN, N., TANNER, R.I., 1999, “Fully three-dimensional, time-dependet numerical simulations of Newtonian and viscoelastic swirling flows Part I. method and steady flows”, **J. Non-Newtonian Fluid Mech.,** vol. 87, pp. 337-367.

WANG, Y., SHU, C., TEO, C.J., 2014, “A fractional step axisymmetric Lattice Boltzmann flux solver for incompressible swirling and rotating flows”, **Computers & Fluids ,** vol. 96, pp. 204-214.

WATSON, J.P., NEITZEL, G.P., 1996, “Numerical evaluation of a vortex-breakdown criterion”, **Phys. Fluids.,** vol. 8, pp. 11.