



Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
de Recursos Naturais da Amazônia

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA INTEGRAL  
GENERALIZADA EM MANCAIS RADIAIS OPERANDO COM  
FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS TIPO LEI DA POTÊNCIA**

**Rui Nelson Otoni Magno**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, PRODERNA/ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais.

Orientadores: João Nazareno Nonato Quaresma  
Emanuel Negrão Macêdo

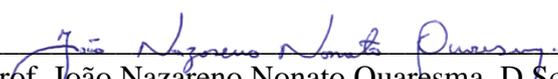
Belém  
Fevereiro de 2016

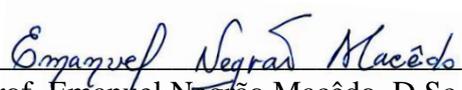
**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA EM  
MANCAIS RADIAIS OPERANDO COM FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS  
TIPO LEI DA POTÊNCIA**

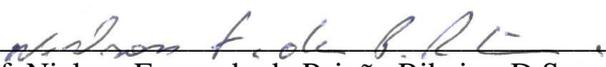
Rui Nelson Otoni Magno

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA AMAZÔNIA (PRODERNA/ITEC) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS.

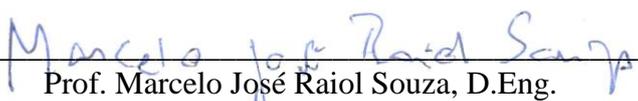
Examinada por:

  
Prof. João Nazareno Nonato Quaresma, D.Sc.  
(PRODERNA/ITEC/UFPA-Orientador)

  
Prof. Emanuel Negrão Macêdo, D.Sc.  
(PRODERNA/ITEC/UFPA-Coorientador)

  
Prof. Nielson Fernando da Paixão Ribeiro, D.Sc.  
(PRODERNA/ITEC/UFPA-Membro)

  
Prof. Erb Ferreira Lins, D.Sc.  
(PRODERNA/ITEC/UFPA-Membro)

  
Prof. Marcelo José Raiol Souza, D.Eng.  
(CCNT/UEPA-Membro)

  
Prof. Leandro Alcoforado Sphaier, Ph.D.  
(TEM/PGMEC/UFF-Membro)

BELÉM, PA - BRASIL

FEVEREIRO DE 2016

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**Sistema de Bibliotecas da UFPA**

---

Magno, Rui Nelson Otoni, 1971-

Aplicação da transformada integral generalizada em mancais radiais operando com fluidos não-newtonianos tipo lei da potência / Rui Nelson Otoni Magno. – 2016

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma;

Coorientador: Emanuel Negrão Macêdo.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, Belém, 2016.

1. Mecânica dos Fluidos. 2. Hidrodinâmica. 3. Fluidos não-newtonianos. 4. Transformadas integrais. 5. Lubrificação e lubrificantes.  
I. Título

CDD 22. ed. 620.106

---

*Dedico este trabalho à minha esposa e aos meus filhos, pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis, e à minha mãe e ao pai, por tudo que sempre fizeram por mim.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus por tudo que tem proporcionado a mim nessa vida, minha eterna fonte de energia, sabedoria e fé.

Ao Professor João Nazareno Nonato Quaresma pela orientação, amizade, e sobretudo, pelo incentivo e força dada para conclusão deste trabalho.

Ao Professor Emanuel Negrão Macêdo pela orientação, amizade e pela força dada para conclusão deste trabalho.

À minha esposa Liandra Cristina Moreira Magno e aos meus filhos Rui Manoel Moreira Magno e João Pedro Moreira Magno pelo apoio e compreensão nos momentos difíceis, e principalmente por confiarem e acreditarem em mim.

Aos meus queridos pais Manoel Miranda Magno e Beatriz Rodrigues Otoni Magno por tudo que fizeram por mim.

Às minhas irmãs, em especial à Selma pelo apoio nos momentos que precisei.

Aos colegas do PRODERNA pelo incentivo e colaboração.

Ao PRODERNA/ITEC/UFPA pela oportunidade dada ao desenvolvimento do meu curso de doutorado.

Aos professores do PRODERNA/ITEC/UFPA.

Aos colegas professores do Programa de Ciência e Tecnologia, do Instituto de Engenharia e Geociências da UFOPA.

Ao CNPq pelo apoio financeiro concedido.

Resumo da Tese apresentada ao PRODERNA/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais (D.Eng.)

**APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA EM  
MANCAIS RADIAIS OPERANDO COM FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS  
TIPO LEI DA POTÊNCIA**

**Rui Nelson Otoni Magno**

Fevereiro/2016

Orientadores: João Nazareno Nonato Quaresma

Emanuel Macêdo Negrão

Área de Concentração: Uso e Transformação de Recursos Naturais

Neste trabalho é estudada a lubrificação hidrodinâmica de mancais radiais completos lubrificadas com fluidos não newtonianos que obedecem a lei da potência. A formulação do problema é obtida a partir das equações gerais do movimento, após serem assumidas algumas hipóteses simplificadoras inerentes ao tipo de problema. O método da perturbação regular é aplicado nas equações governantes para determinação dos perfis de velocidade e em seguida à equação de Reynolds generalizada para fluidos não-newtonianos. Soluções para os casos limites foram obtidas analiticamente. Em seguida, a equação de Reynolds generalizada, na forma completa, é resolvida via Técnica da Transformada Integral Generalizada. Para o cálculo das formulações foram desenvolvidos códigos computacionais em linguagem FORTRAN 90/95 onde se utilizou a sub-rotina DBVFPD da biblioteca IMSL (2014). Os resultados para os parâmetros de desempenho operacionais tais como o campo de pressão, a carga suportada, número de Sommerfeld, ângulo de ação, o coeficiente de atrito e escoamento lateral foram estabelecidos, e apresentaram excelente concordância quando comparados com resultados disponíveis na literatura, para diferentes excentricidades específicas, razões de aspectos e índices “ $n$ ” para fluidos que obedecem a lei da potência. Resultados considerando três tipos de rugosidade, quais sejam, senoidal, meia onda e onda completa, também foram obtidos e apresentaram uma boa concordância com a literatura, sendo que a rugosidade tipo onda completa apresentou melhor desempenho, aumentando a pressão, a capacidade de carga, o escoamento lateral e uma diminuição no coeficiente de atrito.

**Palavras-chaves:** lubrificação hidrodinâmica, fluido não-newtoniano, mancal radial, teoria da lubrificação, transformada integral.

Abstract of Thesis presented to PRODERNA/UFGA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Natural Resource Engineering (D.Eng.)

**APPLICATION OF THE GENERALIZED INTEGRAL TRANSFORM  
TECNHIQUE ON JOURNAL BEARING OPERATING WITH POWER OF  
LAW FLUIDS**

Rui Nelson Otoni Magno

February/2016

Advisors: João Nazareno Nonato Quaresma

Emanuel Negrão Macêdo

Research Area: Use and Transformation of Natural Resources

This work present a study of the hydrodynamic lubrication of full journal bearings with non-Newtonian lubricants, obeying the power-law model. The formulation of the problem is obtained from the general equations of motion, after being taken over some simplifying assumptions inherent of the problem were taken. The regular perturbation method is applied on the governing equations for determining velocity profiles, and on generalized Reynolds Equation for Non-Newtonian lubricant. Solutions for borderline cases were obtained analytically. Then the generalized Reynolds equation is resolved through the Generalized Integral Transform Technique (GITT). For the calculation a computer code was developed in FORTRAN 90/95 which used the BVFPD subroutine from IMSL Library (2014). Numerical results for operational performance parameters such as pressure field, load capacity, Sommerfeld number, attitude angle, friction coefficient and axial flow rate were established and showed excellent agreement when compared with results available in the literature, for different eccentricities, aspect ratios " $\lambda$ " and power-law index " $n$ ". Also it was studied the influence of surface texture, using sinusoidal, positive full and half wave roughness (transversal roughness). The transversal positive full wave is best for increasing the pressure, load carrying capacity and axial flow, again the results are excelente agreement with data available in the literature.

**Keywords:** hydrodynamic lubrication, power-law model, journal bearings, lubrication theory, integral transforms.

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS.....	1
1.2 OBJETIVO GERAL.....	3
1.3 CONTRIBUIÇÃO DA TESE.....	4
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	4
<b>CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>6</b>
2.1 TRIBOLOGIA – BREVE HISTÓRICO.....	6
2.2 SOLUÇÕES EM MANCAIS.....	11
2.3 CONSIDERAÇÕES REOLÓGICAS.....	23
2.4 A TEORIA DA LUBRIFICAÇÃO HIDRODINÂMICA.....	26
2.5 TEORIA DA PERTURBAÇÃO REGULAR.....	27
2.6 A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA.....	28
<b>CAPÍTULO 3 – FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....</b>	<b>32</b>
3.1 MODELO FÍSICO.....	32
3.1.1 Espessura de filme de óleo – relação aproximada.....	33
3.2 DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS.....	35
3.2.1 Equação geral do movimento.....	35
3.2.2 Hipóteses simplificadoras.....	36
3.2.3 Equação para modelo viscoso – Modelo <i>Power-Law</i> .....	38
3.2.4 Método da perturbação regular.....	39
3.3 CÁLCULO DA CARGA SUPOSTADA, DO NÚMERO DE SOMMERFELD E DO ÂNGULO DE AÇÃO.....	48
3.4 CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO.....	49
3.5 CÁLCULO DA TAXA DE ESCOAMENTO AXIAL.....	50
<b>CAPÍTULO 4 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS: CASOS LIMITES.....</b>	<b>51</b>
4.1 FORMULAÇÃO PARA MANCAIS LONGOS E EXCENTRICIDADE PEQUENA.....	51
4.2 FORMULAÇÃO PARA MANCAIS LONGOS E PARA QUALQUER VALOR DA EXCENTRICIDADE.....	53
4.3 CÁLCULO DA CAPACIDADE DE CARGA E ÂNGULO DE AÇÃO.....	54
4.4 CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO.....	55
4.5 CÁLCULO DA TAXA DE ESCOAMENTO AXIAL.....	55
<b>CAPÍTULO 5 – SOLUÇÃO UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA.....</b>	<b>57</b>
5.1 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO.....	57
5.1.1 Definição e solução do problema de autovalor.....	58
5.1.2 Desenvolvimento de par transformada-inversa.....	59
5.1.3 Transformação do problema diferencial parcial num sistema diferencial ordinário.....	59
5.1.4 Solução do sistema diferencial ordinário infinito.....	61
5.2 CÁLCULO DA CAPACIDADE DE CARGA, DO NÚMERO DE SOMMERFELD E DO ÂNGULO DE AÇÃO.....	63

5.2.1 Componente de carga ao longo da linha de centro.....	64
5.2.2 Componente de carga normal à linha de centro.....	64
5.2.3 Cálculo do número de Sommerfeld.....	64
5.2.4 Ângulo de Ação.....	65
5.3 CÁLCULO DO COEFICIENTE DE ATRITO.....	65
5.4 TAXA DE ESCOAMENTO LATERAL.....	66
<b>CAPÍTULO 6 – SOLUÇÃO PARA MANCAL RUGOSO.....</b>	<b>68</b>
6.1 MODELOS DE RUGOSIDADE.....	68
6.2 COMPARAÇÃO ENTRE MANCAL RUGOSO E MANCAL LISO.....	71
<b>CAPÍTULO 7 – RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>73</b>
7.1 SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS: CASOS LIMITES.....	73
7.2 SOLUÇÃO VIA GITT – FORMULAÇÃO GERAL.....	75
7.2.1 Mancal Liso.....	75
7.2.1 Mancal Rugoso.....	99
<b>CAPÍTULO 8 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>111</b>
8.1 CONCLUSÕES.....	111
8.2 SUGESTÕES.....	112
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>113</b>
<b>APÊNDICE I – CÁLCULO DA TAXA DE ESCOAMENTO AXIAL PARA A FORMULAÇÃO GERAL: VIA BALANÇO INTEGRAL.....</b>	<b>123</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 2.1</b>	Pivot inferior de porta encontrado na Mesopotâmia 2500 a.C.).....	7
<b>Figura 2.2</b>	Dispositivos de teste para o estudo do atrito de acordo com Leonardo da Vinci.....	7
<b>Figura 2.3</b>	Fotografia de mancal deslizante construído em 1788, exposto no Museu Ford.....	8
<b>Figura 2.4</b>	Reograma característicos de fluidos independentes do tempo.....	24
<b>Figura 2.5</b>	Reograma característicos para fluidos dependentes do tempo.....	25
<b>Figura 3.1</b>	Representação esquemática e a nomenclatura utilizada em análise de mancais radiais.....	32
<b>Figura 3.2</b>	Representação do sistema de coordenadas.....	33
<b>Figura 3.3</b>	Película lubrificante na forma plana em um mancal radial.....	33
<b>Figura 3.4</b>	Geometria da relação aproximada da espessura de filme de óleo.....	34
<b>Figura 3.5</b>	Forças de pressão e viscosas atuando sobre elemento de lubrificante, na direção x.....	36
<b>Figura 3.6</b>	- Representação esquemática das componentes de carga normal e ao longo da linha de centro.....	49
<b>Figura 5.1</b>	Fluxograma do procedimento de solução.....	63
<b>Figura 6.1</b>	Configurações para os diferentes modelos de rugosidade: (a) Senoidal, (b) Meia Onda e (c) Onda Completa.....	68
<b>Figura 7.1</b>	Variação da Capacidade de Carga em função de $\varepsilon$ para mancais longos para os casos limites 1 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) e 2 (para qualquer valor de $\varepsilon$ ).....	73
<b>Figura 7.2</b>	Variação do Coeficiente de Atrito em função de $\varepsilon$ para mancais longos para os casos limites 1 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) e 2 (para qualquer valor de $\varepsilon$ ).....	74

<b>Figura 7.3</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal para diferentes índices da lei da potência.....	82
<b>Figura 7.4</b>	Capacidade de carga em função da excentricidade específica no plano médio do mancal, para diferentes índices da lei da potência.....	83
<b>Figura 7.5</b>	Ângulo da ação em função da excentricidade específica, para diferentes índices da lei da potência.....	84
<b>Figura 7.6</b>	Coefficiente de atrito em função da excentricidade específica no plano médio do mancal para diferentes índices da lei da potência.....	85
<b>Figura 7.7</b>	Taxa de escoamento axial em função da excentricidade específica no plano médio do mancal para diferentes índices da lei da potência.....	86
<b>Figura 7.8</b>	Pressão máxima em função da posição axial para diferentes índices da lei da potência.....	87
<b>Figura 7.9</b>	Comparação da distribuição da pressão em função de teta, para $\varepsilon = 10^{-5}$ e $\lambda=10^{-5}$ , no plano médio do mancal, para solução analítica mancal longo e solução geral via GITT para $n=0.6$ , $1$ e $1.4$ , e SANTOS <i>et al.</i> (2012) para $n=1.0$ .....	88
<b>Figura 7.10</b>	Distribuição da pressão em função de teta, para $\varepsilon = 10^{-5}$ e $\lambda = 0,5$ , em diferentes posições do mancal e índices da lei da potência $n=0.6$ , $1.0$ e $1.4$ , e comparação com SANTOS <i>et al.</i> (2012), posição $\eta=0.5$ e $n=1.0$ .....	89
<b>Figura 7.11</b>	Distribuição da pressão em função de teta, para $\varepsilon = 10^{-5}$ e $\lambda = 1.0$ , em diferentes posições do mancal e índices da lei da potência $n=0.6$ , $1.0$ e $1.4$ , e comparação com SANTOS (2004), posição $\eta=0.5$ e $n=1.0$ .....	90
<b>Figura 7.12</b>	Gráfico do campo de pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 10^{-5}$ , $\lambda=10^{-5}$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	91

<b>Figura 7.13</b>	Gráfico do campo de pressão na direção circunferencial para $\varepsilon=0,1$ , $\lambda=10^{-5}$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	92
<b>Figura 7.14</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 0,5$ , $\lambda = 10^{-5}$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	92
<b>Figura 7.15</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 0,9$ , $\lambda = 10^{-5}$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	93
<b>Figura 7.16</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 10^{-5}$ , $\lambda = 0,5$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	94
<b>Figura 7.17</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 0,1$ , $\lambda = 0,5$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	94
<b>Figura 7.18</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 0,5$ , $\lambda = 0,5$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	95
<b>Figura 7.19</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 0,9$ , $\lambda = 0,5$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	95
<b>Figura 7.20</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 10^{-5}$ , $\lambda = 1$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	96
<b>Figura 7.21</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 0,1$ , $\lambda = 1$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	97
<b>Figura 7.22</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 0,5$ , $\lambda = 1$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	97
<b>Figura 7.23</b>	Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para $\varepsilon = 0,9$ , $\lambda = 1$ em diferentes posições do mancal: (a) $n=0.6$ ; (b) $n=1.0$ ; e (c) $n=1.4$ .....	98

<b>Figura 7.24</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo senoidal para $n=0,9$ , $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ .....	101
<b>Figura 7.25</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo senoidal para $n=1,1$ , $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ .....	102
<b>Figura 7.26</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo meia onda para $n=0,9$ , $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ .....	103
<b>Figura 7.27</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo meia onda para $n=1,1$ , $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ .....	103
<b>Figura 7.28</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa para $n=0,9$ , $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ .....	104
<b>Figura 7.29</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa para $n=1,1$ , $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ .....	105
<b>Figura 7.30</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com três tipos de rugosidade, para $n=1.0$ , $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ .....	106
<b>Figura 7.31</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo senoidal, para $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ , (a) $n=0,9$ e (b) $n=1,1$ .....	108
<b>Figura 7.32</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo meia onda, para $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ , (a) $n=0,9$ e (b) $n=1,1$ .....	108
<b>Figura 7.33</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa, para $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ , (a) $n=0,9$ e (b) $n=1,1$ .....	108

<b>Figura 7.34</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa, para $n=0.5, 0.9, 1.0, 1.1$ e $1.5$ , com $\varepsilon=0.7$ e $\lambda=1.0$ .....	109
<b>Figura 7.35</b>	Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa, para $n=1.0$ e $\varepsilon=0.7$ , com $\lambda=0.5, 1.0$ e $2.0$ .....	110

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 7.1</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ no plano médio do mancal para $\varepsilon=10^{-5}$ e $\lambda = 10^{-5}$ , para o caso $n=1$ .....	75
<b>Tabela 7.2</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ para o plano médio do mancal para $\varepsilon = 0,5$ e $\lambda = 10^{-5}$ , para o caso $n=0,6, 1$ e $1,4$ .....	76
<b>Tabela 7.3</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ para o plano médio do mancal para $\varepsilon = 0,1$ e $\lambda = 10^{-5}$ , para os casos de $n=0,6, 1$ e $1,4$ ...	77
<b>Tabela 7.4</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ para o plano médio do mancal para $\varepsilon = 0,9$ e $\lambda = 10^{-5}$ , para os casos de $n=0,6, 1$ e $1,4$ ...	77
<b>Tabela 7.5</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ para o plano médio do mancal para $\varepsilon = 10^{-5}$ e $\lambda = 0,5$ , para os casos de $n=0,6, 1$ e $1,4$ ...	78
<b>Tabela 7.6</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ para o plano médio do mancal para $\varepsilon = 0,5$ e $\lambda = 0,1$ , para os casos de $n=0,6, 1$ e $1,4$ .....	78
<b>Tabela 7.7</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ para o plano médio do mancal para $\varepsilon = 0,9$ e $\lambda = 0,1$ , para os casos de $n=0,6, 1$ e $1,4$ .....	79
<b>Tabela 7.8</b>	Comparação dos resultados de $S$ (Número de <i>Sommerfeld</i> ) e $\varphi$ com os disponíveis na literatura, para $\lambda=0.5$ .....	79
<b>Tabela 7.9</b>	Comparação dos resultados de $S$ (Número de <i>Sommerfeld</i> ) e $\varphi$ com os disponíveis na literatura, para $\lambda=1.0$ .....	80
<b>Tabela 7.10</b>	Comparação dos resultados de $S$ (Número de <i>Sommerfeld</i> ) e $\varphi$ com os disponíveis na literatura, para $\lambda=4.0$ .....	80
<b>Tabela 7.11</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ no plano médio do mancal com rugosidade senoidal para $\varepsilon = 0,7$ e $\lambda = 1,0$ , para o caso $n=0,9$ e $1,1$ .....	99
<b>Tabela 7.12</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ no plano médio do mancal com rugosidade meia onda para $\varepsilon = 0,7$ e $\lambda = 1,0$ , para o caso $n=0,9$ e $1,1$ .....	100

<b>Tabela 7.13</b>	Convergência de $\theta_L$ , $\varphi$ , $\tilde{W}$ e $P_{\max}$ no plano médio do mancal com rugosidade onda completa para $\varepsilon = 0,7$ e $\lambda = 1,0$ , para o caso $n=0,9$ e $1,1$ .....	100
<b>Tabela 7.14</b>	Influência de três tipos diferentes de rugosidade transversal sobre a performance de um mancal, considerando apenas 10 cavidades.....	107

## NOMENCLATURA

A	Amplitude da cavidade
$A_i$	Coefficiente definido na eq. (5.10c)
$\tilde{a}$	Relação adimensional definido na eq. (6.5a)
$B_i$	Coefficiente definido na eq. (5.11c)
$\tilde{b}$	Relação adimensional definido na eq. (6.5b)
C	Folga radial
$C_f$	Coefficiente de atrito
$C_{fR}$	Coefficiente de atrito no mancal rugoso
$C_i$	Coefficiente definido nas eqs. (5.7f) e (5.14c)
D	Diâmetro do munhão
$D_i$	Coefficiente definido nas eqs. (5.12c) e (5.14b)
E	Excentricidade
$E_i$	Coefficiente definido na eq. (5.13b)
$\tilde{f}_{at}$	Força de atrito adimensional, $\tilde{f}_{at} = f_{at}c^n / mRLU^n$
H	Espessura de filme
$\tilde{h}$	Espessura de filme adimensional, $\tilde{h} = h/c$
$h_0$	Espessura mínima do filme de óleo
i, j	Índice de referência da série solução
L	Comprimento do mancal
M	Viscosidade absoluta
$m_i$	Coefficiente definido na eq. (5.7e)
$Mxgrid$	Número máximo de pontos permitidos na grade (entrada)
N	Índice da lei da potência
$N_i$	Norma definida pela Eq. (5.4f)
Ninit	Número de pontos iniciais da grade, incluindo o ponto final (entrada)
NT	Nº de termos das expansões
P	Pressão no filme de óleo
P	Pressão adimensional, $P = pc^{(n+1)} / mRU^n$
$P_R$	Pressão adimensional no mancal rugoso
$\tilde{P}_i$	Potencial da pressão transformado

$P_{\text{máx}}$	Pressão máxima
$P_a$	Pressão atmosférica definida na Eq. (4.8c)
$Q$	Números inteiros, por exemplo, 2, 4, 6, 8,.....
$\tilde{Q}$	Taxa de escoamento axial adimensional, $\tilde{Q} = \tilde{Q}_s L / R^2 U c$
$\tilde{Q}_{SR}$	Taxa de escoamento axial adimensional no mancal rugoso
$R$	Raio do eixo rotativo
$S$	Parâmetro característico do mancal ou número de Sommerfeld, $S = 1 / \pi \tilde{W}$
$u, v, w$	Componentes da velocidade na direção circunferencial, radial e axial, respectivamente
$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$	Componentes da velocidade adimensional na direção circunferencial, radial e axial
$U$	Velocidade do munhão
$U_0$	Velocidade na superfície do mancal definida por Reynolds, eq. (2.3)
$U_1$	Velocidade do munhão, definida por Reynolds, eq. (2.3)
$V$	Velocidade de “compressão” ( <i>squeeze</i> ) devido a carga
$V_1$	Velocidade perpendicular ao munhão, definida por Reynolds, eq. (2.3)
$\tilde{W}_1$	Componente da carga adimensional ao longo da linha de centros, $\tilde{W}_1 = W_1 c^{(n+1)} / m R^2 U^n L$
$\tilde{W}_2$	Componente da carga adimensional perpendicular à linha de centros, $\tilde{W}_2 = W_2 c^{(n+1)} / m R^2 U^n L$
$\tilde{W}$	Capacidade de carga adimensional, $\tilde{W} = \sqrt{\tilde{W}_1^2 + \tilde{W}_2^2}$
$\tilde{W}_R$	Capacidade de carga adimensional no mancal rugoso
$x, y, z$	Coordenadas do mancal nas direções circunferencial, radial e axial, respectivamente

### Símbolos Gregos

$\alpha$	Ângulo de cavitação
$\Gamma$	Grupo dimensional dependente de $\theta_L$
$\delta_s, \delta_{oc}, \delta_{mo}$	Variação da rugosidade superficial em m, para senoidal, onda completa e meia onda, respectivamente.

$\tilde{\delta}_s, \tilde{\delta}_{oc}, \tilde{\delta}_{mo}$	Variação da rugosidade superficial adimensional para senoidal, onda completa e meia onda, respectivamente
$\theta, \xi, \eta$	Coordenadas adimensionais do mancal nas direções circunferencial, radial e axial, respectivamente
$\varphi$	Ângulo de ação
$\phi$	Ângulo de posição de pressão adimensional, $\phi = \theta / \theta_L$
$\lambda$	Razão de aspecto, relação entre o diâmetro do munhão e largura do mancal (D/L)
$\tau_w$	Tensão de cisalhamento do filme de óleo
$\theta$	Ângulo de posição da pressão
$\theta_L$	Ângulo que caracteriza o comprimento da película de lubrificante
$\varepsilon$	Excentricidade específica
$\mu$	Viscosidade absoluta definida por Reynolds, eq. (2.1)
$\mu_i$	Autovalores
$\psi_i$	Autofunção
$\tilde{\psi}_i$	Autofunção normalizada, $\tilde{\psi}_i = \psi_i / \sqrt{N_i}$
$\Omega$	Largura da cavidade
$\Omega$	Rugosidade transversal

### Abreviações

GITT      Técnica da Transformada Integral Generalizada

### Operadores

D	Diferencial total
$\partial$	Diferencial parcial
$\int$	Integral
$\Sigma$	Somatório

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

O estudo de problemas envolvendo fluidos não-newtonianos sempre motivou pesquisadores em diversas áreas da engenharia devido à grande ocorrência destes em diversos processos e aplicações industriais como, por exemplo, na indústria aeronáutica, na indústria de máquinas e equipamentos, na indústria eletroeletrônica, na indústria de transportes, em usinas de geração de energia, entre outras. O comportamento não linear das equações que envolvem fluidos não-newtonianos em fenômenos físicos também tem motivado a comunidade científica a desenvolver metodologias de solução cada vez mais eficientes, visto que soluções analíticas são aplicáveis a um número reduzido de problemas e quase sempre com muitas simplificações.

Dentre as várias aplicações de fluidos não-newtonianos, destacamos a utilização como lubrificante, onde o principal objetivo é separar superfícies rígidas em movimento relativo, comumente encontrados em mancais de máquinas e estruturas, contribuindo com a redução do calor, do atrito e com o desgaste das peças. A ciência que estuda os fenômenos decorrentes do movimento relativo entre superfícies atuantes, chama-se *tribologia*, nome de origem grega “*tribos*” ou “*tribein*” significa atritar e “*logia*” significa estudo. Para entender a física envolvida neste estudo é necessário conhecer a geometria das superfícies e também as equações da mecânica dos fluidos, para que se possa prever o comportamento do fluido lubrificante sujeito ao movimento das superfícies.

Mancal é um elemento de máquina normalmente utilizado entre duas superfícies rígidas. A função principal de um mancal é de separar as peças rígidas, evitando a contato entre elas. Um mancal geralmente possui um fluido lubrificante, que é inserido entre as superfícies rígidas. No caso em que haja um movimento relativo entre ambas, a finalidade do mancal é, também, a de diminuir o atrito seco entre as superfícies pelo atrito viscoso no fluido lubrificante (lubrificação hidrodinâmica), reduzindo assim a temperatura de funcionamento, o atrito e o desgaste. Os mancais podem ser divididos em duas categorias: estáticos (externamente pressurizados) e dinâmicos (autopressurizados). Na categoria de mancais dinâmicos ou hidrodinâmicos, temos ainda a subdivisão em: mancais radiais, axiais e mistos (DUARTE JR., 2005).

Mancais radiais hidrodinâmicos são componentes críticos na transmissão de potência por suportarem cargas elevadas em diferentes máquinas e condições de operação. Em projetos de máquinas, entretanto, é essencial saber as condições de operação dos mancais. Estas condições de operação podem ser estudadas por meios experimentais e/ou simulação física-matemática. Neste trabalho é dada ênfase na simulação que permite o estudo da lubrificação hidrodinâmica de mancais radiais lisos e rugosos, lubrificadas com fluidos não-newtonianos que seguem o modelo da lei da potência, por apresentarem um crescimento significativo em aplicações industriais e um número reduzido de trabalhos científicos quando comparados com fluidos newtonianos. Os fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência também apresentam comportamento não linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, o que torna as soluções mais difíceis, principalmente através de técnicas puramente numéricas. Por outro lado, a consolidação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) com sua característica analítica-numérica usada na modelagem e simulação computacional de vários problemas na física e engenharia também motivou o desenvolvimento do presente trabalho.

Neste trabalho a formulação do problema é obtida a partir das equações gerais do movimento, após serem assumidas algumas hipóteses simplificadoras inerentes ao tipo de problema. O método da perturbação regular é aplicado às equações governantes para determinação dos perfis de velocidade e em seguida a equação de Reynolds generalizada para fluido não-newtonianos, também estudadas por DIEN e ELROD (1983). Soluções para os casos limites (excentricidade específica “ $\epsilon$ ” pequena mancal longo e mancal longo com qualquer valor de  $\epsilon$ ) também são obtidas analiticamente. Depois, a equação de Reynolds generalizada é resolvida utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada e os parâmetros operacionais tais como, campo de pressão, carga suportada, número de *Sommerfeld*, ângulo de ação, coeficiente de atrito e escoamento lateral são estabelecidos e comparados com resultados disponíveis na literatura, para diferentes excentricidades específicas, razões de aspectos e índices dos fluidos que obedecem a lei da potência. Finalmente é analisado o efeito de três tipos de rugosidades transversais quais sejam, senoidal, meia onda e onda completa, sobre a performance do mancal para os parâmetros pressão máxima, capacidade de carga suportada, coeficiente de atrito e escoamento lateral, também os resultados obtidos são comparados com disponíveis na literatura.

## **1.2 - OBJETIVO GERAL**

O objetivo geral deste trabalho consiste em modelar e simular via Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) o comportamento do escoamento de fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência em mancais radiais hidrodinâmicos, sem e com rugosidade na superfície.

Os objetivos específicos são:

- Obter a Equação de Reynolds (ER) para fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência pelo método da perturbação regular;
- Solucionar analiticamente a equação de Reynolds para os casos limites em mancal longo para qualquer excentricidade e especialmente analisando o caso de excentricidade muito pequena;
- Aplicar a GITT na formulação completa em regime permanente, e comparar os resultados com os casos limite;
- Desenvolver um código computacional para solução do problema;
- Apresentar os parâmetros operacionais de interesse em projetos de mancais radiais e comparar com os resultados disponíveis na literatura;
- Considerar três tipos de rugosidade transversal na superfície do mancal e avaliar a influência de cada modelo em relação ao mancal liso, nos parâmetros pressão máxima, carga suportada, escoamento lateral e coeficiente de atrito, além da comparação com resultados disponíveis na literatura.

## **1.3 - CONTRIBUIÇÃO DA TESE**

A presente tese de doutorado tem como principais contribuições a aplicação da teoria da perturbação regular na solução de equações diferenciais e o estabelecimento de resultados padrões e/ou de referência para parâmetros operacionais e de projeto em

mancais radiais hidrodinâmicos lisos e rugosos, operando com fluidos não-newtonianos tipo lei da potência, obtidos via técnica da transformada integral generalizada, pois até então as soluções encontradas na literatura para este tipo de problema, de maneira geral, são todas puramente numéricas.

#### **1.4 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Esta Tese intitulada é “Aplicação da transformada integral generalizada em mancais radiais operando com fluidos não-newtonianos tipo lei da potência” e foi dividida em oito capítulos.

No Capítulo 1, buscou-se enfatizar as motivações e objetivos que levaram ao estudo da simulação e da modelagem de escoamento de fluidos não-newtonianos em mancais radiais hidrodinâmicos, considerando superfícies lisa e rugosa.

O Capítulo 2 é dedicado a situar o trabalho dentro da literatura, procurando abordar contribuições anteriores a este mesmo tipo de problema. Um breve histórico da tribologia é apresentado, a classificação de fluidos não-newtonianos, a teoria da lubrificação hidrodinâmica, bem como as principais contribuições na literatura que abordam a aplicação deste tipo de fluido em mancais. A descrição da teoria da perturbação regular e da Técnica da Transformada Integral Generalizada são também apresentadas, focando-se os principais trabalhos na literatura que utilizaram ambas técnicas na solução de problemas práticos na engenharia.

O Capítulo 3 é devotado ao estabelecimento das equações que regem a teoria da lubrificação hidrodinâmica – a equação de Reynolds generalizada, obtidas a partir das equações do movimento, conforme o modelo físico, hipóteses simplificadoras e aplicação da teoria da perturbação regular. Inicialmente estas equações se apresentam em termos de variáveis primitivas e posteriormente na forma adimensional.

O Capítulo 4 apresenta uma análise do problema para os casos limites e fornece suas soluções analíticas.

O Capítulo 5 traz a solução do problema geral adimensional utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada para mancal liso, as comparações com a formulação do Capítulo 4 e com a literatura disponível.

O Capítulo 6 considera três modelos de rugosidade, porém o formalismo de solução utilizando a GITT apresentado no Capítulo 5 não é mais discutido ou apresentado,

visto que a mudança na formulação geral altera apenas a espessura da película lubrificante e a sua derivada.

Os resultados e discussão são apresentados no Capítulo 7 para os casos limites de mancal longo, para formulação geral utilizando a GITT mancal liso e rugoso.

Finalmente, o Capítulo 8 apresenta as principais conclusões do presente trabalho e algumas sugestões para o prosseguimento do mesmo em etapas futuras.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo será apresentado um breve histórico sobre a tribologia, as principais contribuições na literatura que abordam a aplicação de fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência em mancais, algumas considerações reológicas e a teoria da lubrificação hidrodinâmica, bem como uma breve descrição da teoria da perturbação e da Técnica da Transformada Integral Generalizada. Enfoca-se também os principais trabalhos na literatura que utilizaram ambas técnicas na solução de problemas práticos na engenharia.

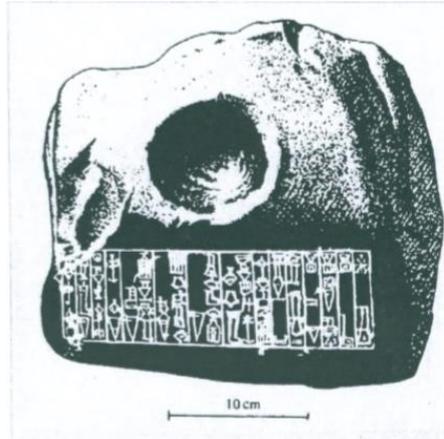
#### 2.1 - TRIBOLOGIA – BREVE HISTÓRICO

O nome tribologia foi criado em 1967 e vem da palavra grega *tribos* que significa *atrito*, e *logos* que significa estudo ou ciência. Esta ciência inclui o estudo da lubrificação, do atrito e o desgaste dos elementos de máquinas CAMREON (1966).

O atrito não tem apenas aspectos negativos: o comportamento em estrada de um carro depende diretamente do atrito entre os pneus e a estrada. Da mesma forma, o homem não seria capaz de andar sem atrito. Por fim, foi esfregando um pedaço de madeira dura no interior de uma parte oca de madeira mais suave que o homem aprendeu a dominar o fogo, mais de 100.000 anos atrás.

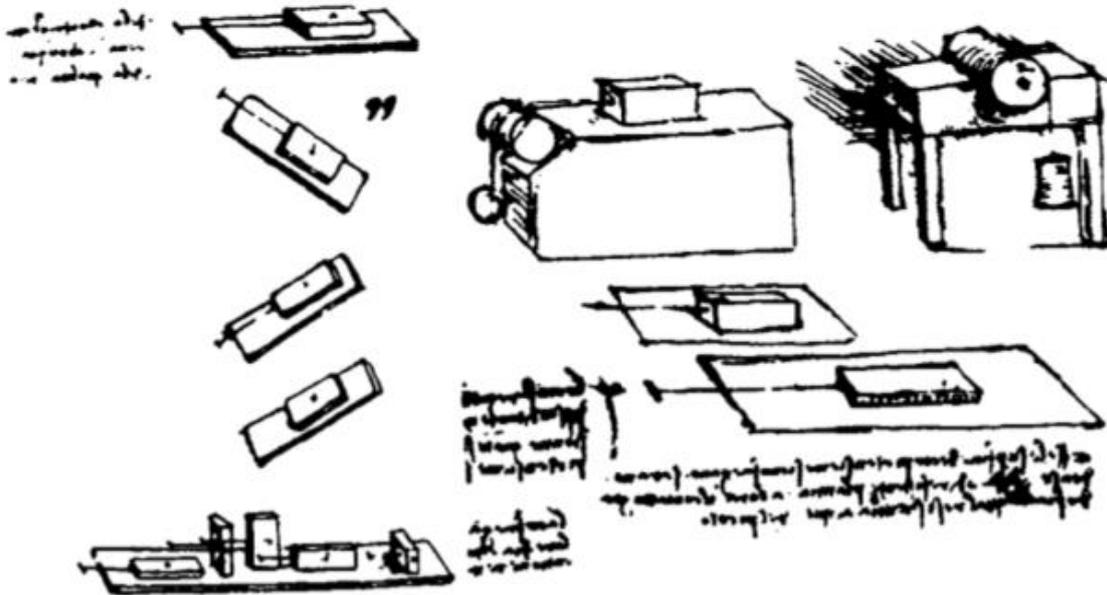
No entanto, uma vez produzidos os primeiros mecanismos, o homem tentou suprimir o desgaste e diminuir o atrito. Um exemplo atual e do dia-dia, temos o carro, em que parte da energia é perdida por atrito no motor e no sistema de transmissão.

Os primeiros mancais, segundo FRÊNE *et al.* (1989), produzidos pelo homem foram suportes para portas, ou seja, as chumaceiras de impulso constituído por uma haste de madeira em rotação no interior de uma parte oca de um pedaço de madeira ou pedra. Elementos de pedra, datados de 2500 a.C, foram encontrados na Mesopotâmia (Fig. 2.1).



**Figura 2.1.** Pivot inferior de porta encontrado na Mesopotâmia 2500 a.C. (FRÊNE *et al.* 1989).

Leonardo da Vinci, segundo FRÊNE *et al.* (1989), é o primeiro tribologista bem conhecido; ele fez notáveis contribuições para o estudo do atrito. Suas idéias eram de vanguarda em comparação com as conquistas tecnológicas de sua época. A Figura (2.2) mostra os dispositivos utilizados para determinar o atrito entre dois corpos e para demonstrar que a área de contato aparente não influencia no valor do atrito.



**Figura 2.2.** Dispositivos de teste para o estudo do atrito de acordo com Leonardo da Vinci (FRÊNE *et al.*, 1989).

O século XVIII, segundo FRÊNE *et al.* (1989), que corresponde ao início da revolução industrial, testemunhou a criação de várias máquinas que usam mancais de

deslizamento e até rolamentos. Rolamentos axiais com bolas sem gaiola foram encontrados em vários mecanismos: a represa Watergate, na Philadelphia, datada de 1770, os moinhos de vento na Sprowston Norkwilk, datado de 1780. Em outras partes, o desenvolvimento de máquinas a vapor promoveu o uso de muitos mancais de deslizamento. Figura 2.3, mostra um mancal de deslizamento de uma máquina a vapor construída em 1788, agora localizado no Museu Ford, em Detroit.



**Figura 2.3.** Fotografia de mancal deslizante construído em 1788, exposto no Museu Ford (FRÊNE *et al.*, 1989).

Em 1879, segundo FRÊNE *et al.* (1989), Robert Henry Thurston, publicou os resultados de seu estudo sobre o atrito e lubrificação. Ele mostrou que, com o aumento da velocidade, o coeficiente de atrito de um mancal lubrificado diminui abaixo dos seus valores estáticos, passa por um mínimo e então aumenta. Ele também apontou que a velocidade correspondente ao mínimo de atrito depende da carga aplicada ao mancal. *Nikolai Pavlovich Petrov*, em 1883, mostrou que, dentre as características físicas de um óleo, apenas a viscosidade, tem um papel preponderante no atrito do mancal. Ele estipulou que uma película de líquido separa totalmente as superfícies do eixo e do mancal e que uma pressão constante deve ser produzida nesta película. *Petrov* também mostrou que, para um dado mancal, a uma dada velocidade e um dado lubrificante, o atrito depende diretamente da temperatura e pode ser calculado para qualquer temperatura desde que se conheça a dependência da viscosidade da temperatura e do atrito a uma dada temperatura.

Na Inglaterra, segundo FRÊNE *et al.* (1989), em 1882 “A Instituição de Engenheiros Mecânicos” empregou *Beauchamp Tower* para realizar teste em lubrificação de mancais. *Tower* apresentou um primeiro relatório e concluiu que as leis de atrito líquido foram mais adequadas do que as de atrito sólido (Leis de Coulomb). De fato, o atrito depende pouco da carga, aumenta com a velocidade e diminui rapidamente quando a temperatura é aumentada. Ele salientou a existência de uma película lubrificante entre as superfícies do eixo e do mancal, bem como uma pressão gerada na película. Os estudos

experimentais de *B. Tower*, enfatizando pela primeira vez a existência de uma pressão hidrodinâmica no filme lubrificante de um mancal, serviu de base para a execução da teoria de lubrificação. De fato, as bases da lubrificação moderna foram estabelecidas no século 19. Em 1822, o matemático *Claude Louis Marie Navier* (1785-1836), na sequência dos trabalhos de Euler, apresentou, em um relatório para a Academia de Ciências, as equações gerais do movimento de um fluido considerando o atrito interno do fluido, ou seja, a viscosidade. Essas leis são usadas ainda hoje e são conhecidos por especialistas em mecânica dos fluidos sob o nome de equações de Navier-Stokes, uma vez que Stokes integrou-as para alguns casos simples.

Entre 1840 e 1846, segundo FRÊNE *et al.* (1989), *Jean Louis Marie Poiseuille*, estabeleceu as equações que governam o escoamento de um fluido, num tubo de diâmetro pequeno para descrever o escoamento de sangue nos vasos. Essas leis, muito utilizados na lubrificação (escoamento *Poiseuille* em lubrificação) foram confirmadas de forma independente, alguns anos depois na Alemanha por *Gotthilf Hagen*. Portanto, eles são geralmente conhecidos sob o nome de leis de *Hagen-Poiseuille*. O nome de *Poiseuille* também foi dada à unidade de viscosidade dinâmica no sistema MKS. O nome Poise tem sido utilizado, desde 1913, para a unidade de viscosidade dinâmica no sistema CGS.

Foi *Osborne Reynolds*, segundo FRÊNE *et al.* (1989), que, em um artigo publicado em 1886, estabeleceu os fundamentos da teoria da lubrificação hidrodinâmica moderna, para explicar os resultados experimentais de *B. Tower*. Na primeira parte de seu estudo, *Reynolds* discute resultados de *Tower*. Ele mostra que quando uma película de lubrificante separa completamente as superfícies, o atrito não é proporcional à velocidade, uma vez que o aumento da temperatura no filme leva a uma redução no valor da viscosidade e, por conseguinte, do atrito. Ele sugere que, nas experiências realizadas por *Tower*, o raio do eixo e do mancal são diferentes e que a espessura mínima da película está localizada a jusante da linha de carga. Ele também observa que quando a carga aumenta, a pressão se torna negativa em relação à área de saída, o que produz uma ruptura na película. Na segunda parte de seu relatório *Reynolds* analisa películas simples entre placas paralelas, um plano deslizante. Ele dá uma explicação física da capacidade de carga, devido à conservação da taxa de escoamento do óleo no eixo. Finalmente, ele explica a necessidade de mais ensaios devido a existência de rugosidade, na zona de menor espessura da película.

Na terceira parte do seu trabalho *Reynolds* apresenta hipóteses básicas da lubrificação hidrodinâmica: a espessura da película é pequena quando comparada a outras

dimensões; o escoamento é laminar; o lubrificante obedece à lei de *Newton*, a sua viscosidade é constante e é incompressível; as forças de campo, bem como as forças de inércia são negligenciadas; a curvatura geral do filme é negligenciada; a componente de velocidade do fluido na direção perpendicular à película, é pequena quando comparada com as outras componentes ( $v \ll u, w$ ); e gradientes de velocidade sobre a espessura de filme são preponderantes. Então, as equações de Navier-Stokes são reduzidas para:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Através da integração e supondo que não ocorre deslizamento do fluido nas paredes, *Reynolds* obtém o campo de velocidade no fluido como:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y-h)y + U_0 \frac{h-y}{h} + U_1 \frac{y}{h} \\ w &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y-h)y \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

As velocidades são introduzidas na equação de continuidade que depois de integradas produz a seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu \left\{ (U_0 + U_1) \frac{\partial h}{\partial x} + 2V_1 \right\} \quad (2.3)$$

Na última parte do seu relatório, *Reynolds* integra esta equação para o caso de um cunha de óleo infinitamente longo, ( $\partial p / \partial z = 0$ ), conhecida como condição de Reynolds. Ele também obtém uma solução para mancais infinitamente longos usando desenvolvimento em séries. No entanto, o processo de integração é dispendioso e a solução é aceitável apenas para os mancais levemente carregados. A equação (2.3) é conhecida desde então, sob o nome da equação de *Reynolds* e é a base da lubrificação hidrodinâmica moderna.

## 2.2 - SOLUÇÕES EM MANCAIS

Nesta seção, uma descrição da evolução e do estado atual da arte na análise da performance hidrodinâmica de mancais será apresentada em vários aspectos teóricos. Foco será dado, em sua maioria, para mancais operando com fluidos não-newtonianos. Bibliografia adicional sobre assunto podem ser encontradas em vários livros (PINKUS, 1961; CAMERON, 1966; HAMROCK *et al.* 2004; SZERI, 2005), artigos e dissertações de mestrado (SANTOS, 2004; BALUPARI, 2004) e teses de doutorado.

HOROWITZ e STEIDER (1961) desenvolveram um procedimento numérico para o cálculo da performance de lubrificante polimérico não-newtoniano em mancais radiais de largura finita. Consideraram uma viscosidade média “anisotrópica”, com diferentes viscosidades nas direções circunferencial e axial, já a viscosidade através da película com um valor definido, é função da tensão cisalhante resultante, em cada ponto na película de óleo. Concluíram que óleos poliméricos suportam mais carga em uma dada excentricidade, resultando em menos atrito e uma melhor distribuição de pressão, que óleos minerais de mesma viscosidade.

DOWSON (1962) desenvolveu uma equação de Reynolds generalizada para lubrificação, que permite a variação de quantidades relevantes através e ao longo da película lubrificante, como por exemplo a unificação dos efeitos térmicos e hidrodinâmicos e sua influência na pressão hidrodinâmica e no perfil de velocidade. A equação foi derivada a partir das equações fundamentais da hidrodinâmica com um mínimo de hipóteses restritivas e que pode ser reduzida para qualquer das formas empregadas comumente em análises de mancais lubrificados. HSU (1967), apresentou soluções analíticas para o cálculo da distribuição da pressão, taxa de escoamento, força de atrito, capacidade de carga, ângulo de atitude, coeficiente de atrito e número de Sommerfeld, em condições de regime permanente, isotérmico, e escoamento laminar de um fluido incompressível, inelástico, não-newtoniano em mancais radiais de comprimento infinito. A equação de *Rabinowitsch*, relação empírica de comportamento não-newtoniano, é utilizada para introdução do conceito de viscosidade dependente do cisalhamento. Soluções foram aplicadas para ambos fluidos não-newtonianos, pseudoplástico e dilatantes, e os resultados apresentaram uma boa concordância com os resultados numéricos publicados.

Ainda na década de 60, MAJUMDAR (1969) por meio de uma análise teórica estudou a performance de um mancal radial hidrostático com vários furos para entrada do

lubrificante incompressível. A equação generalizada de Reynolds foi resolvida utilizando o método das diferenças finitas, e resultados para campo de pressão, carga e taxa de escoamento foram obtidos.

SWAMY *et al.* (1975) apresentaram resultados para capacidade de carga de lubrificantes não-newtonianos em mancais radiais de largura finita. Uma forma modificada da equação de Reynolds foi derivada, para regime permanente, e foi resolvida utilizando a técnica das diferenças finitas com sucessivas sobre relaxação e condições de contorno de Reynolds para pressão. Em seus resultados mostraram a redução nos picos de pressão para lubrificante não-newtonianos, em comparação com newtonianos, que consideraram ser uma vantagem prática em mancais sujeitos a cargas pesadas e alternantes. Também concluíram que o decréscimo na carga, para valores de razão de excentricidade maiores, está relacionado ao decréscimo da viscosidade aparente do lubrificante em altas taxas de cisalhamento.

O comportamento de filme laminar não-newtoniano que segue o modelo da lei da potência (*power law*) num mancal radial foi estudado também por SAFAR (1979) ele resolveu a equação do momento para um mancal infinitamente longo assumindo uma expansão polinomial para o perfil de velocidade. Uma expressão para distribuição de pressão foi obtida pela integração da equação da continuidade. Ele concluiu que a distribuição de pressão aumenta com valores maiores do índice da lei da potência “ $n$ ”, porém é mais significativa para razões de excentricidades maiores.

Uma teoria para lubrificação estocástica aplicada em mancais com rugosidade foi estudada por KUMAR (1980) neste trabalho ele considerou a variação da viscosidade do lubrificante ao longo e através da espessura do filme. Formas estocásticas da equação de Reynolds para vários tipos de rugosidade foram estabelecidas. Estas equações podem ser usadas para estudar os efeitos da rugosidade superficial e da variação da viscosidade para diferentes configurações de mancais pela escolha apropriada das funções  $F$  e  $G$ , as quais dependem da função que descreve a espessura do filme ( $H$ ).

Ainda na linha de equações genéricas, VERMA (1981) obteve uma forma generalizada da equação de Reynolds e uma forma integrada da equação da energia a partir das equações fundamentais da termohidrodinâmica com mínimo de hipóteses simplificadoras. Estas podem ser reduzidas para quaisquer equações empregadas atualmente no cálculo da distribuição da pressão em filmes lubrificantes com paredes porosas e até com fluidos sinoviais, presentes nas articulações do joelho e do quadril.

Estas equações fornecem uma boa similaridade no assunto lubrificação com película de fluidos e a biomecânica.

TAYAL *et al.* (1982) estudaram os efeitos do comportamento não linear de fluidos não-newtonianos, modelo *Eyring*, nas características de performance de mancais radiais de largura finita. O método de elementos finitos, usando o método de *Galerkin*, foi usado para resolver as equações do momento e da continuidade em coordenadas cilíndricas. Foram obtidos os resultados de características de desempenho estáticas, tais como distribuição de pressão, capacidade de carga, ângulo de atitude, coeficiente de atrito, escoamento lateral e um parâmetro de elevação de temperatura. Eles concluíram que os valores de capacidade de carga, força de atrito e parâmetro de elevação de temperatura, para todas as relações de excentricidade, são menores para lubrificantes pseudoplásticos e maiores para lubrificantes dilatantes, estes mesmos parâmetros também foram comparados com lubrificantes newtonianos e apresentaram boa concordância.

SINHA e SINGH (1982) apresentaram uma análise teórica da lubrificação em mancais considerando cavitação e um lubrificante não-newtoniano que segue o modelo da lei da potência (*power law*). Os efeitos da deformação e *piezo-viscoso* são negligenciados. A análise revelou que com o aumento do índice da lei da potência “*n*”, a capacidade de carga aumenta e o ponto de cavitação, bem como, o ponto de máxima pressão é deslocado em direção ao centro do contato. A presente análise indicou também que ela pode ser considerada uma boa aproximação para problemas de lubrificação em articulações humanas. Análise com fluidos que obedecem a lei da potência (*power law model*), foi também estudada por DIEN e ELROD (1983). Eles usaram o método da perturbação regular e obtiveram uma forma modificada da equação de Reynolds. Dados para desempenho de mancais radiais, quais sejam, perfis de velocidade e pressão, espessura da película de fluido, fluxo de massa, ângulo de atitude e número de *Sommerfeld*, são também apresentados para uma faixa de valores de razão de aspecto (*L/D*) e índices da lei da potência.

A lubrificação hidrodinâmica em mancais radiais em um regime superlaminar, isto é, um regime de transição ou turbulento, foi investigada por RUSSO *et al.* (1983). Eles obtiveram resultados resolvendo uma equação de Reynolds bidimensional adequadamente modificada na forma de diagramas operacionais, os quais permite o correto projeto de mancais radiais em reais condições de escoamento. Concluíram, também, que uma verificação cuidadosa dos diagramas confirma que a capacidade de carga e o coeficiente de atrito alcançam valores mais altos em regime não laminar e que

o parâmetro razão de folga “ $r/c$ ” mostra uma influência considerável no comportamento de mancais para valores de número de Reynolds intermediário.

NOWAK e WIERZCHOLSKI (1984) estudaram a teoria hidrodinâmica da lubrificação para fluidos que obedecem a lei da potência (*power law*). Eles abordaram o escoamento isotérmico do lubrificante através da abertura de um mancal cônico. Primeiramente, eles obtiveram uma equação geral em coordenadas curvilíneas que descrevem os escoamentos nas aberturas dos mancais. Depois, como um caso especial, um mancal com abertura cônica é considerado. Resultados analíticos para distribuição da pressão e temperatura foram estabelecidos para mancal cônico de largura finita, além da razão entre as capacidades de carga para lubrificante não-newtoniano e newtoniano.

BUCKHOLZ (1986) investigou os efeitos de lubrificantes que obedecem a lei da potência sobre a capacidade de carga e a força de atrito em mancais de deslizamento planos. As hipóteses assumidas foram: fina camada de fluido, sem efeitos térmicos, e uma equação modificada de Reynolds para pequenas razões de aspectos do mancal. Os resultados obtidos incluíram a distribuição da pressão, a capacidade de carga e força cisalhante, para as razões de aspecto do mancal variando de 0,1 a 0,6, razões de abertura de 1,2 a 4,0 e índice de comportamento reológico do fluido, no modelo da lei da potência, de 0,4 a 1,0. Na solução são utilizados ao método *Euler-Lagrange* e o método das diferenças finitas e os resultados foram comparados e não apresentaram uma boa concordância. Eles concluíram também que a força cisalhante diminui com aumento da razão de folga do mancal e com índice de comportamento reológico do fluido.

Um procedimento para resolver as equações de Navier-Stokes para escoamento estacionário, tridimensional de um fluido não-newtoniano dentro de um mancal radial hidrodinâmico de largura finita foi descrito por WILLIAMS *et al.* (1987). Eles usaram uma aproximação em diferenças finitas, junto com o algoritmo SIMPLE. O conceito de ‘viscosidade efetiva’, para descrever a dependência não linear da tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento, é usada para predizer o desempenho de mancais que tem uma única abertura de entrada na largura axial situada à posição de máxima espessura de filme. Eles obtiveram resultados para uma gama de fatores de não-linearidade, e concluíram que a distribuição de pressão, ângulo de ação, taxa de vazamento, força de cisalhamento e capacidade de carga podem ser preditos para uma variedade de fluidos não-newtoniano.

Soluções adiabáticas são apresentadas, para um mancal de largura finita, hidrodinâmico, desalinhado e com lubrificante não-newtoniano tipo lei da potência, por JANG e CHANG (1987). A viscosidade do fluido foi considerada como uma função

exponencial da temperatura. As características de desempenho são obtidas para vários valores do índice da lei da potência, na faixa de 0,4 a 1,2, razão de excentricidade, na faixa de 0,2 a 0,8, e ângulos de desalinhamento de 0,0001 e 0,0002 radianos. Os resultados, para soluções adiabáticas, mostraram que a capacidade de carga é reduzida consideravelmente quando comparada com as soluções isotérmicas. Concluíram também, que os efeitos térmicos são mais acentuados para valores maiores do índice de comportamento do fluido, altas razões de excentricidade e grandes ângulos de desalinhamento. Os autores, em 1988, também investigaram o mesmo problema, porém não foi considerado o desalinhamento. Os resultados numéricos indicaram também que para índices de comportamento reológico do fluido  $n > 1$  (dilatantes), a capacidade de carga, a temperatura máxima e força de atrito podem aumentar consideravelmente, enquanto que para  $n < 1$  (pseudoplásticos), todas estas características diminuem. Concluíram também que a capacidade de carga em soluções adiabáticas reduzem a um terço, quando comparadas com soluções isotérmicas. Resultados semelhantes foram também obtidos por JU e WENG (1994).

Cargas máximas unidimensionais de mancal de deslizamento *Rayleigh* operando com fluido que obedece a lei da potência foram determinadas por JIANMING e GAOBING (1989). Na solução eles usaram a teoria da perturbação regular (uma expansão de primeira-ordem). Os resultados dos cálculos mostraram que o método de aproximação é válido, com erro máximo não excedendo 10%, sobre uma larga faixa de índice de comportamento reológico. Concluíram, também, que o índice de comportamento reológico, tem uma influência importante sobre a carga, e que essa capacidade de carga adimensional aumentou com o aumento no índice, enquanto o efeito do termo *Poiseuille* (responsável pelo movimento do fluido devido o gradiente de pressão) sobre escoamento é reduzido simultaneamente. Portanto, para a mesma faixa de gradiente de pressão, a solução aproximada é mais “precisa” para  $n > 1$  do que para  $n < 1$ , dentro do mesmo limite de acuracidade. Concluíram ainda, que o método da perturbação regular, adotado para otimização de projetos de mancais, apresentado neste trabalho, não se restringe somente a mancais de deslizamento *Rayleigh*, podendo ser aplicado em outros modelos não-newtonianos, bem como em muitos problemas práticos em engenharia.

SHARMA *et al.* (1991) apresentaram uma solução para equação de Reynolds com fluido não-newtoniano em um mancal radial considerando condições de fronteira móvel. Eles consideraram um mancal com largura finita e condições de contorno de Reynolds na saída. Na solução das equações não lineares utilizaram o método das diferenças finitas,

bisseção e método de Newton modificado. Concluíram que o método de solução é muito mais preciso que outros métodos convencionais e que os resultados indicaram que o comportamento não-newtoniano do lubrificante tem efeito benéfico, no caso de mancais relativamente curtos, pois para valores de razão de excentricidade maiores ( $\varepsilon=0.8$ ) o comportamento não-newtoniano diminui a capacidade de carga, considerando as razões de aspectos  $L/B=1$  e  $2$ .

Uma teoria para fluidos que segue a lei da potência foi também desenvolvida e analisada por JOHNSON JR. e MANGKOESOE BROTO (1993). Eles consideraram mancal com largura infinita e escoamento entre paredes rígidas de forma arbitrária, sob movimento combinado de *Couette* e esmagamento (*squeeze*) com um gradiente de pressão. Equações para uma fina camada de fluido foram derivadas pela integração assintótica das equações tridimensionais da mecânica dos fluidos. A integração destas equações resultou em equações algébricas para o gradiente de pressão. Para confirmar a teoria, eles usaram para o cálculo da distribuição da pressão um mancal de deslizamento, e os resultados para o gradiente de pressão e perfil de velocidade, em função do fluxo de massa, foram comparados com resultados obtidos por DIEN e ELROD (1983) e tiveram boa concordância, para os valores do índice da lei da potência  $n$  iguais a  $1/2$ ,  $1/3$  e  $1$ .

O desempenho estático de mancais radiais finitos, lubrificadas com fluidos não-newtonianos e que obedecem a lei da potência foi analisado pelo método dos volumes finitos por LI *et al.* (1996) com o algoritmo de ELROD (1981). Os resultados mostraram que o índice de comportamento reológico “ $n$ ” destes fluidos tem um efeito insignificante sobre as razões de carga (*carga pela rugosidade*), razões de escoamento lateral (*escoamento lateral pela rugosidade*) e regiões de cavitação, enquanto que este efeito é significativo na capacidade de carga e nas taxas de escoamento lateral. Adicionalmente, eles também discutiram os efeitos das razões de espessura do filme, dos fatores de fluxo de pressão, dos fatores de escoamento cisalhante, das razões de aspecto ( $L/d$ ), da excentricidade, da orientação da rugosidade e das pressões de entrada, sobre variações de regiões de cavitação.

O desempenho de um mancal radial considerando o efeito do *couple stress* e a deformação elástica foi analisada por MOKHIAMER *et al.* (1999). Eles resolveram a equação de Reynolds numericamente usando o método de diferenças finitas e concluíram que a influência do *couple stress* nas características do mancal é significativa. Estes fluidos quando comparados com lubrificantes newtonianos, produzem um aumento na

capacidade de carga, uma redução no ângulo de atitude, no fator de atrito e na taxa de vazamento lateral.

RAGHUNANDANA e MAJUMDAR (1999) investigaram os efeitos dos lubrificantes não-newtonianos, que obedecem a lei da potência, sobre mancais radiais hidrodinâmicos. Nesta investigação eles levaram em consideração o modelo de lubrificante não-newtoniano desenvolvido pelo DIEN e ELROD (1983), e a partir desta avaliaram o parâmetro de massa (*uma medida de estabilidade*) e as características em estado estacionário de mancais radiais finitos. Uma análise transiente não linear foi conduzida para avaliação da estabilidade. As principais conclusões foram: melhorias na estabilidade com lubrificantes não-newtonianos que tem altos índices de comportamento reológico, portanto um mancal com lubrificante newtoniano ( $n=1$ ) tem estabilidade máxima, quando comparados com pseudoplásticos ( $n<1$ ); a estabilidade aumenta nitidamente para mancais carregados pesadamente (em  $\varepsilon > 0.6$ ); e um mancal curto ( $L/D < 1$ ) apresenta altas características de estabilidade, e o mesmo ocorre para mancais usando lubrificante newtonianos.

SHARMA *et al.* (2000) apresentaram um estudo teórico sobre os efeitos do comportamento não linear de lubrificantes sobre o desempenho de um mancal radial fresado. A análise considerou a equação Reynolds generalizada que governa o escoamento do lubrificante dentro da folga e as equações tridimensionais da elasticidade que governa o campo de descolamento no mancal, e a equação do escoamento de lubrificante através do espaço fresado. O lubrificante não-newtoniano estudado segue a lei cúbica da tensão cisalhante ( $\bar{\tau} + \bar{K}\bar{\tau}^3 = \bar{\gamma}$ ). As características de desempenho do mancal foram apresentadas para valores selecionados dos fatores de não linearidade ( $\bar{K}$ ) e do coeficiente de deformação ( $\bar{C}_d$ ). Os resultados mostraram que os efeitos combinados do fator de não linearidade ( $\bar{K}$ ) e da flexibilidade do mancal ( $\bar{C}_d$ ) são bastante significantes nas características de desempenho de mancais radiais fresados.

Uma análise termohidrodinâmica de mancais radiais considerando os efeitos de *couple stress* em lubrificantes misturados com aditivos de polímeros foi apresentada por WANG *et al.* (2001). Os autores desenvolveram uma equação de energia modificada e então resolveram-na simultaneamente com a equação da transferência de calor, bem como a equação de Reynolds modificada. Eles apresentaram os efeitos de *couple stress* no desempenho de um mancal radial finito através da temperatura máxima, temperatura do eixo, capacidade de carga, força de atrito, coeficiente de atrito e escoamento axial. Os

resultados para lubrificantes com *couple stress*, comparados com lubrificantes newtonianos, não só produziram um aumento na capacidade de carga e uma óbvia diminuição no coeficiente de atrito, mas também produziram um baixo campo de temperatura no mancal. Com isso, concluíram que lubrificante com *couple stress* melhora o desempenho de mancais radiais.

CHUN (2002) estudou a influência de óleos aerados sobre mancais radiais em alta velocidade pela teoria da lubrificação termohidrodinâmica clássica acoplada com os modelos analíticos, para viscosidade e densidade nas misturas óleo-ar na película de fluido. Ele considerou nesse estudo convecção nas paredes, mistura no fornecimento e na recirculação de óleo e algum grau de desalinhamento no mancal. Os parâmetros para estudo da lubrificação espumante (*bubbly lubrication*) considerados foram: o nível de aeração do óleo, os tamanhos das bolhas de ar, o desalinhamento e a velocidade do eixo. Os resultados mostraram que a capacidade de carga pode ser aumentada com o aumento do nível de aeração e a redução do tamanho das bolhas. Por outro lado, a redução do nível de aeração e aumento do tamanho da bolha, a capacidade de carga do mancal pode ser reduzida somente uma pequena quantidade devido ao efeito de temperatura envolvido.

A teoria de lubrificação micropolar para um problema em estado estacionário de mancais radiais hidrodinâmicos foi investigado por CHATTOPADHYAY *et al.* (2002), estes consideram dois tipos de desalinhamento: vertical e horizontal. Aplicando o método de diferenças finitas a equação de Reynolds modificada foi resolvida e os campos de pressões no filme foram obtidos. Eles concluíram que lubrificantes micropolares quando comparados com fluidos newtonianos, sob a condição de desalinhamento, exibem uma capacidade de carga melhor e o momento de desalinhamento é maior, e apresentam um efeito benéfico dentro do parâmetro de atrito.

BALUPARI (2004) apresentou um estudo sobre um sistema que prediz características estáticas e dinâmicas para mancais radiais. A capacidade para computar as características dinâmicas para mancais hidrodinâmicos foi adicionada em um sistema para projeto de mancais (*Bearing Design System – BRGDS*), um programa em elementos finitos desenvolvido por STEPHENSON (1997), e os resultados obtidos foram validados. Neste *software*, uma implementação padrão em elementos finitos da equação de Reynolds foi usada para modelar a região de escoamento no mancal com graus de liberdade de pressão. As hipóteses assumidas foram, fluido incompressível, viscosidade constante e termos de inércia negligenciados. A equação da pressão é integrada para dar a carga no

mancal, sendo que as características de rigidez e amortecimento foram calculadas por um método de perturbação.

LIN *et al.* (2006) investigaram as características estáticas e dinâmicas de um mancal deslizante finito, lubrificado com um fluido não-newtoniano que obedece a lei da potência. Os efeitos reológicos para escoamento laminar, incompressível, isotérmico e isentos da inércia do fluido e da cavitação são apresentados. A equação de Reynolds para fluido não-newtoniano incluindo o efeito de “esmagamento” (*squeeze effect*) foi obtida, levando em conta o movimento que a base sofre, descrevendo uma oscilação de pequena-amplitude na direção perpendicular ao eixo  $z$ . Usando o método de perturbação, ambas equações de Reynolds para estado estacionário e dinâmico foram analisadas. Eles concluíram que os efeitos do lubrificante não-newtoniano sobre a performance estática e características dinâmicas do mancal dependem principalmente do parâmetro de borda, da razão de aspecto do mancal deslizante plano e do índice de comportamento reológico do fluido “ $n$ ”. Concluíram ainda, que os efeitos do índice de comportamento reológico sobre as características do mancal são mais acentuados para grandes razões de aspecto e quando  $n=1$ , fluido newtoniano, os resultados deste estudo apresentam uma boa concordância com resultados obtidos por TAYLOR e DOWSON (1974).

RAGHUNANDANA (2007) apresentou uma metodologia de projeto inverso para avaliar a estabilidade de mancais elípticos operando com lubrificantes não-newtonianos que obedecem a lei da potência. A equação de Reynolds generalizada, contendo viscosidade, densidade, espessura do filme, movimento da superfície e tempo como parâmetros foi resolvida utilizando o método das diferenças finitas. Um banco de dados foi gerado para capacidade de carga adimensional em termos do número de *Sommerfeld*, força de atrito e escoamentos em diferentes excentricidades. Um estudo teórico sobre o efeito da temperatura e variação da viscosidade também foi feito. Este estudo produziu resultados para diferentes razões de  $L/D$  e de excentricidade na forma de equações empíricas. A partir dos resultados para estado estacionário e das curvas ajustadas um procedimento de projeto auxiliado por computador foi gerado. Finalmente, foi garantido que mancal projetado operasse estavelmente. Ele concluiu também que os efeitos não-newtoniano influenciam consideravelmente na performance de mancais elípticos (dois ressaltos), em termos de capacidade de carga, ângulo de atitude, escoamento e coeficiente de atrito. O autor lembra que o exemplo de projeto de estudo neste trabalho é, para um dado óleo, propriedades do material e temperatura de entrada, mas que esta metodologia de projeto inverso pode ser usada por qualquer projetista, podendo este gerar dados

similares e obter relações empíricas para carga, coeficiente de atrito, taxa de escoamento e estabilidade operando em diferentes condições, como propriedades do óleo e material.

Um modelo tridimensional para termohidrodinâmica foi desenvolvido para prever o comportamento de lubrificantes não-newtonianos em mancais de deslizamento e fluxo no canal por EL KHLIFI *et al.* (2007). A equação de Reynolds generalizada foi estabelecida usando o conceito de fluidos newtonianos e o campo de temperatura foi determinado pela equação da energia. Os modelos reológicos escolhidos foram da lei da potência, *Bingham e Hershel-Bulkley*. Os resultados apresentados foram para campo de velocidade, pressão e temperatura. A perda de potência, capacidade de carga e coeficiente de atrito foram analisados. Comparações foram feitas com lubrificantes newtonianos e outras análises computacionais recentes para não-newtonianos. Eles concluíram que lubrificantes não-newtonianos diminuem a temperatura máxima, o coeficiente de atrito e a perda de potência com aumento da razão de altura do filme (entrada-saída), mas conduzem ao aumento da capacidade de carga.

GERTZOS *et al.* (2008) realizaram uma análise via dinâmica dos fluidos computacional da lubrificação hidrodinâmica de mancais radiais operando com lubrificante tipo *Bingham*. As características de desempenho foram derivadas por meio de uma análise tridimensional via dinâmica dos fluidos computacional (*3D-CFD*). O software *FLUENT* foi usado para calcular o balanço hidrodinâmico no mancal usando a técnica chamada “malha dinâmica”. A excentricidade relativa, ângulo de atitude, distribuição de pressão, coeficiente de atrito, taxa de escoamento do lubrificante, e o ângulo de máxima pressão, que são características de desempenho dos mancais radiais foram derivadas e apresentadas para várias razões de aspectos ( $L/D$ ) e números de cisalhamento adimensional  $T_0$  do fluido de *Bingham*. Os resultados obtidos pelo modelo apresentaram uma ótima concordância com dados analíticos e experimentais de trabalhos publicados.

KANGO e SHARMA (2010) apresentaram um estudo sobre a influência da rugosidade na performance de mancais radiais hidrodinâmicos usando fluidos que obedecem a lei da potência. A equação de Reynolds modificada é resolvida pelo método das diferenças finitas. Eles concluíram que a capacidade de carga e a força de atrito aumentam com índice de comportamento reológico do fluido para ambos mancais liso (sem rugosidade) e rugoso. Concluíram também que das três rugosidades consideradas, a rugosidade transversal tipo “onda completa” positiva aumenta a capacidade de carga e a força de atrito, porém a rugosidade longitudinal tipo “senoidal” diminui a força de atrito.

Mancais radiais com magneto fluido podem ser controlados por um campo magnético estável garantindo uma efetiva atenuação e controle da performance do sistema mancal rotor. Um estudo de simulação integrada, de um mancal radial com magneto fluido, via dinâmica dos fluidos computacional e método dos elementos finitos, foi apresentado por BOMPOS e NIKOLAKOPOULOS (2011). As características dos mancais radiais como excentricidade, ângulo de atitude, escoamento de óleo e coeficientes de atrito foram calculados e apresentados como funções do campo magnético, e razões de aspecto do mancal ( $L/D$ ). Eles concluíram que, em comparação com mancais normais (sem campo magnético), a presença do campo magnético pode ser vantajosa para as características do mancal, já que a capacidade de carga aumentou com um incremento do campo de magnético, porém o mesmo não ocorre com o coeficiente de atrito. Eles alertam, também, para o aumento nos custos com energia no uso do campo magnético, o que ocorre com aumento do coeficiente de atrito e com a energia necessária para manter o campo magnético desejado.

Os efeitos de uma área rugosa sobre a performance de mancais radiais hidrodinâmicos foram analisados por TALA-IGHIL *et al.* (2011). O uso superfícies rugosas com diferentes tipos de micro cavidades e em diferentes localizações da zona de textura melhoram o desempenho de mancais. Uma modelagem numérica foi utilizada pelos autores para analisar o efeito de uma textura na forma cilíndrica sobre características de um mancal radial hidrodinâmico. Eles concluíram que maioria dos parâmetros importantes podem melhorar através de arranjo apropriado das áreas texturadas sobre a superfície de contato.

LIN *et al.* (2012) investigaram a influência não-newtoniana de fluidos micropolares sobre as características de rigidez e amortecimento de mancais de deslizamento com filme na forma parabólica. Uma equação de *Reynolds* para fluido micropolar foi derivada e sua solução aproximada para o desempenho do mancal foi obtida aplicando a teoria linear na equação da força hidrodinâmica no filme. A principal conclusão que apresentaram, foi que os efeitos não-newtonianos de fluidos micropolares produzem altas capacidades de carga e altos coeficientes de amortecimento quando comparado com fluidos newtonianos, e que essa melhoria no desempenho foi enfatizada, especialmente, para o mancal com altura de filme menor e valores maiores do parâmetro de interação folga-fluido e o parâmetro de acoplamento.

SANTOS *et al.* (2012) investigaram a lubrificação hidrodinâmica de mancais radiais utilizando a transformada integral. A equação de Reynolds foi tratada para se obter

uma solução híbrida numérica-analítica, através da Técnica da Transformada Integral Generalizada (*GITT*), para o problema. Uma análise paramétrica foi feita para investigar a influência dos parâmetros governantes típicos na solução física. Resultados numéricos para os parâmetros de engenharia como campo de pressão, coeficiente de atrito, taxa de escoamento axial e capacidade de carga adimensionais foram produzidos como funções desses parâmetros. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados disponíveis na literatura e apresentaram uma excelente concordância, demonstrando com isso a consistência e a capacidade da *GITT* no manuseio e solução de problemas que envolvem mancais radiais, concluíram os autores.

NESSIL *et al.* (2013) efetuaram uma análise sobre mancais radiais lubrificado com fluidos não-newtonianos descritos pelo modelo da lei da potência. As características de desempenho dos mancais radiais foram determinadas para vários valores de índice comportamento reológico, quais sejam,  $0.9$ ,  $1$ , e  $1.1$ . Resultados numéricos obtidos mostraram que para os fluidos dilatantes ( $n > 1$ ), a capacidade de carga, a pressão, a temperatura e a força de atrito aumentam, enquanto para os fluidos pseudoplásticos ( $n < 1$ ), estes parâmetros diminuem. Eles concluíram que a influência dos efeitos térmicos sobre as características de desempenho é importante em altos valores do índice de comportamento reológico. Os resultados obtidos por eles foram comparados com os de outros autores e uma boa concordância é observada.

A técnica da perturbação regular foi utilizada para derivar a equação de Reynolds modificada aplicável a mancais de deslizamento usando lubrificantes que obedecem a lei da potência por CHU *et al.* (2014). As características de desempenho incluindo distribuição da pressão, distribuição da velocidade, espessura do filme, capacidade de carga, força cisalhante e coeficiente de atrito foram também derivadas analiticamente para vários  $\zeta$ , índice de comportamento reológico e espessura do filme na saída ( $H_0$ ). Eles observam que na solução analítica pode-se encontrar mais claramente os efeitos dos parâmetros de operação que nas soluções por métodos numéricos e que outros pesquisadores podem utilizar as equações derivadas por eles na análise de mancais de deslizamento com lubrificantes que obedecem a lei da potência.

BLANCO *et al.* (2014) analisaram mancais axiais, usados em refrigeradores domésticos. A equação de Reynolds modificada, que inclui termos inerciais, foi resolvida por volume finitos e resultados para campo de pressão, carga e energia foram obtidos. A otimização se deu através do método dos multiplicadores de Lagrange, objetivando suportar uma determinada carga usando a menor quantidade de energia possível.

## 2.3 - CONSIDERAÇÕES REOLÓGICAS

O tipo de fluido mais comum é classificado como fluido viscoso, no qual a tensão de cisalhamento depende da taxa de deformação. Quando esta relação é linear o fluido é chamado newtoniano e a constante de proporcionalidade é conhecida como viscosidade. Para escoamentos lineares de um fluido incompressível TRUESDELL e NOLL (1965) a função viscosidade pode ser escrita como:

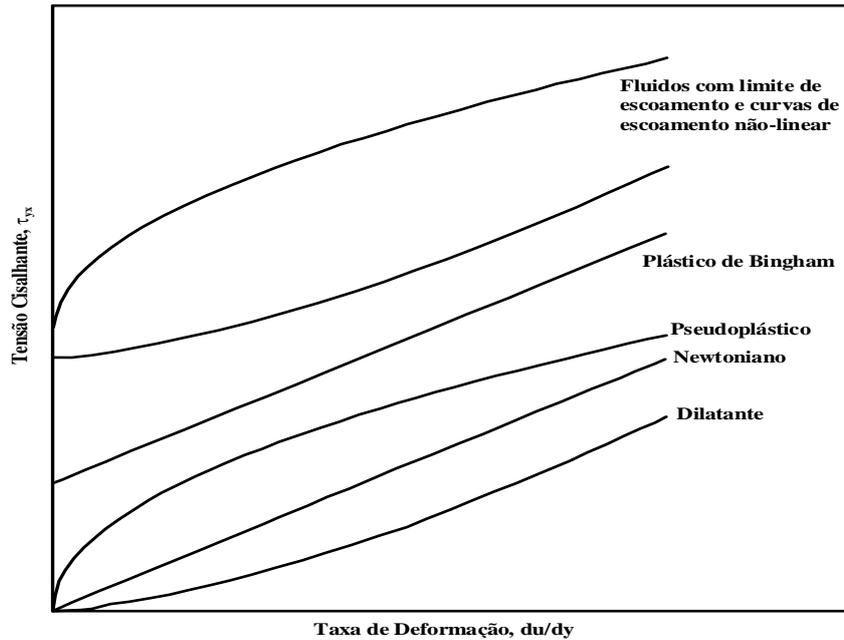
$$\mu(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \tau(\gamma) \quad (2.4)$$

Sendo,

$$\gamma = \frac{du}{dy} \quad (2.5)$$

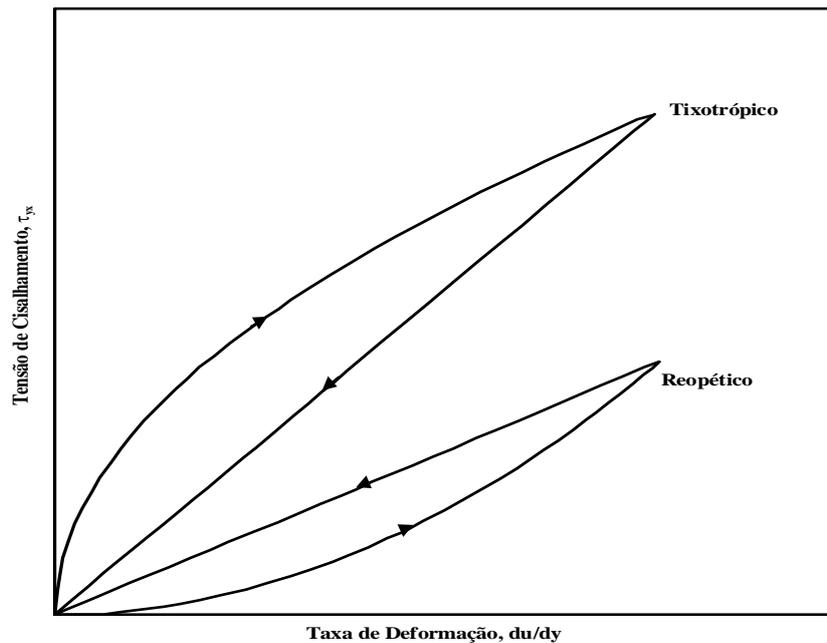
Para fluidos newtonianos  $\mu(\gamma)$  é constante numa dada temperatura e pressão. Todos os demais fluidos, para os quais a curva da tensão de cisalhamento *versus* a taxa de deformação ( $\tau_{yx}$  *versus*  $\gamma$ ) não é linear a uma dada temperatura e pressão, são chamados de não-newtonianos. Estes fluidos são comumente divididos em quatro grupos distintos METZNER (1965) e YOO (1974).

**2.3.1. Fluidos independentes do tempo:** São aqueles que para uma dada temperatura e pressão, a tensão de cisalhamento num dado ponto do material é função da taxa de deformação instantânea naquele ponto. O tensor tensão é completamente independente do tempo e da história da deformação. Estes materiais são algumas vezes chamados de fluidos não-newtonianos puramente viscosos. Fluidos dilatantes, pseudoplásticos, plásticos de Bingham e fluidos que possuem limite de escoamento e curva da tensão de cisalhamento *versus* taxa de deformação não-linear pertencem a este grupo. Para fluidos dilatantes a viscosidade aparente, Eq. (2.4), aumenta com o aumento da taxa de deformação, enquanto que para fluidos pseudoplásticos a viscosidade aparente diminui com o aumento da taxa de deformação. Se a viscosidade aparente é independente da taxa de deformação, o comportamento é newtoniano. Um plástico de Bingham é identificado como um fluido que possui uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, mas possui um limite de escoamento antes do escoamento se iniciar. Alguns fluidos independentes do tempo possuem um limite de escoamento e uma relação não-linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação MAGNO (1998). As curvas típicas para estes fluidos são mostradas na Figura 2.4.



**Figura 2.4.** Reograma característicos de fluidos independentes do tempo (MAGNO,1998).

**2.3.2. Fluidos dependentes do tempo:** São aqueles nos quais os componentes do tensor tensão são funções da magnitude e do período de duração da taxa de deformação a pressão e temperatura constantes. Estes fluidos são geralmente classificados em dois grupos: tixotrópicos e reopéticos, dependendo se a tensão de cisalhamento diminui ou aumenta com o tempo para uma dada taxa de deformação, a pressão e temperatura constantes. A Figura 2.5 mostra o comportamento destes fluidos. Fluidos dependentes do tempo são frequentemente tratados como fluidos não-newtonianos “puramente viscosos” como uma boa aproximação (METZNER, 1965); isto é especialmente verdade para o caso onde o fluido é bombeado através de uma tubulação na qual o mesmo é vigorosamente cisalhado antes de entrar em uma determinada parte do equipamento onde está sendo processado (YOO, 1974).



**Figura 2.5.** Reograma característicos para fluidos dependentes do tempo (MAGNO,1998).

**2.3.3. Fluidos viscoelásticos:** Estes fluidos são aqueles onde os componentes do tensor tensão em um determinado instante dependem da história da deformação. Tais fluidos possuem propriedades que são características tanto de fluidos viscosos e sólidos elásticos. Sistemas viscoelásticos desenvolvem tensões normais ou elásticas pronunciadas em condições de escoamento cisalhante laminar no estado estacionário. As propriedades reológicas de materiais viscoelásticos em um determinado instante pode ser uma função da história passada do material, por isto não pode ser descrita apenas por uma relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, porém pode requerer a inclusão de derivadas no tempo destas quantidades MAGNO (1998).

**2.3.4. Fluidos complexos:** São aqueles para os quais o tensor tensão num ponto do material num certo instante não pode ser descrito por uma das abordagens citadas anteriormente. Um cristal fluido TRUESDELL e NOLL (1965) é um exemplo de um fluido muito complexo. Exemplos de fluidos pertencentes a cada categoria pode ser encontrada em METZNER (1965) e SKELLAND (1967). Muitos fluidos não-newtonianos de interesse em aplicações de engenharia são aqueles pertencentes aos chamados fluidos não-newtonianos “puramente viscosos” e viscoelásticos. Na realidade estas classificações são muitas vezes indistintas e não podem ser exatamente definidas.

## 2.4 - A TEORIA DA LUBRIFICAÇÃO HIDRODINÂMICA

Historicamente, segundo CAMERON (1966), foi a partir de fabricação de partes metálicas de máquinas durante a revolução industrial e o aumento das velocidades rotacionais, que a lubrificação hidrodinâmica tornou-se o tipo normal de lubrificação e começou, então, a ser amplamente estudada.

Os estudos experimentais de *Beauchamp Tower*, em 1882, enfatizando pela primeira vez a existência de uma pressão hidrodinâmica no filme lubrificante de um mancal, serviram de base para a execução da teoria da lubrificação. Foi Osborne Reynolds, segundo FRÊNE *et al.* (1989), que, em um artigo publicado em 1886, estabeleceu os fundamentos da teoria da lubrificação hidrodinâmica moderna para explicar os resultados experimentais de *Tower*. A Eq. (2.3), apresentada na seção 2.1, é conhecida desde então, sob o nome da equação de *Reynolds*. As hipóteses básicas da lubrificação hidrodinâmica, adotadas por *Reynolds*, foram: a espessura da película de lubrificante é pequena quando comparada a outras dimensões; o fluxo é laminar; o lubrificante obedece à lei de *Newton*, a sua viscosidade é constante e incompressível; as forças de campo, bem como as forças de inércia são negligenciadas; a curvatura geral do filme é negligenciada; a componente de velocidade do fluido na direção perpendicular à película, é pequena quando comparada com as outras componentes ( $v \ll u, w$ ); e os gradientes de velocidade sobre a espessura de filme são preponderantes.

A lubrificação hidrodinâmica é aquela em que superfícies com movimento relativo são separadas por um filme fluido contínuo, este pode ser líquido, vapor ou gás, geralmente ar. Nesses sistemas origina-se uma pressão no filme fluido que resistir aos efeitos das cargas aplicadas. Esta pressão de sustentação é originada pelo efeito do movimento relativo das superfícies, efeito cunha dos mancais fluido dinâmicos, ou por uma bomba externa, neste caso, originando os mancais fluido estáticos. A ação hidrodinâmica é mais dependente da viscosidade do fluido do que a ação hidrostática. Em ambos os casos, uma ampla gama de fluidos como água, óleos, ar, ou mesmo metais líquidos em reatores nucleares, tem sido utilizada com sucesso. Portanto, a finalidade da lubrificação é separar duas superfícies que deslizam uma sobre a outra pela interposição de uma película de algum material que possa ser cisalhado sem causar qualquer dano às superfícies. O processo de deslizamento ocasionará uma pequena resistência de atrito.

Para SANTOS (2004), que estudou mancal radial hidrodinâmico lubrificado com fluidos newtonianos, a análise do mancal radial é provavelmente a mais importante parte da teoria hidrodinâmica clássica da lubrificação e também a mais difícil e complexa.

A película de óleo é expressa em termos da coordenada na direção do movimento (coordenada  $x$ ), e esta permite que a equação de Reynolds ser integrada para obter o campo de pressão, uma vez que as condições de contorno são definidas sobre a superfície, obtendo-se então os “parâmetros dependentes” resultantes.

A lubrificação hidrodinâmica requer, basicamente, três aspectos:

1. Movimento relativo das superfícies a serem separadas;
2. A ação de cunha, providenciada pela excentricidade do mancal e
3. A presença de um fluido adequado.

## 2.5 - TEORIA DA PERTURBAÇÃO REGULAR

A teoria de perturbação é uma coleção de métodos iterativos para a obtenção de soluções aproximadas de problemas que envolvem um pequeno parâmetro,  $\sigma \ll 1$ , também chamado de parâmetro de perturbação. De modo genérico a teoria de perturbação realiza uma decomposição de um problema em um número infinito de problemas relativamente mais fáceis de se obter a solução. As potencialidades desta teoria residem no fato de que, em geral, os primeiros termos das séries de solução, são suficientes para revelar características importantes da solução de um problema, ROSA (2009). Basicamente, a teoria da perturbação divide-se em duas categorias, quais sejam, a perturbação regular e a perturbação singular.

Uma das grandes potencialidades, também, deste método da perturbação regular, consiste na sua capacidade de abordar equações diferenciais não lineares através de uma sucessão de equações, usualmente lineares, mais simples de resolver, porém na aplicação deste método é necessário que todas as condições de contorno sejam satisfeitas e a série seja convergente em todo domínio NAYFEH (1973).

Basicamente a teoria da perturbação regular consiste nas seguintes etapas para solução:

1. Assumir que a solução do problema original pode ser expandida em uma série de Taylor, em termos de um parâmetro pequeno,  $\sigma$  ;
2. Substituir a série na equação diferencial do problema e nas condições de contorno, e depois isolar os termos de mesma potência de  $\sigma$  ;
3. Igualar a zero os termos sucessivos da série de mesma potência de  $\sigma$  ;
4. Resolver sucessivamente a sequência de equações obtidas no passo 3, para se obter a solução do problema.

## 2.6 - A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

A bem estabelecida Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é um método de origens analíticas, derivado, em sua base formal, do método da transformada integral clássica compilado na literatura (MIKHAILOV e ÖZISIK,1984), onde a idéia básica existente por trás desta técnica consiste em transformar a equação diferencial parcial original e um sistema acoplado infinito de equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem, que pode ser prontamente resolvido. Ao longo das duas últimas décadas, após o trabalho pioneiro de ÖZISIK e MURRAY (1974), esse enfoque foi amplamente estendido para permitir soluções analíticas aproximadas em uma vasta gama de problemas não transformáveis.

Esse enfoque ganhou uma estrutura híbrida numérico-analítica, oferecendo ao usuário precisão controlada e uma performance computacional bastante eficiente para uma grande variedade de problemas, os quais são classificados e sistematicamente apresentados com diversas aplicações COTTA (1993), incluindo formulações não lineares de interesse em aplicações de transferência de calor e escoamento de fluidos. Entre os vários tipos de extensões discutidas por COTTA (1993), pode-se citar problemas com coeficientes variáveis na equação e condições de contorno, problemas com contornos móveis, geometrias irregulares não transformáveis, problemas de autovalor auxiliares difíceis, problemas acoplados, problemas de difusão e convecção-difusão não lineares, formulações em termos das equações da camada limite e das equações de Navier-Stokes.

Esse método computacional alternativo é particularmente bem indicado para obtenção de resultados de referência em vista da sua característica de controle automático de erro, ao reter as mesmas características de uma solução puramente analítica. Em adição ao fácil controle e estimativa de erro, um excelente aspecto do método é a sua extensão direta a problemas multidimensionais, com um aumento moderado no esforço computacional, com relação as aplicações unidimensionais. Novamente, a natureza híbrida é responsável por esse comportamento, uma vez que a etapa analítica no procedimento de solução é empregada sobre todas menos uma variável independente, e a tarefa numérica é sempre reduzida à integração de um sistema diferencial ordinário em apenas uma coordenada.

A ideia básica da GITT é relaxar a necessidade de se encontrar uma transformação integral exata do problema. Assim, pode-se então escolher um problema de autovalor auxiliar que seja o mais característico possível do problema original. Em seguida é

desenvolvido o par transformada-inversa, consequência direta da ortogonalidade que as autofunções oriundas do problema auxiliar possuem. Finalmente é efetuada a transformação integral do problema diferencial parcial, originando um sistema diferencial ordinário acoplado e infinito. Trunca-se, então, numa ordem suficientemente grande para a precisão requerida, automaticamente selecionada durante o processo de solução, onde o sistema diferencial ordinário é solucionado numericamente por algoritmos bem estabelecidos com controle automático de erro, disponíveis em subrotinas científicas, como a biblioteca do IMSL (2014).

É empregada a fórmula de inversão para fornecer a representação analítica do potencial original nas demais variáveis independentes, eliminadas no processo de transformação do problema. Estas etapas podem ser resumidas como segue:

1. Definição do problema auxiliar, com base nos termos difusivos da formulação original;
2. Solução do problema auxiliar e obtenção das autofunções, autovalores, normas e propriedade de ortogonalidade;
3. Desenvolvimento do par transformada-inversa;
4. Transformação integral do problema diferencial parcial num sistema diferencial ordinário acoplado;
5. Truncamento do sistema diferencial ordinário infinito e solução numérica do sistema diferencial resultante para obtenção dos campos transformados;
6. Obtenção do potencial original fazendo-se uso da fórmula de inversão.

A GITT na solução híbrida numérico-analítica das equações de Navier-Stokes, em formulação em termos de função corrente, para um escoamento laminar incompressível de um fluido newtoniano em canal de placas paralelas foi aplicada por PÉREZ GUERREIRO e COTTA (1995). Os resultados foram comparados com outros previamente estabelecidos na literatura demonstrando uma excelente concordância.

A camada limite hidrodinâmica para um fluido não-newtoniano, que segue o modelo da potência para tensão cisalhante, foi estudada na região de entrada de um canal de placas paralelas por MAGNO *et al.* (1999). As soluções híbridas analítica-numérica para os perfis de velocidade em escoamento desenvolvido são obtidos pelo uso da GITT. Resultados de referência foram estabelecidos para os perfis de velocidade com diferentes índices da lei da potência, os quais foram comparados com resultados disponíveis na literatura e demonstraram excelente concordância. Neste problema, os autores aplicaram

uma formulação em função corrente por apresentar uma melhor performance computacional, em termos de taxas de convergência, quando comparados com a versão em variáveis primitivas.

NASCIMENTO (2000) analisou a região de entrada térmica no escoamento laminar de plásticos de Bingham em dutos anulares concêntricos através do método da Transformada Integral Clássica juntamente com o método da contagem de sinais e a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Quatro tipos de condições de contorno térmicas foram adotados na parede interna ou externa do duto, a fim de se verificar os efeitos sobre o campo de temperatura do fluido. Resultados foram tabelados e graficamente apresentados, demonstrando que as técnicas utilizadas foram capazes de resolver com precisão o problema analisado. CHAVES *et al.* (2000) também aplicou a GITT na solução de um escoamento laminar completamente desenvolvido de fluido não-newtoniano tipo lei da potência dentro de dutos retangulares.

NASCIMENTO (2001) estudou a solução das equações de movimento para o escoamento de um fluido power-law em canal de placas paralelas utilizando a GITT. Observou-se que a técnica demonstrou ser uma ferramenta capaz de resolver o problema abordado. Desta forma, a técnica pode ser utilizada para mostrar resultados precisos em problemas de escoamento dentro de canais de placas paralelas, com a característica de controlar o erro global dos campos transformados.

MAGNO *et al.* (2002) aplicaram a técnica da transformada integral generalizada na solução das equações da camada limite em fluxo laminar de fluidos não-newtoniano *power-law* num canal de placas paralelas. Na modelagem das equações do *momentum* e energia na faixa de validade das equações da camada limite, uma formulação em função corrente é aplicada por apresentar uma melhor performance computacional que em variáveis primitivas. Os resultados numéricos para campo de temperatura e números de *Nusselt* são estabelecidos, em diferentes posições axiais ao longo do canal e para vários índices da lei da potência, e estes resultados quando comparados com os disponíveis na literatura apresentaram uma boa concordância. NASCIMENTTO *et al.* (2006) também aplicou a GITT na solução de um escoamento hidrodinamicamente desenvolvido para um fluido não-newtonianos que obedecem a lei da potência em tubos circulares.

MONTEIRO *et al.* (2010) estudou o escoamento laminar e a transferência de calor de fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência em dutos duplamente conectados. A formulação matemática foi construída no sistema de coordenadas cilíndricas, de tal modo que as superfícies sólidas são descritas em termos dos raios

interno e externo como funções da coordenada angular, evitando assim a descontinuidade nas condições de contorno. Os resultados numéricos para o campo de velocidade, o produto do fator de atrito de Fanning e número de Reynolds, campo de temperatura e número de Nusselt foram obtidos para diferentes valores dos parâmetros governantes quais sejam a excentricidade, a relação entre os raios e índices ( $n$ ) da lei da potência.

A GITT também já foi aplicada no estudo de mancais radiais lubrificadas com fluidos newtonianos por SANTOS *et al.* (2012), com já citado anteriormente na subseção 2.2, deste capítulo, e demonstrou ser uma técnica robusta na solução destes tipos de problemas usando fluidos newtonianos.

Como observado anteriormente a técnica da transformada integral generalizada tem sido sucessivamente aplicada na solução relacionada a modelagem matemática de vários problemas no campo da transferência de calor e escoamento de fluidos. No entanto outras aplicações em escoamento com números de Reynolds baixo e moderados, podemos citar os trabalhos de PÉREZ GUERREIRO e COTTA (1996), PÉREZ GUERREIRO *et al.* (2000), CASTELLÕES *et al.* (2010) e SILVA *et al.* (2011).

Melhoria na forma ou procedimento de solução tem sido estabelecida como o trabalho desenvolvido por SPHAIER *et al.* (2011). Os autores desenvolveram o código UNIT (Unified Integral Transforms – Transformada Integral Unificada) que permiti aos usuários menos familiarizados com a GITT empregar a técnica para resolver uma variedade de problemas-diferenciais parciais. Este trabalho consolida esta abordagem na resolução de problemas unidimensionais transitórios gerais. Além de apresentar o algoritmo proposto, também são explorados aspectos relacionados com a implementação computacional. Finalmente, resultados de *benchmark* de diferentes tipos de problemas são calculados no UNIT e são comparados com os resultados obtidos anteriormente.

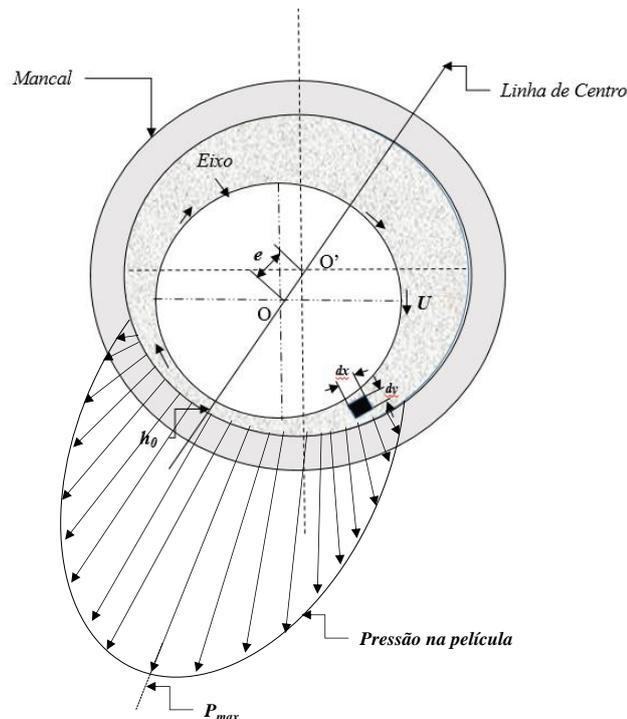
## CAPÍTULO 3

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

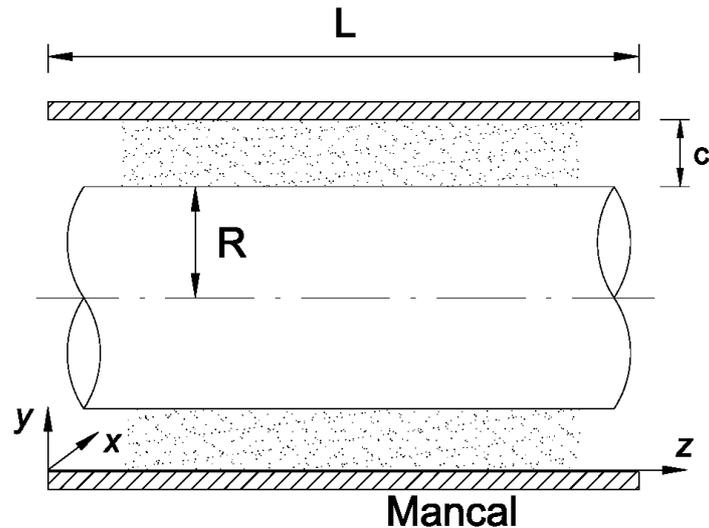
Neste capítulo são apresentadas as equações que regem a teoria da lubrificação hidrodinâmica – equação de Reynolds generalizada, obtidas a partir das equações do movimento, conforme o modelo físico, hipóteses simplificadoras e aplicação da teoria da perturbação regular. Inicialmente estas equações apresentam-se em termos de variáveis primitivas e posteriormente na forma adimensional.

#### 3.1 - MODELO FÍSICO

O modelo físico estudado é representado pela Figura 3.1, assim como as nomenclaturas de alguns termos utilizados para análise do problema. A dimensão “ $c$ ” é a folga radial e é a diferença entre o raio do mancal e o raio do eixo. O centro do eixo está em  $O$  e o centro do mancal em  $O'$ . A distância entre os centros é a excentricidade e é designada por “ $e$ ”. A espessura mínima da película é representada por  $h_0$  e ocorre na linha de centro. A espessura da película em qualquer outro ponto é designada por  $h$ . O sistema de coordenadas adotado para análise foi o sistema cartesiano  $(x, y, z)$  representado na Figura 3.2.

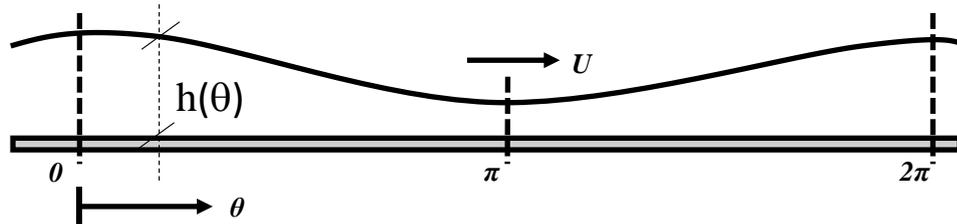


**Figura 3.1.** Representação esquemática e a nomenclatura utilizada em análise de mancais radiais.



**Fig. 3.2.** Representação do sistema de coordenadas (SANTOS *et al.*, 2012).

Em mancais radiais hidrodinâmicos estáticos é comum substituir a coordenada  $x$  na direção do movimento por  $x=R\theta$ . A justificativa é dada na seção 3.1.1 e a espessura da película lubrificante pode ser considerada plana, conforme a Figura 3.3.



**Figura 3.3.** Película lubrificante na forma plana em um mancal radial.

### 3.1.1 - Espessura da película de óleo – relação aproximada

O método usualmente empregado para obter a película de óleo como uma função da distância no mancal radial (Fig. 3.4) é o seguinte:

- Considere o raio  $R_1$  e o centro  $O$  do mancal;
- Um eixo de raio  $R_2$  está localizado dentro do mancal, sendo seu centro  $C$ ;
- A distância  $OC$  é igual a excentricidade  $e$ , e todas as distâncias angulares são medidas da posição de máxima espessura de óleo, a qual está onde a extensão da linha  $OC$  corta a superfície do mancal, em  $G$ ;
- Considere um ponto  $B$  no mancal, de forma que o ângulo formado por  $OG$  e  $OB$  seja  $\theta$ ;

- A linha OB que passa pelo ponto A é o raio  $R_1$  do mancal e a linha AB é a espessura de óleo  $h$ , a qual está sendo determinada;
- Passe uma linha partindo do centro do eixo C paralela a OB cortando o eixo em E e o mancal em F, e considerando que as distâncias AB e EF são muito pequenas quando comparadas com AO e CE, então pode-se considerar que AB é igual a EF, quando as linhas OB e CF coincidem. Então ABFE, é tomada ser um retângulo e;
- Finalmente traçando uma reta saindo de O cortando perpendicularmente CE, define-se D.

Portanto, a espessura da película de óleo pode ser descrita pela seguinte equação:

$$h = EF = OB - DE = OB - (CE - CD) \quad (3.1a)$$

Sendo,

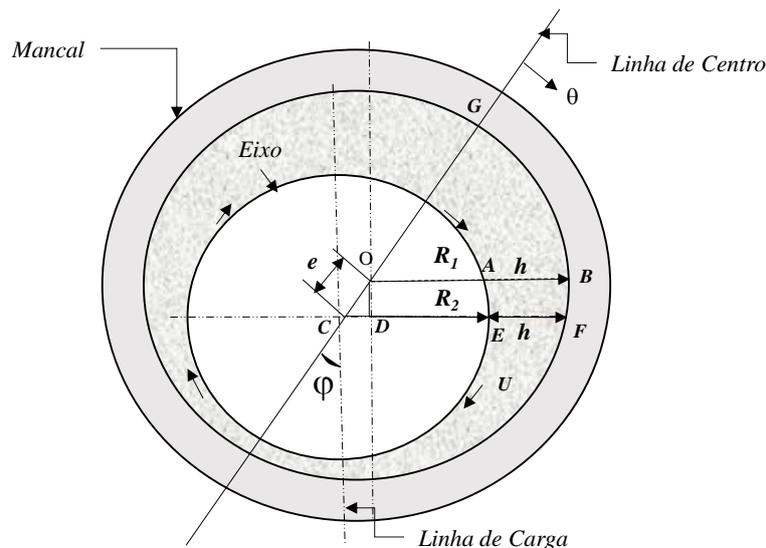
$$CD = e \cdot \cos(\theta) \quad (3.1b)$$

E como  $OB - CE = R_1 - R_2 = c$  e  $c$  é a folga radial do mancal, a espessura da película pode então ser escrita da seguinte forma:

$$h = c + e \cdot \cos(\theta) = c \{1 + (e/c) \cdot \cos(\theta)\} \quad (3.1c)$$

Sendo a relação  $e/c$  chamada de excentricidade específica do eixo e é representada pelo símbolo  $\varepsilon$ . Portanto, tem-se:

$$h = c (1 + \varepsilon \cos(\theta)) \quad (3.1d)$$



**Figura 3.4.** Geometria da relação aproximada da espessura da película de óleo.

A Eq. (3.1d) representa a espessura da película de óleo, a qual é usualmente válida quando a relação entre a folga e o raio do mancal é da ordem  $10^{-3}$ , e o ângulo  $\theta$  é medido a partir da posição da máxima folga, que fica sobre linha de centro. Quando  $\theta=0$  temos a máxima espessura da película,  $h=c(1+\varepsilon)$ , e quando  $\theta=\pi$ ,  $h=c(1-\varepsilon)$  a mínima espessura. A distância angular entre a linha de carga e a posição de mínima espessura de película em  $\theta=\pi$  é também importante. Esta é conhecida como ‘ângulo de ação’,  $\phi$ , CAMERON (1966).

## 3.2 - DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS

### 3.2.1 - Equação geral do movimento

As equações de conservação de quantidade de movimento, fluido incompressível, em coordenadas cartesianas são dadas por:

Componente x:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (3.2.a)$$

Componente y:

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \rho g_y \quad (3.2.b)$$

Componente z:

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g_z \quad (3.2.c)$$

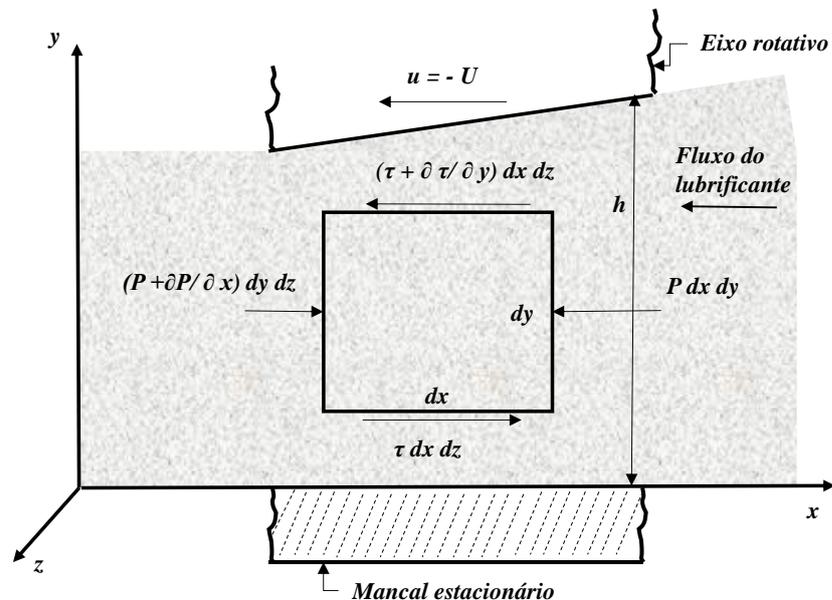
A equação da conservação da massa, nas três direções, de um fluido incompressível é:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

### 3.2.2 - Hipóteses simplificadoras

Devido à complexidade das equações envolvidas, no contexto físico deste problema, se faz necessário assumir algumas hipóteses que simplifiquem a solução, e que são normalmente utilizadas em problemas desta natureza, mas que não comprometam a essência e a praticidade da solução do ponto de vista de engenharia. Para a obtenção da equação que rege a teoria da lubrificação hidrodinâmica, conhecida como equação de Reynolds modificada serão aplicadas as seguintes hipóteses simplificadoras:

1. Escoamento bidimensional, incompressível, em regime laminar e mancal dinâmico;
2. Fluido não-newtoniano que segue a lei da potência (fluido power-law), portanto viscosidade variável ao longo da espessura do filme;
3. Desprezam-se as forças devido à inércia do lubrificante;
4. Impermeabilidade e não-deslizamento nas paredes (superfícies rígidas);
5. A pressão é constante através da espessura do filme;
6. Velocidade tangencial relativa  $U$ , na direção  $x$ ;
7. Velocidade normal a superfície do eixo devido a mudança temporal na espessura do filme ( $h$ ) mais a mudança espacial, devido ao movimento lateral da superfície do eixo com velocidade  $U$ ;
8. Forças de campo são desprezíveis (gravitacional ou magnética).



**Figura 3.5.** Forças de pressão e viscosas atuando sobre elemento de lubrificante, na direção  $x$ .

Assumindo as hipóteses simplificadoras listadas acima, aplicadas ao elemento de lubrificante representado na direção x pela Figura 3.5, obtém-se as seguintes expressões para as equações governantes, nas direções x, y e z:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (3.4.a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.4.b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \quad (3.4.c)$$

Na região de escoamento, a superfície do mancal está estacionária, em  $y = 0$ , enquanto a superfície do eixo,  $y = h(x, t)$ , move-se com as velocidades U e V, nas direções x e y, respectivamente. O lubrificante adere nas superfícies de contorno. Assim, as condições de contorno para as componentes da velocidade do fluido são:

Na superfície do mancal,  $y = 0$ :

$$u(x, 0, z) = 0 \quad (3.5.a)$$

$$v(x, 0, z) = 0 \quad (3.5.b)$$

$$w(x, 0, z) = 0 \quad (3.5.c)$$

Na superfície do eixo,  $y = h$ :

$$u(x, h, z) = U \quad (3.6.a)$$

$$v(x, h, z) = V \quad (3.6.b)$$

$$w(x, h, z) = 0 \quad (3.6.c)$$

A partir da cinemática simples, a velocidade normal à superfície do eixo, v, é igual a mudança temporal na espessura do filme ( $h$ ) mais a mudança espacial, devido ao movimento lateral da superfície do eixo com velocidade U, logo:

$$V = \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.6.d)$$

### 3.2.3 - Equação para modelo viscoso – Modelo da Lei da Potência

A relação entre a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação, ou seja, a equação constitutiva de um modelo de um fluido incompressível não-newtoniano, modelo que segue a lei da potência é dado por:

$$\tau_{ij} = \mu D_{ij} \quad (3.7a)$$

Sendo a viscosidade aparente  $\mu$  dependente do segundo invariante do tensor taxa de deformação, a qual é dada pela equação abaixo:

$$\mu = \begin{cases} m(2 D_{ij} : D_{ij})^{\frac{n-1}{2}} \\ ou \\ m(2 I)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases} \quad (3.7b)$$

Em que,  $m$  é a viscosidade absoluta ou dinâmica a uma temperatura  $T$  qualquer,  $D_{ij}$  é o tensor taxa de deformação,  $I$  é o segundo invariante do tensor taxa de deformação e  $i, j$  são índices relacionados aos eixos de coordenadas  $(x, y)$  e  $n$  é o índice de comportamento reológico do fluido.

Para obtenção do segundo invariante do tensor taxa de deformação,  $D_{ij} : D_{ij}$ , usa-se a seguinte formulação:

$$I = D_{ij} : D_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{ij} : D_{ij} = D_{xx}^2 + D_{yy}^2 + D_{zz}^2 + 2(D_{xy}^2 + D_{xz}^2 + D_{yz}^2) \quad (3.8)$$

Sendo, o tensor taxa de deformação dado por:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right) + \left( \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \right] \quad (3.9)$$

A partir das definições dadas pelas Eqs. (3.8) e (3.9), e considerando as hipóteses assumidas e simplificações, obtém-se a seguinte formulação para segundo invariante do tensor taxa de deformação, em termos das componentes  $u$  e  $w$ .

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.10)$$

Substituindo a Eq. (3.10) na Eq. (3.7b) para tensão de cisalhamento, tem-se:

$$\tau_{yx} = m \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.11a)$$

$$\tau_{yz} = m \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.11b)$$

### 3.2.4 - Método da perturbação regular

Para a resolução aproximada das Eqs. (3.4a) e (3.4c) utilizou-se a hipótese de alta dominância de Couette no escoamento e empregou-se o método da perturbação regular. Na utilização desta técnica admite-se que as variáveis dependentes do problema possam ser expandidas em termos de uma pequena perturbação,  $\sigma$ . Esta hipótese inicial é razoável, pois quando a velocidade relativa entre as superfícies é grande, pode-se aplicar a condição de deslizamento puro, ou seja, considerar que as taxas de deformação do fluido são geradas principalmente devido ao movimento relativo entre as superfícies. RAGHUNANDANA (2007) utilizou esta técnica para resolver a equação modificada de Reynolds para fluidos não-newtoniano sendo utilizado no funcionamento de mancais elípticos.

O primeiro passo do método, conforme definido na seção 2.5, é assumir que a solução do problema original pode ser expandida em uma série de Taylor, em termos de um parâmetro pequeno,  $\sigma$ . Neste caso, esta pequena perturbação, de primeira ordem, será aplicada nas componentes de velocidade  $u$  e  $w$ , e suas respectivas condições de contorno, no segundo invariante do tensor taxa de deformação, na viscosidade e na pressão. Resultando nas seguintes expansões:

Para componente da velocidade  $u$ , em  $x$ :

$$u = u_0 + \sigma u_1 \quad (3.12a)$$

$$u_0(x, 0, z) = 0 \quad (3.12b)$$

$$u_0(x, h, z) = U \quad (3.12c)$$

$$u_1(x, 0, z) = 0 \quad (3.12d)$$

$$u_1(x, h, z) = 0 \quad (3.12e)$$

Para componente da velocidade  $w$ , em  $z$ :

$$w = w_0 + \sigma w_1 \quad (3.13a)$$

$$w_0(x, 0, z) = 0 \quad (3.13b)$$

$$w_0(x, h, z) = 0 \quad (3.13c)$$

$$w_1(x, 0, z) = 0 \quad (3.13d)$$

$$w_1(x, h, z) = 0 \quad (3.13e)$$

Sendo  $u_0$  e  $w_0$  as componentes arbitrárias de Couette de acordo com a hipótese de alta dominância de Couette,  $u_1$  e  $w_1$  são as componentes de Poiseuille.

Pelo segundo passo do método, estas expansões serão agora utilizadas para obtenção do segundo invariante do tensor taxa de deformação pela substituição das equações expandidas (3.12a) e (3.13a) na Eq. (3.10), portanto tem-se que:

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] + \sigma \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right] + \frac{\sigma^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.14)$$

Considerando  $\sigma^2 \cong 0$ , pois a expansão é de primeira ordem, a Eq. (3.14) se torna igual a:

$$I = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] + \sigma \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right] \quad (3.15)$$

Pela definição da técnica da pequena perturbação, no primeiro e segundo passo, a expansão do segundo invariante do tensor taxa de deformação resulta em:

$$I = I_0 + \sigma I_1 \quad (3.16a)$$

Comparando as Eqs. (3.15) e (3.16), conclui-se que:

$$I_0 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.16b)$$

$$I_1 = \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right] \quad (3.16c)$$

Aplicando a técnica na viscosidade a expansão resultará em:

$$\mu = \mu_0 + \sigma \mu_1 \quad (3.17a)$$

Como a viscosidade depende do segundo invariante do tensor taxa de deformação, pela expansão de *Taylor*, tem que:

$$\mu = \mu(I_0 + \sigma I_1 + \dots) = \mu(I_0) + \sigma \left( \frac{\partial \mu}{\partial I} \right)_{I_0} + \dots \quad (3.17b)$$

Logo,

$$\mu_0 = \mu(I_0) \quad (3.17c)$$

$$\mu_1 = I_1 \left( \frac{\partial \mu}{\partial I} \right)_{I_0} \quad (3.17d)$$

Aplicando a técnica de pequena perturbação também no gradiente de pressão obtém-se a seguinte expansão:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \pi_0}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \pi_1}{\partial x} \quad (3.18a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \pi_0}{\partial z} + \sigma \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \quad (3.18b)$$

Em que  $\pi_0$  e  $\pi_1$  são as pressões de referência.

Os termos  $\partial \pi_0 / \partial x$  e  $\partial \pi_0 / \partial z$  são nulos, pois as componentes  $u_0$  e  $w_0$  são relacionadas a alta dominância de *Couette*, a qual depende apenas da velocidade relativa entre as superfícies. Portanto as equações (3.18a) e (3.18b) tornam-se:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \sigma \frac{\partial \pi_1}{\partial x} \quad (3.19a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \sigma \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \quad (3.19b)$$

Conforme segundo passo da técnica, obtidas todos os termos após aplicadas as expansões necessárias pode-se agora fazer as devidas substituições e obter todos os parâmetros necessários para o cálculo dos perfis de velocidade em  $u$  e  $w$ . Portanto, substituindo as Eqs. (3.12a) e (3.17a) na Eq. (3.11a), lembrando que  $\sigma^2 \cong 0$ , e as Eqs. (3.13a) e (3.17a) na Eq. (3.11b), tem-se que:

$$\tau_{yx} = \mu_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \sigma \left( \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \quad (3.20)$$

$$\tau_{zx} = \mu_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + \sigma \left( \mu_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (3.21)$$

Para obtenção do perfil de velocidade em  $u$ , substitui-se a Eq. (3.20) e (3.19a) na Eq. (3.4a), resultando em:

$$\sigma \frac{\partial \pi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \sigma \left( \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right] \quad (3.22)$$

Conforme terceiro passo, para solução da Eq. (3.22) pode-se decompô-la em duas, igualando a zero os termos sucessivos da série, da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.23a)$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \quad (3.23b)$$

Conforme quarto passo, resolver sucessivamente as equações. Portanto, integrando duas vezes a Eq. (3.23a) e considerando as condições de contorno definidas em (3.12b-c), chegamos na seguinte expressão para  $u_0$ :

$$u_0 = \frac{U}{h} y \quad (3.24)$$

Substituindo as Eqs. (3.21) e (3.19b) na Eq. (3.3c), para direção em z, seguindo os passos do método, tem-se que:

$$\sigma \frac{\partial \pi_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + \sigma \left( \mu_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \quad (3.25)$$

Para solução da Eq. (3.25) pode-se decompô-la em duas, da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.26a)$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (3.26b)$$

Integrando duas vezes a Eq. (3.26a) e considerando as condições de contorno definidas nas Eqs. (3.12b) a (3.12c), chegamos na seguinte expressão para  $w_0$ :

$$w_0 = 0 \quad (3.27)$$

Com valores de  $u_0$  e  $w_0$  definidos, substitui-se nas Eqs. (3.16b) e (3.16c), e determina-se  $I_0$  e  $I_1$  como sendo:

$$I_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{U}{h} \right)^2 \quad (3.28a)$$

$$I_1 = \frac{U}{h} \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (3.28b)$$

Como  $\mu_0 = \mu(I_0)$ , Eq. (3.17c) e  $\mu_1 = I_1 \left( \frac{\partial \mu}{\partial I} \right)_{I_0}$ , Eq. (3.17d), pode-se determinar

que:

$$\mu_0 = m(2I_0)^{\frac{n-1}{2}} = m \left| \frac{U}{h} \right|^{n-1} \quad (3.29a)$$

$$\mu_1 = m(n-1) \frac{\partial u_1}{\partial y} \left( \frac{U}{h} \right)^{n-2} \quad (3.29b)$$

Substituindo as expressões de  $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\mu_0$  e  $\mu_1$  nas Eqs. (3.23b) e (3.26b), e fazendo as devidas simplificações, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{1}{mn} \left( \frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial \pi_1}{\partial x} \quad (3.30a)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{1}{m} \left( \frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial w_1}{\partial y} \quad (3.30b)$$

Pelo quarto passo, integrando duas vezes as Eqs. (3.30a) e (3.30b) e considerando as condições de contorno definidas nas Eqs. (3.12d-e) e (3.13d-e), chegamos na seguinte expressão para  $u_1$  e  $w_1$  :

$$u_1 = \frac{1}{2mn} \left( \frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial \pi_1}{\partial x} y(y-h) \quad (3.31a)$$

$$w_1 = \frac{1}{2m} \left( \frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial \pi_1}{\partial z} y(y-h) \quad (3.31b)$$

Substituindo as Eqs. (3.19a), (3.24), (3.31a) na Eq. (3.12a), e as Eqs. (3.19b), (3.27) e (3.31b) na Eq. (3.13a), resultando nos perfis de velocidade nas direções  $x$  e  $z$ , dados por:

$$u(y) = \frac{U}{h} y + \frac{1}{2mn} \left( \frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) \quad (3.32a)$$

$$w(y) = \frac{1}{2m} \left( \frac{h}{U} \right)^{n-1} \frac{\partial p}{\partial z} y(y-h) \quad (3.32b)$$

Note que a velocidade do fluido mostra a superposição de dois efeitos distintos. O fluido move-se devido a um gradiente de pressão, conhecido por escoamento de *Poiseuille*, e flui por efeito de um cisalhamento impulsionado pelo movimento do eixo, conhecido por escoamento de *Couette*.

Obtidos os perfis de velocidade do fluido nas direções  $x$  e  $z$ , substitui-se as Eqs. (3.6d), (3.32a) e (3.32b) na equação da continuidade definida por (3.3), integrando através da espessura do filme, em  $y$ , no domínio de  $0$  a  $h$ , e aplicando a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais, se obtém a equação diferencial parcial, do tipo elíptica, para o campo de pressão hidrodinâmico, conhecida como equação de Reynolds modificada para fluidos não-newtonianos que seguem a lei da potência e isotérmicos.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h^{n+2}}{n} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ h^{n+2} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6mU^{n-1} \left[ U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] \quad (3.33)$$

Na Eq. (3.33) os termos do lado esquerdo representam o escoamento devido o gradiente de pressão (*Escoamento de Poiseuille*) e os termos do lado direito representam o escoamento cisalhante (*Escoamento de Couette*) induzido pelo eixo deslizando com velocidade  $U$ , e também escoamento devido ao movimento normal (*squeeze*) do eixo.

A partir da equação de Reynolds modificada, pode-se calcular a distribuição da pressão e conseqüentemente, os seguintes parâmetros operacionais de interesse prático e de projeto: capacidade de carga, *número de Sommerfeld*, ângulo de ação da carga, tensão cisalhante e força viscosa, coeficiente de atrito e vazão volumétrica. Estes parâmetros serão calculados após a adimensionalização das equações para os perfis de velocidade e da equação de Reynolds modificada.

As seguintes variáveis adimensionais foram utilizadas para obtenção das equações dos perfis de velocidade, equação de Reynolds adimensionais e parâmetros operacionais:

$$\theta = \frac{x}{R}; \eta = \frac{z}{L}; \tilde{h} = \frac{h}{c}; \phi = \frac{\theta}{\theta_L}; \lambda = \frac{2R}{L}; \xi = \frac{y}{c}; \tau = \frac{Ut}{L} \quad (3.34a-g)$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{U}; \tilde{w} = \frac{w}{U}; P = \frac{pc^{(n+1)}}{mRU^n}; \tilde{W}_1 = \frac{W_1c^{(n+1)}}{mLR^2U^n}; \tilde{W}_2 = \frac{W_2c^{(n+1)}}{mLR^2U^n} \quad (3.34h-l)$$

$$\tilde{W} = \frac{Wc^{(n+1)}}{mLR^2U^n}; \tilde{\tau} = \frac{\tau}{m} \left( \frac{c}{U} \right)^n; \tilde{f}_{at} = \frac{f_{at}}{mRL} \left( \frac{c}{U} \right)^n; \tilde{Q}_s = \frac{2Q_sL}{R^2Uc} \quad (3.34m-p)$$

$$S = \frac{1}{\pi \tilde{W}} \quad (3.34q)$$

Na Eq. (3.34d)  $\theta_L$  é o ângulo que caracteriza o comprimento da película de lubrificante, ou seja, corresponde ao início da cavitação, e é utilizado na solução da equação de Reynolds, considerando as condições de contorno de *Reynolds* ou *Swift-Steiber*, quais sejam  $P=0$  em  $\phi=0$  e  $\partial P/\partial \phi$  em  $\phi=1$ , como referenciado por CAMERON (1966), SHARMA *et al.* (1991), KANGO e SHARMA (2010), LIU (2012) e SANTOS *et al.* (2012), . Neste trabalho,  $\theta_L = \pi + \alpha$  (radianos) ou  $\theta_L = 180^\circ + \alpha$  (graus), sendo  $\alpha$  o ângulo de cavitação.

Na Eq. (3.34e)  $\lambda$  é uma característica geométrica, ou seja, é a relação entre o diâmetro do eixo rotativo e o comprimento do mancal, definida como razão de aspecto. Esta relação permite fazer aproximações que simplificam bastante a equação de Reynolds para mancais radiais, e em alguns casos permite resolvê-la analiticamente.

- Perfis de velocidades e condições contorno adimensionais

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{\xi}{\tilde{h}} + \frac{1}{2n\theta_L} (\tilde{h})^{n+1} \frac{\partial P}{\partial \phi} (\xi^2 - \tilde{h}\xi) \quad (3.35a)$$

$$\tilde{u} = 0 \quad em \quad \xi = 0$$

$$\tilde{u} = 1 \quad em \quad \xi = \tilde{h}$$

$$\tilde{v}(\phi, \tau) = c \left[ \frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} + \frac{1}{R\theta_L} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \phi} \right] \quad (3.35b)$$

$$\tilde{v} = \frac{c}{L} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \quad em \quad \phi = 0$$

$$\tilde{w}(\xi) = \frac{\lambda}{4} (\tilde{h})^{n+1} \frac{\partial P}{\partial \eta} (\xi^2 - \tilde{h}\xi) \quad (3.35c)$$

$$\tilde{w} = 0 \quad em \quad \xi = 0$$

$$\tilde{w} = 0 \quad em \quad \xi = \tilde{h}$$

- Equação de Reynolds modificada na forma adimensional

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right] + \left( \frac{\sqrt{n} \theta_L \lambda}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] = 6 n \theta_L \left[ \frac{\partial \tilde{h}(\phi)}{\partial \phi} + \lambda \theta_L \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} \right] \quad (3.36a)$$

Com as seguintes condições de contorno adimensionais desconsiderando o efeito *squeeze*, conforme abaixo:

$$P = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 0 \quad (3.36b)$$

$$P = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 1 \quad (3.36c)$$

$$P = 0 \quad \text{em} \quad \phi = 0 \quad (3.36d)$$

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \quad \text{em} \quad \phi = 1 \quad (3.36e,f)$$

Sendo,

$$\tilde{h}(\phi) = 1 + \varepsilon \cos(\theta_L \phi) \quad (3.36g)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}(\phi)}{\partial \phi} = -\varepsilon \theta_L \sin(\phi \theta_L) \quad (3.36h)$$

$$\frac{\partial \tilde{h}(\phi, \tau)}{\partial \tau} = \cos(\phi \theta_L) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.36i)$$

Obtida a equação de Reynolds modificada para fluido não-newtoniano, modelo da lei da potência, pode-se agora analisar os casos limites e aplicar a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) na formulação geral, porém sem considerar o efeito *squeeze*, ou seja, a velocidade normal à superfície do eixo, dado pela derivada da espessura do filme no tempo será desprezada, conseqüentemente o regime passa a ser permanente.

### 3.3 - CÁLCULO DA CARGA SUPORTADA, DO NÚMERO DE SOMMERFELD E DO ÂNGULO DE AÇÃO

As componentes de carga na forma adimensional são os resultados da integração do campo de pressão, ao longo do domínio de solução, advindo da solução da equação de Reynolds, e representadas esquematicamente na Figura 3.6, e são definidas pelas seguintes equações:

- Componente da carga tangencial à linha do centro na forma adimensional é definida por:

$$\tilde{W}_1 = -\theta_L \int_{\eta=0}^{\eta=1} \int_{\phi=0}^{\phi=1} P(\phi, \eta) \cos(\phi \theta_L) d\phi d\eta \quad (3.37a)$$

- Componente da carga perpendicular à linha do centro na forma adimensional é definida por:

$$\tilde{W}_2 = \theta_L \int_{\eta=0}^{\eta=1} \int_{\phi=0}^{\phi=1} P(\phi, \eta) \sin(\phi \theta_L) d\phi d\eta \quad (3.37b)$$

- Carga resultante na forma adimensional

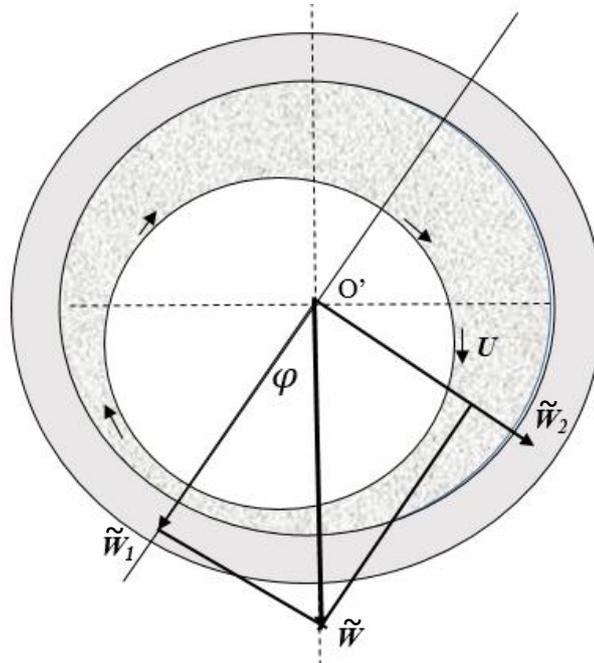
$$\tilde{W} = \sqrt{\tilde{W}_1^2 + \tilde{W}_2^2} \quad (3.37c)$$

- Número de Sommerfeld é um parâmetro característico utilizado em projetos de mancais radiais e pode ser calculado pelo inverso do produto da capacidade de carga pelo número  $\pi$ , ou ainda pela relação adimensional,  $S = (R/c)^2 \mu_0 N / P$ . Em que R é o raio do eixo, c é a folga,  $\mu_0$  é a viscosidade absoluta do fluido, N é número de rotações por minuto ou segundo do eixo e P é a pressão. Portanto, o mesmo será calculado pela seguinte equação:

$$S = \frac{1}{\pi \tilde{W}} \quad (3.37d)$$

- Ângulo de ação da carga é formado entre a linha de centro e uma linha perpendicular a mesma, passando pelo centro do eixo, é calculado da seguinte forma:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\tilde{W}_2}{\tilde{W}_1}\right) \quad (3.37e)$$



**Figura 3.6.** Representação esquemática das componentes de carga normal e ao longo da linha de centro.

### 3.4 - CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO

A força de atrito pode ser obtida pela integração da tensão de cisalhamento ao redor da superfície do eixo rotativo, pois mesmo para os casos de separação total entre a superfície cilíndrica externa do eixo e a superfície interna do mancal, existe resistência à rotação do eixo, devido ao cisalhamento da película de lubrificante entre as superfícies em questão.

Definindo a tensão de cisalhamento para a superfície do eixo como sendo,

$$\tilde{\tau} = \left(\frac{1}{\tilde{h}}\right)^n \left[ 1 + \frac{1}{2n\theta_L} (\tilde{h}(\phi))^{n+1} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right] \quad (3.38a)$$

Deste modo, a força de atrito, na forma adimensional, pode então ser obtida pelo produto da tensão de cisalhamento  $\tilde{\tau}$  pela área do mancal de largura L e o comprimento circunferencial, isto é:

$$\tilde{f}_{at} = \theta_L \int_{\eta=0}^{\eta=1} \int_{\phi=0}^{\phi=1} \left( \frac{1}{\tilde{h}(\phi)} \right)^n \left[ 1 + \frac{1}{2n\theta_L} (\tilde{h}(\phi))^{n+1} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right] d\phi d\eta \quad (3.38b)$$

Considerando a definição do coeficiente de atrito, como sendo a relação entre a força de atrito  $f_{at}$  e a carga  $\tilde{W}$  aplicada ao mancal, portanto a coeficiente de atrito pode ser calculado pela seguinte relação:

$$\tilde{C}_f = \frac{\tilde{f}_{at}}{\tilde{W}} \quad (3.38c)$$

### 3.5 - CÁLCULO DA TAXA DE ESCOAMENTO AXIAL

A vazão volumétrica calculada é a quantidade de fluido lubrificante que o mancal “expulsa” axialmente devido ao gradiente de pressão no filme de fluido lubrificante. Portanto, significa dizer que a quantidade de fluido lubrificante fornecida ao mancal deve ser maior ou igual à quantidade calculada, caso contrário faltará fluido lubrificante para manter a lubrificação no regime hidrodinâmico com consequências graves para o mancal, este fenômeno é comumente chamado de “oil starvation”. Para o cálculo da vazão volumétrica utiliza-se a equação seguinte:

$$\tilde{Q}_s = -\frac{\theta_L}{6} \int_{\phi=0}^{\phi=1} (\tilde{h}(\phi))^{n+2} \frac{\partial P(\phi, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\phi \quad (3.39)$$

## CAPÍTULO 4

### SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS: CASOS LIMITES

Este capítulo apresenta uma análise do problema para casos limites e fornece suas soluções analíticas.

Há simplificações que podem ser usadas na obtenção de uma solução aproximada para problemas de mancais. A exigência é obter a pressão como uma função de  $\phi$  e como a equação bidimensional Reynolds (3.36a) normalmente não pode ser integrada diretamente é frequentemente útil obter uma idéia do campo de pressão fazendo uma simplificação matemática. Estas simplificações são agora consideradas.

#### 4.1 - FORMULAÇÃO PARA MANCAIS LONGOS E EXCENTRICIDADE PEQUENA

A característica geométrica, ou seja, razão de aspecto ( $\lambda=2R/L$ ) e a excentricidade específica, definida como a relação entre a excentricidade e a folga entre o eixo rotativo e o mancal ( $\varepsilon=e/c$ ), são dados de entrada para o cálculo de parâmetros operacionais em mancais radiais, então uma aproximação considerada na análise deste tipo de mancal é admiti-lo ser longo ( $\lambda=2R/L \rightarrow 0$ ) e sua excentricidade relativa pequena ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ), assim despreza-se o termo  $\partial p/\partial \eta$ , o qual implica o escoamento na direção  $\eta$  igual a zero, desta forma o escoamento torna-se unidimensional.

Algumas hipóteses simplificadoras:

1. Toma-se  $\varepsilon$  tão pequeno de modo que assume-se  $\tilde{h}^{(n+2)} \approx 1$ ;
2. Considera-se o mancal longo, assim  $\lambda = 2R/L \rightarrow 0$ ;
3. O fluido é incompressível;
4. O lubrificante não-newtoniano obedece a lei da potência;
5. Desprezam-se as forças devido à inércia do lubrificante;
6. A pressão não varia na direção axial;
7. A pressão não varia na direção da folga radial e
8. O regime é permanente.

As hipóteses simplificadoras 1 e 2 conduzem a uma equação unidimensional, já na sua forma adimensional, como se segue:

$$\frac{d^2 P}{d\phi^2} = 6n\theta_L h'(\phi) \quad (4.1a)$$

Duas condições de contorno são necessárias para se determinar o campo de pressão. Estas condições de contorno são:

$$P = 0 \quad em \quad \phi = 0 \quad (4.1b)$$

$$P = 0 \quad ou \quad \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \quad em \quad \phi = 1 \quad (4.1c,d)$$

Historicamente esta foi a primeira equação resolvida, sendo considerada por Reynolds em 1886 e Sommerfeld em 1904, [CAMERON (1966)].

Integrando-se a Eq. (4.1a) e fazendo-se uso das condições de contorno Eqs. (4.1b) e (4.1c,d) obtemos a equação para o cálculo da pressão em função do ângulo  $\phi$ :

$$P(\phi) = 6\epsilon n [\text{sen}(\theta_L \phi) - \theta_L \cos(\theta_L) \phi] \quad (4.2)$$

Para o cálculo de  $\theta_L$  utilizamos a condição de contorno Eq. (4.1c), assim temos que,

$$P(\phi = 1) = 6\epsilon n [\text{sen}(\theta_L) - \theta_L \cos(\theta_L)] \quad (4.3)$$

Como  $P(\phi = 1) = 0$  a relação para o cálculo de  $\theta_L$  é dada por,

$$\text{sen}(\theta_L) = \theta_L \cos(\theta_L) \quad (4.4)$$

Pela Eq. (4.2), nota-se que a principal contribuição é o índice de comportamento reológico do fluido não-newtoniano quando comparada com a formulação para fluido newtoniano ( $n=1$ ). Portanto, pode-se afirmar que para índices de comportamento reológicos ( $n < 1$ ), fluidos ditos pseudoplástico, apresentam menor pressão que fluidos newtonianos ( $n=1$ ) e que fluidos ditos dilatantes ( $n > 1$ ).

## 4.2 - FORMULAÇÃO PARA MANCAIS LONGOS E QUALQUER EXCENTRICIDADE

Nesta análise também se considera o mancal longo ( $\lambda=2R/L \rightarrow 0$ ), porém serão admitidos todos os valores de  $\varepsilon$ , entre 0 e 1, portanto a excentricidade específica não tende mais a 0, e o termo  $\tilde{h}^{n+2}$  não terá mais um valor aproximado de 1, logo será considerado nesta formulação. Entretanto, as hipóteses simplificadoras do caso anterior também são válidas aqui, com exceção da hipótese 1. Assim a equação torna-se:

$$\frac{d}{d\phi} \left( \tilde{h}(\phi)^{n+2} \frac{dP}{d\phi} \right) = 6n\theta_L \tilde{h}'(\phi) \quad (4.5a)$$

Sujeita as seguintes condições de contorno,

$$P = 0 \quad \text{em} \quad \phi = 0 \quad (4.5b)$$

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \quad \text{em} \quad \phi = 1 \quad (4.5c,d)$$

Integrando-se a Eq. (4.5a) e usando-se as condições de contorno Eqs. (4.5b) e (4.5c,d) chega-se a equação para o cálculo da pressão em função de  $\phi$  para este caso, conforme:

$$P(\phi) = -\varepsilon \beta I(\phi) \quad (4.6a)$$

Sendo,

$$\beta = 6n\theta_L \quad (4.6b)$$

$$I(\phi) = I_1(\phi) - \cos(\theta_L)I_2(\phi) \quad (4.6c)$$

$$I_1(\phi) = \int_{\phi}^0 \frac{\cos(\theta_L\phi')}{\tilde{h}(\phi')^{n+2}} d\phi' \quad (4.6d)$$

$$I_2(\phi) = \int_{\phi}^0 \frac{1}{\tilde{h}(\phi')^{n+2}} d\phi' \quad (4.6e)$$

Para o cálculo de  $\theta_L$ , procede-se da mesma forma que foi feito para a formulação anterior, utilizando a condição de contorno Eq. (4.1c), assim tem-se,

$$P(\phi=1) = -\varepsilon \beta I(1) \quad (4.7)$$

Assim, como  $P(\phi=1) = 0$  o cálculo de  $\theta_L$  resulta na solução da seguinte equação:

$$I(1) = \int_1^0 \frac{\cos(\theta_L \phi') - \cos(\theta_L)}{\tilde{h}(\phi')^{n+2}} d\phi' = 0 \quad (4.8a)$$

Sendo,

$$\tilde{h}(\phi=1) = 1 + \varepsilon \cos(\theta_L) \quad (4.8b)$$

A solução da Eq. (4.6a) recai na teoria de Sommerfeld, que em termos das variáveis primitivas e para fluido newtoniano, e considerando as condições contorno de Sommerfeld fica:

$$P(\theta) = P_a + \frac{6\mu UR\varepsilon}{c^2} \frac{[2 + \varepsilon \cos(\theta)] \text{sen}(\theta)}{[2 + \varepsilon^2][1 + \varepsilon \cos(\theta)]^2} \quad (4.8c)$$

Sendo,  $P_a$  a pressão atmosférica.

Para o cálculo de  $\theta_L$ , equação (4.8.a), utilizou-se a subrotina DZREAL da biblioteca IMSL (2014) com tolerância de  $10^{-5}$ , esta subrotina utiliza o método de Müller para encontrar as raízes de funções.

Nota-se, que  $\theta_L$  depende da excentricidade específica ( $\varepsilon$ ), diferentemente do que ocorre quando o fluido lubrificante é newtoniano, em que  $\theta_L$  independe da excentricidade específica do mancal, conforme SANTOS (2004).

### 4.3 - CÁLCULO DA CAPACIDADE DE CARGA E ÂNGULO DE AÇÃO

As componentes de carga na forma adimensional são:

- Componente ao longo da linha de centro

$$\tilde{W}_1 = -\theta_L \int_0^1 P(\phi) \cos(\theta_L \phi) d\phi \quad (4.9)$$

- Componente de carga normal à linha de centro

$$\tilde{W}_2 = \theta_L \int_0^1 P(\phi) \text{sen}(\theta_L \phi) d\phi \quad (4.10)$$

A capacidade de carga adimensional  $\tilde{W}$  e o ângulo de atitude  $\varphi$  são definidos pelas equações :

$$\tilde{W} = \sqrt{\tilde{W}_1^2 + \tilde{W}_2^2} \quad (4.11)$$

$$\varphi = \text{arctg} \left( \frac{\tilde{W}_2}{\tilde{W}_1} \right) \quad (4.12)$$

#### 4.4 - CÁLCULO DO FATOR DE ATRITO

O fator de atrito é calculado a partir da integração da tensão de cisalhamento no eixo. A tensão de cisalhamento para a superfície do eixo é:

$$\tilde{\tau} = \left( \frac{1}{\tilde{h}} \right)^n \left[ 1 + \frac{1}{2n\theta_L} (\tilde{h}(\phi))^{n+1} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right] \quad (4.13)$$

deste modo, a força de atrito na forma adimensional é:

$$\tilde{f}_{at} = \theta_L \int_0^1 \left( \frac{1}{\tilde{h}(\phi)} \right)^n \left[ 1 + \frac{1}{2n\theta_L} (\tilde{h}(\phi))^{n+1} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right] d\phi \quad (4.14)$$

Portanto o fator de atrito pode ser calculado a partir da equação:

$$\tilde{C}_f = \frac{\tilde{f}_{at}}{\tilde{W}_R} \quad (4.15)$$

#### 4.5 - CÁLCULO DA TAXA DE ESCOAMENTO AXIAL

A taxa de escoamento axial adimensional para um mancal radial é encontrada da seguinte forma:

$$\tilde{Q}_s = -\frac{\theta_L}{6} \int_{\phi=0}^{\phi=1} (\tilde{h}(\phi))^{n+2} \left. \frac{\partial P(\phi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} d\phi \quad (4.16)$$

Como P é uma função de  $\phi$ , tem-se:

$$P = f(\phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \quad (4.17)$$

Assim a taxa de escoamento axial para este caso é:

$$\tilde{Q}_s = 0 \quad (4.18)$$

A metodologia de solução para estes casos limites é puramente analítica, pois ambos os casos, recaem em um problema unidimensional de fácil solução.

## CAPÍTULO 5

### SOLUÇÃO UTILIZANDO A TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Neste capítulo será aplicada a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) na formulação geral de mancal liso e em regime permanente, ou seja, sem escoamento devido ao movimento normal (*squeeze*) do eixo.

#### 5.1 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

A partir da Eq. (3.36a) desconsiderando o escoamento devido ao movimento normal do eixo (efeito *squeeze*) obtém-se a equação abaixo,

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right] + \left( \frac{\sqrt{n} \theta_L \lambda}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] = 6 n \theta_L \frac{\partial \tilde{h}(\phi)}{\partial \phi} \quad (5.1a)$$

Com as seguintes condições de contorno adimensionais:

$$P = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 0 \quad (5.1b)$$

$$P = 0 \quad \text{em} \quad \eta = 1 \quad (5.1c)$$

$$P = 0 \quad \text{em} \quad \phi = 0 \quad (5.1d)$$

$$P = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial P}{\partial \phi} = 0 \quad \text{em} \quad \phi = 1 \quad (5.1e,f)$$

Sendo,

$$\frac{\partial \tilde{h}(\phi)}{\partial \phi} = - \varepsilon \theta_L \text{sen}(\phi \theta_L) \quad (5.2)$$

Seguindo a metodologia da GITT, pode-se desenvolver a solução.

### 5.1.1 - Definição e solução do problema de autovalor

No processo de transformação integral é necessário a determinação de um problema de autovalor. Este problema é definido com base nos termos difusivos da formulação original e/ou na direção mais homogênea, que neste caso é a direção axial,  $\eta = 0$ . Portanto este problema é da seguinte forma:

$$\frac{d^2\psi_i}{d\eta^2} + \mu_i^2\psi_i(\eta) = 0 \quad (5.3a)$$

Com as seguintes condições de contorno,

$$\psi_i(0) = 0 \quad (5.3b)$$

$$\psi_i(1) = 0 \quad (5.3c)$$

As autofunções são determinadas na seguinte forma:

$$\psi_i(\eta) = \text{sen}(\mu_i\eta), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4a)$$

e os autovalores são determinados da seguinte equação transcendental:

$$\text{sen}(\mu_i\eta) = 0, \quad \mu_i = i\pi \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4b)$$

e as autofunções  $\psi_i(\eta)$  gozam da seguinte propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \psi_i(\eta)\psi_j(\eta)d\eta = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ N_i, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (5.4c)$$

A norma, ou integral de normalização será dada, quando  $i=j$ , por:

$$N_i = \int_0^1 [\psi_i(\eta)]^2 d\eta = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4d)$$

Para efeito da transformação integral do problema do campo de pressão é mais conveniente definir uma autofunção normalizada da forma:

$$\tilde{\psi}_i(\eta) = \frac{\psi_i(\eta)}{N_i^{1/2}} \quad (5.4f)$$

### 5.1.2 - Desenvolvimento do par transformada-inversa

O problema de autovalor definido na Eq. (5.4f) permite a definição do seguinte par transformada-inversa:

$$\tilde{P}_i(\phi) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) P(\phi, \eta) d\eta \quad , \text{ Transformada} \quad (5.5a)$$

$$P(\phi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{P}_i(\phi) \quad , \text{ Inversa} \quad (5.5b)$$

### 5.1.3 - Transformação integral do problema diferencial parcial em um sistema diferencial ordinário.

Na aplicação da transformação integral, a equação diferencial parcial é transformada em um sistema de equações diferenciais ordinárias. Portanto, a transformação integral do problema definido pela Eq. (5.1a) é realizada a partir da multiplicação da Eq. (5.1a) por  $\tilde{\psi}_i(\eta)$ , integrando-a no domínio de  $[0, 1]$  em  $\eta$ , resultando:

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \left\{ \underbrace{\frac{\partial}{\partial \phi} \left[ (\tilde{h}(\phi))^{n+2} \frac{\partial P}{\partial \phi} \right]}_I + a^2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (\tilde{h}(\phi))^{n+2} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right]}_{II} \right\} d\eta = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) f(\phi) d\eta \quad (5.6a)$$

Sendo,

$$a = \frac{\sqrt{\eta} \lambda \theta_L}{2} \quad (5.6b)$$

$$f(\phi) = 6 n \theta_L \frac{\partial \tilde{h}(\phi)}{\partial \phi} = -6 n \theta_L^2 \varepsilon \text{sen}(\phi \theta_L) \quad (5.6c)$$

Desenvolvendo cada termo da Eq. (5.6a), e após a aplicação da fórmula de inversão Eq. (5.5b), resultando:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \frac{\partial}{\partial \phi} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) P(\phi, \eta) d\eta \right] = \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \frac{\partial \tilde{P}_i(\phi)}{\partial \phi} \right] = \\ &= \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \frac{d^2 \tilde{P}_i(\phi)}{d\phi^2} + (n+2) \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+1} \frac{d\tilde{h}(\phi)}{d\phi} \frac{d\tilde{P}_i(\phi)}{d\phi} \end{aligned} \quad (5.6d)$$

$$\begin{aligned} II &= \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] d\eta = \\ &= \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \frac{\partial^2 P(\phi, \eta)}{\partial \eta^2} d\eta = -\mu_i^2 \left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2} \tilde{P}_i(\phi) \end{aligned} \quad (5.6e)$$

Após substituição dos termos,  $I$  e  $II$ , dados pelas Eqs (5.6d) e (5.6e) na Eq. (5.6a) e a divisão por  $\left( \tilde{h}(\phi) \right)^{n+2}$ , o seguinte sistema de equações diferenciais ordinário transformado para o campo de pressão é obtida:

$$\frac{d^2 \tilde{P}_i(\phi)}{d\phi^2} + g(\phi) \frac{d\tilde{P}_i(\phi)}{d\phi} - (m_i)^2 \tilde{P}_i(\phi) = C_i \tilde{f}(\phi) \quad (5.7a)$$

As condições de contorno também são transformadas pela mesma metodologia acima, ou seja, as Eqs. (3.36d) e (3.36f) são multiplicadas por  $\tilde{\psi}_i(\eta)$  e, após integra-se no domínio de  $[0, 1]$  em  $\eta$ , resultando:

$$\tilde{P}_i = 0 \quad \text{para} \quad \phi = 0 \quad (5.7b)$$

$$\frac{d\tilde{P}_i}{d\phi} = 0 \quad \text{para} \quad \phi = 1 \quad (5.7c)$$

As variáveis  $g_i$ ,  $m_i$ ,  $C_i$  e  $\tilde{f}(\phi)$  são definidas como:

$$g(\phi) = \frac{(n+2) d\tilde{h}(\phi)}{\tilde{h}(\phi) d\phi} \quad (5.7d)$$

$$m_i = a\mu_i \rightarrow m_i = \frac{\sqrt{n}\lambda\theta_L\mu_i}{2} \quad (5.7e)$$

$$C_i = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta \quad (5.7f)$$

$$\tilde{f}(\phi) = \frac{f(\phi)}{(\tilde{h}(\phi))^{n+2}} \quad (5.7g)$$

A equação diferencial ordinária resultante Eq. (5.7a) é resolvida sujeitas as condições de contorno transformadas, Eqs. (5.7b) e (5.7c). Quando a transformada do campo de pressão é invertida pela fórmula de inversão a solução desejada é obtida.

#### 5.1.4 - Solução do sistema diferencial ordinário

As equações (5.7) constituem um problema de valor de contorno não-linear de infinitas equações para os campos de pressão transformados. Este sistema diferencial ordinário é resolvido numericamente e, para tal, precisa ser truncado numa ordem suficientemente grande, que assegure a convergência dos potenciais dentro da tolerância desejada. Na solução utiliza-se a subrotina DBVPFD. A DBVPFD aplica o método das diferenças finitas para resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias. No entanto, para uso desta subrotina é necessário reescrever a equação de segunda ordem como um sistema de primeira ordem, conforme:

$$Y_i = \tilde{P}_i(\phi) \quad (5.8a)$$

$$Y_{i+N} = \frac{d\tilde{P}_i(\phi)}{d\phi} \quad (5.8b)$$

$$\frac{dY_{i+N}}{d\phi} = \frac{d^2\tilde{P}_i(\phi)}{d\phi^2} \quad (5.8c)$$

Após truncamento numa série de  $N$  termos, suficientemente grande para convergência, introduz-se as definições dadas pelas Eqs. (5.8a), (5.8b) e (5.8c) na Eq. (5.7a), resultando em:

$$\frac{dY_{i+N}}{d\phi} + g(\phi)Y_{i+N} - (m_i)^2 Y_i = C_i \tilde{f}(\phi) \quad (5.9a)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$Y_i = 0 \quad em \quad \phi = 0 \quad (5.9b)$$

$$Y_{i+N} = 0 \quad em \quad \phi = 1 \quad (5.9c)$$

O problema definido pelas Eqs. (5.7) ou (5.9) dependem de  $\theta_L$  e este faz parte da solução do próprio problema. Portanto, para determinar  $\theta_L$  utiliza-se a condição inicial dada por:

$$\tilde{P}_i \Big|_{\phi=1} = 0 \quad (5.9d)$$

Substituindo a Eq. (5.9d) na fórmula de inversão, Eq. (5.5b), se obtém a equação para o cálculo de  $\theta_L$ . Assim se obtém a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^N \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{P}_i \Big|_{\phi=1} = 0 \quad (5.9e)$$

Todas as tarefas computacionais intermediárias são acompanhadas dos requisitos de precisão prescritos pelo usuário. Para o cálculo de  $\theta_L$ , equação (5.9e), utilizou-se a subrotina DZREAL da biblioteca do IMSL (2014), com tolerância de  $10^{-5}$ , esta subrotina utiliza o método de Muller para encontrar as raízes reais de funções. A Figura 5.1 apresenta o fluxograma do procedimento de solução.

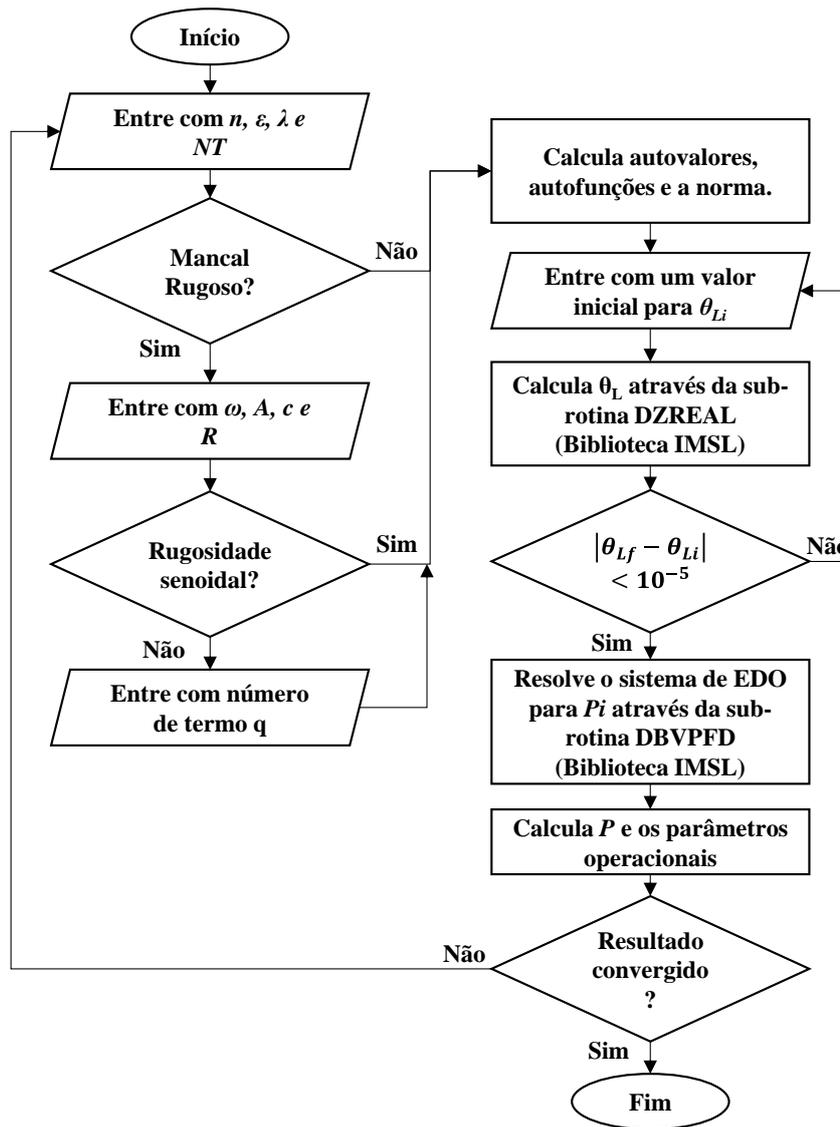


Figura 5.1. Fluxograma do procedimento de solução.

## 5.2 - CÁLCULO DA CAPACIDADE DE CARGA, DO NÚMERO DE SOMMERFELD E DO ÂNGULO DE AÇÃO

As componentes da capacidade de carga suportada pelo mancal são obtidas a partir da integração da pressão do filme de óleo agindo na superfície do eixo. Portanto, substituiu-se a fórmula de inversão Eq. (5.5b) nas equações da capacidade de carga (3.37a) e (3.37b), definidas no Capítulo 3, tem-se:

### 5.2.1 - Componente de carga ao longo da linha de centro

Substituindo a Eq. (5.5b) na Eq. (3.37a), tem-se que:

$$\tilde{W}_1 = -\theta_L \int_{\phi=0}^{\phi=1} \cos(\phi\theta_L) \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{P}_i(\phi) \int_{\eta=0}^{\eta=1} \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta \right] d\phi \quad (5.10a)$$

Substituindo Eq. (5.7f) na Eq. (5.10a) e permutando o somatório, tem-se que:

$$\tilde{W}_1 = -\theta_L \sum_{i=1}^{\infty} A_i C_i \quad (5.10b)$$

Sendo:

$$A_i = \int_{\phi=0}^{\phi=1} \tilde{P}_i(\phi) \cos(\phi\theta_L) d\phi \quad (5.10c)$$

### 5.2.2 - Componente de carga normal à linha de centro

Substituindo a Eq. (5.5b) na Eq. (3.37b), tem-se que:

$$\tilde{W}_2 = \theta_L \int_{\phi=0}^{\phi=1} \text{sen}(\phi\theta_L) \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{P}_i(\phi) \int_{\eta=0}^{\eta=1} \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta \right] d\phi \quad (5.11a)$$

Substituindo Eq. (5.7f) na Eq. (5.10a) e permutando o somatório, tem-se que:

$$\tilde{W}_2 = \theta_L \sum_{i=1}^{\infty} B_i C_i \quad (5.11b)$$

Sendo:

$$B_i = \int_{\phi=0}^{\phi=1} \tilde{P}_i(\phi) \text{sen}(\phi\theta_L) d\phi \quad (5.11c)$$

Assim a capacidade de carga  $\tilde{W}$  é calculada pela Eq. (3.38c) definida no Capítulo 3, conforme abaixo:

$$\tilde{W} = \sqrt{\tilde{W}_1^2 + \tilde{W}_2^2}$$

### 5.2.3 - Cálculo do Número de Sommerfeld

O cálculo do número de Sommerfeld ou parâmetro característico do mancal (S) é realizado conforme Eq. (3.38d) definida no Capítulo 3, conforme abaixo:

$$S = \frac{1}{\pi \tilde{W}}$$

### 5.2.4 - Ângulo de ação

Calculado do ângulo de ação é realizado conforme Eq. (3.38d) definida no Capítulo 3, conforme abaixo:

$$\Phi = \text{arctg} \left( \frac{\tilde{W}_2}{\tilde{W}_1} \right)$$

### 5.3 - CÁLCULO DO COEFICIENTE DE ATRITO ( $C_f$ )

Para o cálculo de  $C_f$  substitui-se a fórmula da inversão na equação da força viscosa definida no Capítulo 3, pela Eq. (3.38b), e utiliza-se a equação do coeficiente de atrito definida no Capítulo 3, pela Eq. (3.38c).

$$\tilde{f}_{at} = \theta_L \int_{\phi=0}^{\phi=1} \left( \frac{1}{\tilde{h}(\phi)} \right)^n d\phi + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\phi=0}^{\phi=1} \tilde{h}(\phi) \frac{d\tilde{P}_i}{d\phi} d\phi \int_{\eta=0}^{\eta=1} \tilde{\psi}_i(\eta) d\eta \quad (5.12a)$$

Substituindo Eq. (5.7f) na Eq. (5.12a) e permutando o somatório, tem-se que:

$$\tilde{f}_{at} = \theta_L \int_{\phi=0}^{\phi=1} \left( \frac{1}{\tilde{h}(\phi)} \right)^n d\phi + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{\infty} D_i C_i \quad (5.12b)$$

sendo,

$$D_i = \int_{\phi=0}^{\phi=1} \tilde{h}(\phi) \frac{d\tilde{P}_i(\phi)}{d\phi} d\phi \quad (5.12c)$$

Logo, o coeficiente de atrito  $C_f$  é calculado pela Eq. (3.38c), definida no Capítulo 3, conforme abaixo:

$$\tilde{C}_f = \frac{\tilde{f}_{at}}{\tilde{W}} \quad (5.12d)$$

#### 5.4 - TAXA DE ESCOAMENTO LATERAL

Para o cálculo de  $\tilde{Q}_s$  utilizamos a Eq. (3.39), onde após integração resulta:

$$\tilde{Q}_s = -\frac{\theta_L}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d\tilde{\psi}_i}{d\eta} \Big|_{\eta=0} E_i \quad (5.13a)$$

Sendo que o coeficiente  $E_i$  é obtido a partir da seguinte integral:

$$E_i = \int_0^1 \tilde{h}(\phi)^{n+2} \tilde{P}_i(\phi) d\phi \quad (5.13b)$$

e a derivada da autofunção é dada por

$$\frac{d\tilde{\psi}_i(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\mu_i}{\sqrt{N_i}} \quad (5.13c)$$

Devido à presença da autofunção na equação do cálculo da taxa Eq. (5.13a), foi aplicado o método do balanço integral na equação diferencial (5.1a) com o objetivo de melhorar a convergência deste parâmetro, que pode ser verificado no APÊNDICE I.

Assim obtemos uma equação para  $\tilde{Q}_s$  definida como se segue:

$$\tilde{Q}_s = -\frac{\theta_L}{6} \left\{ \left( \frac{1}{a^2} \right) \sum_{i=1}^{\infty} D_i(0) \int_0^1 \tilde{h}(\phi)^{n+2} [m_i^2 \tilde{P}_i(\phi) + C_i \tilde{f}(\phi)] d\phi - \frac{1}{2a^2} F(\phi) \right\} \quad (5.14a)$$

Sendo:

$$D_i(0) = \int_0^1 C_i(\eta) d\eta = \frac{1}{\mu_i \sqrt{N_i}} \quad (5.14b)$$

$$C_i = \frac{1 - \cos \mu_i}{\mu_i N_i} \quad (5.14c)$$

$$F(\phi) = \int_0^1 f(\phi) d\phi \quad (5.14d)$$

Os termos  $\tilde{h}(\phi)$ ,  $m_i$ ,  $C_i(\eta)$  e  $f(\phi)$  são determinados pelas Eqs. (3.1d), (5.7e), (5.7f) e (5.6c), respectivamente.

Para uma melhor performance na solução deste problema todas as tarefas computacionais intermediárias são acompanhadas dentro dos requisitos prescritos pelo usuário. Devido à necessidade do alcance de convergência nas expansões em autofunções, é preciso ser feito um controle automático da ordem de truncamento  $N$ , para um certo número de dígitos completamente convergidos, requisitos na solução final, em determinadas posições de interesse.

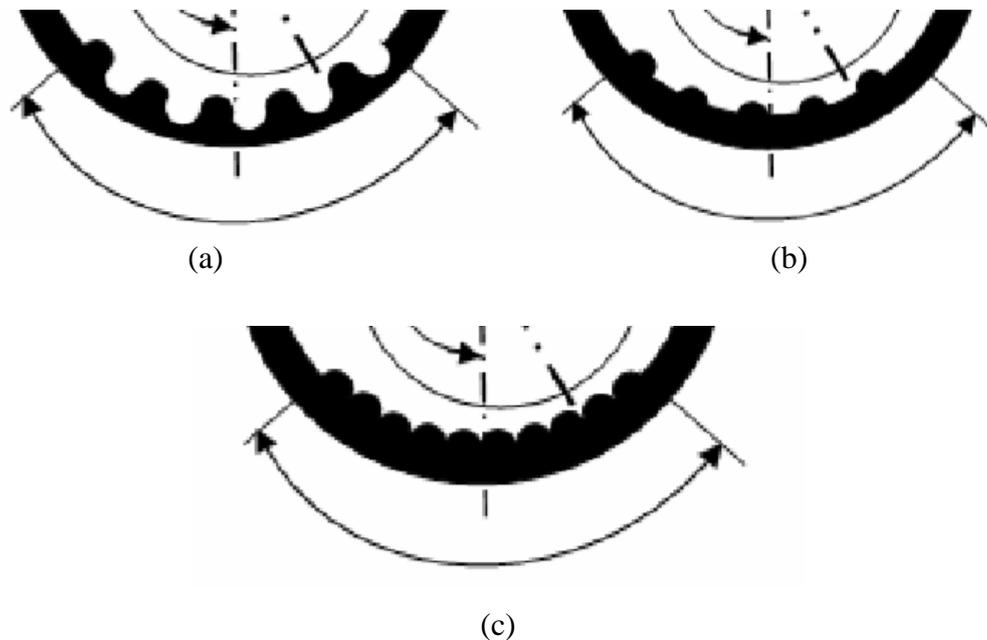
## CAPÍTULO 6

### SOLUÇÃO PARA MANCAL RUGOSO

Neste capítulo não será mostrado o formalismo da GITT apresentado no Capítulo 5, visto que a alteração no modelo é apenas na espessura da película lubrificante,  $h$ . No entanto será analisado três tipos de rugosidade de superfície considerados neste estudo. E sua influência nos parâmetros operacionais serão mostrados no Capítulo 7.

#### 6.1 - MODELOS DE RUGOSIDADE

Diferentes modelos de rugosidades de superfície, quais sejam, modelo de rugosidade randômica, modelo senoidal, modelo cilíndrico, modelo semiesférico, etc. tem sido adaptados e estudados por vários pesquisadores para representar a rugosidade superficial ou textura, e com isso melhorando a performance do mancal. Neste trabalho são utilizados os modelos senoidal Eq. (6.1), “meia onda” Eq. (6.2) e “onda completa” Eq. (6.3), para representar a rugosidade transversal na superfície do mancal. As variações resultantes destes modelos são mostradas nas Figuras 6.1(a), (b) e (c).



**Figura 6.1.** Configurações para os diferentes modelos de rugosidade: (a) Senoidal, (b) Meia onda retificada e (c) Onda Completa retificada.

Os diferentes tipos de perfis de rugosidade considerados neste trabalho são dados pelas Eqs. (6.1) a (6.3):

$$\delta_s = A.\text{sen}(\Omega) \quad (6.1)$$

$$\delta_{oc} = -\left(\frac{4A}{\pi}\right)\left(\sum_{q=2,4,6,\dots,\infty} \frac{\cos(q.\Omega)}{q^2-1}\right) + \left(\frac{2A}{\pi}\right) \quad (6.2)$$

$$\delta_{mo} = -\left(\frac{2A}{\pi}\right)\left(\sum_{q=2,4,6,\dots,\infty} \frac{\cos(q.\Omega)}{q^2-1}\right) + \left(\frac{A}{\pi}\right) + \left(\frac{A.\text{sen}(\Omega)}{2}\right) \quad (6.3)$$

Sendo,

$\delta_s$ ,  $\delta_{oc}$  e  $\delta_{mo}$  = variação da rugosidade superficial para senoidal, onda completa e meia onda respectivamente.

$\Omega = \frac{\pi.R.\theta}{\omega}$  para rugosidade transversal.

$\omega$  = largura da cavidade, dado pela relação entre o comprimento da seção áspera e o número da asperezas (HUYNH, 2005; KUMAR, 2008; KANGO e SHARMA, 2010).

$A$  = amplitude da cavidade.

$q$  = números inteiros, por exemplo., 2, 4, 6, 8,.....

$R$  = raio do eixo rotativo.

A espessura da película de lubrificante para mancal rugoso é dada pela equação abaixo,

$$H = h - \delta \quad (6.4)$$

sendo  $h$  definido pela Eq. (3.1d).

As seguintes variáveis adimensionais foram utilizadas para obtenção dos perfis para os modelos rugosos, a espessura da película de lubrificante e sua derivada, e demais parâmetros definidos anteriormente e necessários na solução da equação de Reynolds:

$$\tilde{a} = \frac{A}{c}; \tilde{b} = \frac{R}{w}; \tilde{\delta} = \frac{\delta}{c} \quad (6.5a-c)$$

- Perfis para os modelos rugosos adimensionais

$$\tilde{\delta}_s = \tilde{a} \cdot \text{sen}(\gamma\phi) \quad (6.6)$$

$$\tilde{\delta}_{oc} = -\left(\frac{2\tilde{a}}{\pi}\right) \left\{ 2^* \sum_{q=2,4,6,\dots,\infty} \frac{\cos(q\gamma\phi)}{q^2-1} - 1 \right\} \quad (6.7)$$

$$\tilde{\delta}_{mo} = -\left(\frac{\tilde{a}}{\pi}\right) \left\{ 2^* \sum_{q=2,4,6,\dots,\infty} \frac{\cos(q\gamma\phi)}{q^2-1} - \frac{\pi \cdot \text{sen}(\gamma\phi)}{2} - 1 \right\} \quad (6.8)$$

Sendo,  $\gamma(\theta_L) = \pi \cdot \tilde{b} \cdot \theta_L$ .

- Espessura da película lubrificante adimensional

$$\tilde{H} = \tilde{h} - \tilde{\delta} \quad (6.9)$$

sendo que  $\tilde{\delta}$  é substituído pelas Eqs. (6.1) a (6.3) para se obter os diferentes tipos de rugosidade e  $\tilde{h}$  é definido pela Eq. (3.36f).

- Derivada dos perfis de rugosidade adimensional

$$\frac{\partial \tilde{\delta}_s}{\partial \phi} = \tilde{a} \cdot \gamma \cdot \cos(\gamma\phi) \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{\delta}_{oc}}{\partial \phi} = \frac{4\tilde{a}}{\pi} \cdot \gamma \cdot \sum_{q=2,4,6,\dots,\infty} \frac{q \cdot \text{sen}(q\gamma\phi)}{q^2-1} \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\delta}_{mo}}{\partial \phi} = -\frac{\tilde{a}}{\pi} \left\{ \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cos(\gamma\phi) - 2\gamma \cdot \sum_{q=2,4,6,\dots,\infty} \frac{q \cdot \text{sen}(q\gamma\phi)}{q^2 - 1} \right\} \quad (6.12)$$

- Derivada da espessura da película lubrificante adimensional

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \phi} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \phi} - \frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \phi} \quad (6.13)$$

Sendo que  $\partial \tilde{\delta} / \partial \phi$  é substituído pelas Eqs. (6.10) a (6.12) para se obter os diferentes tipos de rugosidade e  $\partial \tilde{h} / \partial \phi$  é definido pela Eq. (3.36g).

Uma vez obtidas as Eqs. (6.9) e (6.13) e substituindo-se na Eq. (5.1a) obtém-se uma nova equação de Reynolds, a qual considera a rugosidade na superfície do mancal conforme os tipos definidos acima, porém o formalismo de solução é o mesmo apresentado no Capítulo 5.

## 6.2 - COMPARAÇÃO ENTRE MANCAL RUGOSO E MANCAL LISO

Para efeito de comparação os parâmetros considerados foram: variação da pressão máxima, capacidade de carga suportada, coeficiente de atrito e escoamento lateral.

- Percentual de variação da pressão máxima

$$\left[ \frac{(P_R - P)}{P} \right] \times 100 \quad (6.14)$$

- Percentual de variação da carga suportada

$$[(\tilde{w}_R - \tilde{w})/\tilde{w}] \times 100 \quad (6.15)$$

– Coeficiente de atrito

$$[(C_{fR} - C_f)/C_f] \times 100 \quad (6.16)$$

– Escoamento lateral ou axial

$$[(\tilde{Q}_{SR} - \tilde{Q}_S)/\tilde{Q}_S] \times 100 \quad (6.17)$$

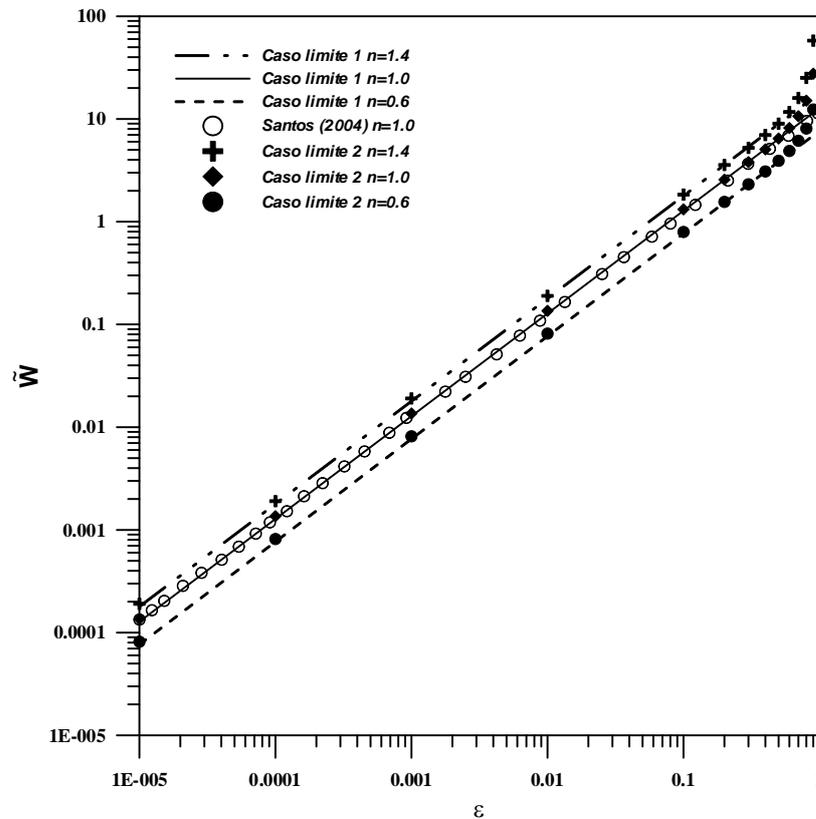
## CAPÍTULO 7

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### 7.1 - SOLUÇÕES ANALÍTICAS DA EQUAÇÃO DE REYNOLDS: CASOS LIMITES

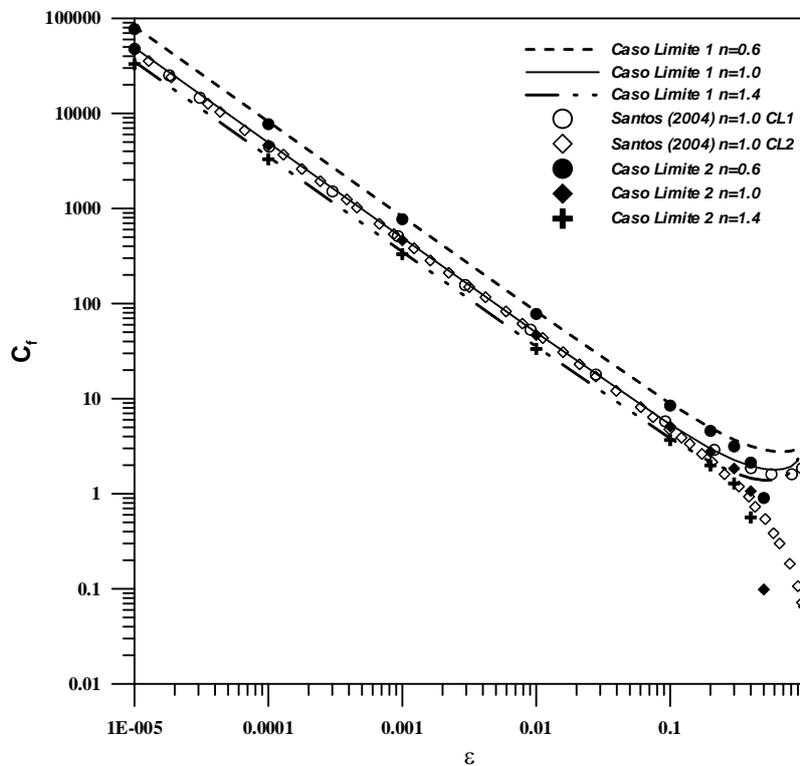
Considerando as hipóteses assumidas para os casos limites 1 e 2, foram obtidas as Eqs. (4.1) e (4.5), respectivamente. Ambas equações foram resolvidas analiticamente. Para o caso limite 1 foi utilizado o software Mathematica Versão 10.0 e para caso limite 2 foi desenvolvido um programa na plataforma Fortran PowerStation, no qual utilizou-se a subrotina ZREAL da biblioteca IMSL (2014) com tolerância de  $10^{-12}$ , esta subrotina utiliza o método de Müller para encontrar as raízes de funções. Todas simulações foram executadas em computador pessoal, com as seguintes especificações: Processador Intel® Core™ i5 – 4210U CPU @ 1.70 GHz.

Os resultados obtidos para a capacidade de carga e o coeficiente de atrito, em função de  $\varepsilon$  e para índices da lei da potência  $n=0,6, 1,0$  e  $1,4$ , são apresentados a seguir.



**Figura 7.1.** Variação da Capacidade de Carga em função de  $\varepsilon$  para mancais longos para os casos limites 1 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) e 2 (para qualquer  $\varepsilon$ ), para  $n=0,6, 1,0$  e  $1,4$ .

Na Figura 7.1 é apresentado uma comparação dos resultados obtidos para a capacidade de carga em função de  $\varepsilon$  para a formulação considerando  $\varepsilon$  pequeno (caso limite 1) e para qualquer  $\varepsilon$  (caso limite 2), para índices do fluido da lei da potência  $n=0,6$ ,  $1,0$  e  $1,4$ . Para o caso limite 1 nota-se que o resultado para  $n=1,0$  coincide com o obtido por SANTOS (2004), que estudou mancais radiais hidrodinâmicos lubrificadas com fluidos newtonianos ( $n=1,0$ ), o que garante a solução do problema para este caso. Observa-se também uma boa concordância entre os casos limite até excentricidade  $0,4$ , a partir daí a formulação para o caso limite 1 diverge em relação ao caso limite 2, devido à restrição do caso limite 1. Importante registrar o aumento da capacidade de carga com o aumento dos valores da excentricidade  $\varepsilon$  e do índice do fluido da lei da potência  $n$ .



**Figura 7.2.** Variação do Coeficiente de Atrito em função de  $\varepsilon$  para mancais longos para os casos limites 1 ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) e 2 (para qualquer  $\varepsilon$ ), para  $n=0,6$ ,  $1,0$  e  $1,4$ .

Na Figura 7.2 são apresentados os resultados obtidos para o coeficiente de atrito em função de  $\varepsilon$  para os casos limites 1 e 2, para índices do fluido da lei da potência  $n=0,6$ ,  $1,0$  e  $1,4$ . Neste resultado a concordância entre os casos limites ocorre até excentricidade  $0,1$ , novamente devido à restrição do caso limite 1. Os resultados para  $n=1,0$ , também coincidem com os resultados obtidos por SANTOS (2004). Observa-se também a redução do coeficiente de atrito com aumento de  $\varepsilon$  e  $n$ .

## 7.2 - SOLUÇÃO UTILIZANDO A GITT – FORMULAÇÃO GERAL

### 7.2.1 - Mancal Liso

Nesta seção são apresentados os resultados para o campo de pressão, o coeficiente de atrito ( $C_f$ ), a capacidade de carga ( $\tilde{W}$ ) e a taxa de escoamento axial ( $Q_s$ ) para o mancal radial liso. Para mostrar a análise do mancal é observado o comportamento de convergência dos potenciais para  $\theta_L$ ,  $\tilde{W}$  (carga),  $\varphi$  (ângulo de ação) e  $P_{\max}$  (pressão máxima) no plano médio do mancal radial. Também será feita uma comparação entre os resultados de convergência obtidos no presente trabalho com os apresentados por SANTOS *et al.* (2012), para fluidos newtonianos, além da comparação com resultados para fluidos não-newtonianos disponíveis na literatura.

O código computacional desenvolvido foi validado utilizando-se os resultados apresentados por DIEN e ELROD (1983), LI *et al.* (1996), RAGHUNANDANA e MAJUMDAR (1999) e SANTOS *et al.* (2012) para várias excentricidades específicas ( $\varepsilon$ ), razão de aspecto ( $\lambda=2R/L$ ) e índice de comportamento reológico ( $n$ ) para fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência.

**Tabela 7.1.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  no plano médio do mancal para  $\varepsilon = 10^{-5}$  e  $\lambda = 10^{-5}$ , para o caso  $n=0,6, 1$  e  $1,4$ .

NT	$\theta_L$			$\varphi$ (graus)			$\tilde{W} \times 10^3$			$P_{\max} \times 10^4$		
	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$
10	<b>257,5</b>	<b>257,5</b>	<b>257,5</b>	<b>79,91</b>	<b>70,91</b>	<b>70,91</b>	0,078	0,130	0,183	0,052	0,871	0,122
30	257,5	257,5	257,5	70,91	70,91	70,91	0,084	0,134	0,188	0,050	0,836	0,117
50	257,5	257,5	257,5	70,91	70,91	70,91	<b>0,081</b>	<b>0,135</b>	<b>0,189</b>	0,050	0,829	0,116
70	257,5	257,5	257,5	70,91	70,91	70,91	0,081	0,135	0,189	0,050	0,826	0,116
90	257,5	257,5	257,5	70,91	70,91	70,91	0,081	0,135	0,189	<b>0,049</b>	<b>0,825</b>	<b>0,115</b>
110	257,5	257,5	257,5	70,91	70,91	70,91	0,081	0,135	0,190	0,049	0,824	0,115
130	257,5	257,5	257,5	70,91	70,91	70,91	0,081	0,135	0,190	0,049	0,823	0,115
*	--	<b>257,5</b>	--	--	<b>70,91</b>	--	--	<b>0,135</b>	--	--	<b>0,823</b>	--
**	<b>257,5</b>	<b>257,5</b>	<b>257,5</b>	<b>70,91</b>	<b>70,91</b>	<b>70,91</b>	<b>0,082</b>	<b>0,136</b>	<b>0,190</b>	<b>0,049</b>	<b>0,819</b>	<b>0,115</b>

\*Resultados convergidos apresentados por SANTOS *et al.* (2012)

\*\* Resultados obtidos na solução analítica para mancal longo.

Na Tabela 7.1, para  $\varepsilon = 10^{-5}$  e  $\lambda = 10^{-5}$ , verifica-se que poucos termos são necessários para a convergência de  $\theta_L$  e  $\varphi$ , ou seja, a convergência se dá com menos de 10 termos na série, para todos os valores do índice da lei da potência. No entanto,  $\tilde{W}$  e

$P_{\max}$ , tem uma convergência um pouco mais lenta, começando a convergir em torno de 50 e 90 termos, respectivamente. Observa-se também uma excelente concordância dos resultados obtidos nesta análise com resultados apresentados por SANTOS *et al.* (2012) para valores de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$ , e quando estes são comparados com os resultados obtidos na solução analítica também temos uma excelente concordância, o que valida o código computacional desenvolvido.

**Tabela 7.2.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  para o plano médio do mancal para  $\varepsilon = 0,5$  e  $\lambda = 10^{-5}$ , para o caso  $n=0,6, 1$  e  $1,4$ .

NT	$\theta_L$			$\varphi$ (graus)			$\tilde{W}$			$P_{\max}$		
	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$
10	<b>223,33</b>	<b>219,70</b>	<b>216,50</b>	<b>60,56</b>	<b>58,30</b>	<b>55,87</b>	3,75	6,19	8,63	2,78	4,75	6,91
30	223,33	219,70	216,50	60,56	58,30	55,87	3,86	6,37	8,87	2,67	4,57	6,64
50	223,33	219,70	216,50	60,56	58,30	55,87	3,88	6,40	8,92	2,65	4,53	6,58
70	223,33	219,70	216,50	60,56	58,30	55,87	3,89	6,42	8,94	2,64	4,52	6,56
90	223,33	219,70	216,50	60,56	58,30	55,87	<b>3,90</b>	<b>6,43</b>	<b>8,96</b>	<b>2,63</b>	<b>4,51</b>	<b>6,54</b>
110	223,33	219,70	216,50	60,56	58,30	55,87	<b>3,90</b>	<b>6,43</b>	<b>8,96</b>	<b>2,63</b>	<b>4,51</b>	<b>6,54</b>
130	223,33	219,70	216,50	60,56	58,30	55,87	<b>3,90</b>	<b>6,43</b>	<b>8,96</b>	<b>2,63</b>	<b>4,51</b>	<b>6,54</b>
*	--	<b>219,70</b>	--	--	<b>58,30</b>	--	--	<b>6,43</b>	-	--	<b>4,51</b>	--
**	<b>223,33</b>	<b>219,70</b>	<b>216,50</b>	<b>60,56</b>	<b>58,30</b>	<b>55,87</b>	<b>3,916</b>	<b>6,45</b>	<b>8,99</b>	<b>2,616</b>	<b>4,475</b>	<b>6,50</b>

\* Resultados convergidos apresentados por SANTOS *et al.* (2012)

\*\* Resultados obtidos na solução analítica para mancal longo.

Na Tabela 7.2, para excentricidade específica  $\varepsilon = 0,5$ , razão de aspecto  $\lambda = 10^{-5}$  e índice da lei da potência  $n=0,6, 1,0$  e  $1,4$ , observa-se uma boa taxa de convergência também, pois para  $\theta_L$  e  $\varphi$  a convergência ocorre com menos de 10 termos da série, enquanto  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$ , assim como na Tabela 7.1, onde também tem a característica de mancal longo, converge mais lentamente em torno de 90 termos da série. Verifica-se que os resultados obtidos aqui estão em concordância com os resultados apresentados também por SANTOS *et al.* (2012) para fluido newtonianos ( $n=1,0$ ), porém estes mesmos resultados quando comparados com a solução analítica, apresentam uma pequena diferença, na segunda casa decimal, para valores de  $\tilde{W}$  e na primeira casa decimal, em  $n=1,0$ , para valores de  $P_{\max}$ . No entanto, mais uma vez é garantida a validação dos códigos computacionais desenvolvidos no presente trabalho.

**Tabela 7.3.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  para o plano médio do mancal para  $\varepsilon = 0,1$  e  $\lambda = 10^{-5}$ , para os casos de  $n=0,6, 1$  e  $1,4$ .

NT	$\theta_L$			$\varphi$ (graus)			$\tilde{W}$			$P_{\max}$		
	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$
10	<b>250,29</b>	<b>249,22</b>	<b>248,17</b>	<b>69,30</b>	<b>69,03</b>	<b>68,75</b>	0,763	1,265	1,762	0,511	0,849	1,184
30	250,29	249,22	248,17	69,30	69,03	68,75	0,784	1,300	1,811	0,491	0,815	1,137
50	250,29	249,22	248,17	69,30	69,03	68,75	0,788	1,308	1,821	0,487	0,809	1,128
70	250,29	249,22	248,17	69,30	69,03	68,75	0,790	1,311	1,825	0,485	0,806	1,124
90	250,29	249,22	248,17	69,30	69,03	68,75	0,791	1,312	1,828	0,484	0,804	1,121
110	250,29	249,22	248,17	69,30	69,03	68,75	<b>0,792</b>	<b>1,313</b>	<b>1,830</b>	<b>0,483</b>	<b>0,803</b>	<b>1,120</b>
130	250,29	249,22	248,17	69,30	69,03	68,75	<b>0,792</b>	<b>1,313</b>	<b>1,830</b>	<b>0,483</b>	<b>0,803</b>	<b>1,120</b>
*	<b>250,29</b>	<b>249,22</b>	<b>248,17</b>	<b>69,30</b>	<b>69,03</b>	<b>68,75</b>	<b>0,794</b>	<b>1,318</b>	<b>1,836</b>	<b>0,481</b>	<b>0,798</b>	<b>1,113</b>

\* Resultados obtidos na solução analítica para mancal longo.

**Tabela 7.4.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  para o plano médio do mancal para  $\varepsilon = 0,9$  e  $\lambda = 10^{-5}$ , para os casos de  $n=0,6, 1$  e  $1,4$ .

NT	$\theta_L$			$\varphi$ (graus)			$\tilde{W}$			$P_{\max}$		
	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$
10	195,38	<b>193,20</b>	191,69	<b>38,94</b>	<b>31,7</b>	<b>25,55</b>	11,86	26,54	55,62	15,18	40,90	101,47
30	195,38	193,20	191,69	38,94	31,66	25,55	12,19	27,28	57,18	14,58	39,38	97,48
50	195,38	193,20	191,69	38,94	31,66	25,55	12,26	27,43	57,49	14,46	39,06	96,67
70	195,38	193,20	191,69	38,94	31,66	25,55	12,28	27,49	57,63	14,40	38,92	96,32
90	195,38	193,20	191,69	38,94	31,66	25,55	12,30	27,53	57,70	14,38	38,84	96,13
110	195,38	193,20	191,69	38,94	31,66	25,55	<b>12,31</b>	<b>27,54</b>	<b>57,75</b>	<b>14,36</b>	<b>38,81</b>	<b>96,00</b>
130	195,38	193,20	191,69	38,94	31,66	25,55	<b>12,31</b>	<b>27,54</b>	<b>57,75</b>	<b>14,34</b>	<b>38,81</b>	<b>96,00</b>
*	--	<b>193,20</b>	--	--	<b>31,66</b>	--	--	<b>27,54</b>	--	--	<b>38,81</b>	--
**	<b>195,38</b>	<b>193,20</b>	<b>191,69</b>	<b>38,94</b>	<b>31,66</b>	<b>25,55</b>	<b>12,35</b>	<b>27,65</b>	<b>57,96</b>	<b>14,27</b>	<b>38,56</b>	<b>95,50</b>

\* Resultados convergidos apresentados por SANTOS (2004)

\*\* Resultados obtidos na solução analítica para mancal longo.

As Tabelas 7.3 e 7.4, servem também para analisar a convergência nos casos limite dos valores da excentricidade específica, visto que a mesma varia na faixa de 0 a 1 ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ). Os resultados mostram uma rápida convergência para  $\theta_L$  e  $\varphi$ , com menos de 10 termos na série, já a carga  $\tilde{W}$  e a pressão  $P_{\max}$  convergem mais lentamente e em torno de 110 termos da série. Na Tabela 7.4, observa-se uma excelente concordância com resultados apresentados por SANTOS (2004) para todos os parâmetros, no caso de  $n=1$ , assim como para  $\theta_L$  e  $\varphi$ , quando comparados com a solução analítica para mancal longo nas Tabelas 7.3 e 7.4, porém os parâmetros,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$ , a concordância com a solução analítica, ocorre até a segunda casa decimal pela Tabela 7.3, o que não ocorre tão bem na

Tabela 7.4. Assim, mais uma vez, os resultados validam o código computacional desenvolvido.

Comparando as tabelas de convergência apresentadas anteriormente, observa-se que o fato de o fluido ser não-newtoniano não interfere no processo de convergência, pois com mesma excentricidade específica e mancal longo, os resultados das Tabelas 7.2, 7.3 e 7.4, para  $\theta_L$  e  $\varphi$ , convergiram com menos de 10 termos da série, e para  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$ , convergiram em torno de 90 e 110 termos da série, respectivamente.

**Tabela 7.5.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  para o plano médio do mancal para  $\varepsilon=10^{-5}$  e  $\lambda = 0,5$ , para os casos de  $n=0,6, 1$  e  $1,4$ .

NT	$\theta_L$			$\varphi$ (graus)			$\tilde{W} \times 10^4$			$P_{\max} \times 10^4$		
	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$
10	<b>239,8</b>	<b>233,0</b>	<b>228,2</b>	79,11	80,57	81,70	<b>0,420</b>	<b>0,560</b>	0,657	0,357	0,490	<b>0,584</b>
30	239,8	233,0	228,2	<b>79,16</b>	<b>80,60</b>	<b>81,73</b>	0,420	0,560	<b>0,658</b>	<b>0,356</b>	<b>0,489</b>	0,584
50	239,8	233,0	228,2	79,16	80,60	81,73	0,420	0,560	0,658	0,356	0,489	0,584
70	239,8	233,0	228,2	79,16	80,60	81,73	0,420	0,560	0,658	0,356	0,489	0,584
*	--	<b>233,0</b>	--	--	<b>80,60</b>	--	--	<b>0,560</b>	--	--	<b>0,489</b>	--

\* Resultados convergidos apresentados por SANTOS et al. (2012)

Na Tabela 7.5 pode-se observar que a convergência de  $\theta_L$ ,  $W$  para  $n=0,6$  e  $1,0$ , e  $P_{\max}$  para  $n=1,4$ , se dá com menos de 10 termos da série, enquanto  $\varphi$  para todos valores de  $n$ ,  $\tilde{W}$  para  $n=1,4$ , e  $P_{\max}$  para  $n=0,6$  e  $1,0$ , com uma convergência um pouco mais lenta, começa a convergir em torno de 30 termos. Também se pode verificar que os resultados obtidos aqui estão em concordância com os resultados obtidos por SANTOS et al. (2012) para  $n=1,0$ .

**Tabela 7.6.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  para o plano médio do mancal para  $\varepsilon = 0,5$  e  $\lambda = 0,1$ , para os casos de  $n=0,6, 1$  e  $1,4$ .

NT	$\theta_L$			$\varphi$ (graus)			$\tilde{W} \times 10^4$			$P_{\max} \times 10^4$		
	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$
10	223,1	219,5	216,3	61,59	59,63	57,28	3,561	5,571	7,908	2,696	4,588	6,649
30	<b>223,3</b>	<b>219,7</b>	<b>216,5</b>	62,28	60,22	57,80	3,568	5,754	7,906	2,623	4,482	6,508
50	223,3	219,7	216,5	<b>62,33</b>	<b>60,26</b>	<b>57,83</b>	<b>3,568</b>	<b>5,753</b>	<b>7,905</b>	<b>2,618</b>	<b>4,476</b>	<b>6,500</b>
70	223,3	219,7	216,5	62,34	60,26	57,84	3,567	5,753	7,905	2,617	4,475	6,499
90	223,3	219,7	216,5	62,34	60,27	57,84	3,567	5,753	7,905	2,617	4,474	6,498
*	--	<b>219,7</b>	--	--	<b>60,27</b>	--	--	<b>5,75</b>	--	--	<b>4,47</b>	--

\* Resultados convergidos apresentados por SANTOS et al. (2012)

**Tabela 7.7.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  para o plano médio do mancal para  $\varepsilon = 0,9$  e  $\lambda = 0,1$ , para os casos de  $n=0,6, 1$  e  $1,4$ .

NT	$\theta_L$			$\varphi$ (graus)			$\tilde{W}$			$P_{\max}$		
	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$	$n=0,6$	$n=1,0$	$n=1,4$
10	195,31	193,14	191,64	38,67	31,38	25,31	11,64	26,04	54,72	14,98	40,49	100,30
30	195,35	193,17	191,67	38,81	31,50	25,42	11,76	26,28	55,24	14,40	38,89	96,27
50	195,36	193,18	191,68	38,87	31,55	25,47	<b>11,75</b>	26,27	55,20	14,32	38,67	95,72
70	<b>195,37</b>	<b>193,19</b>	<b>191,69</b>	<b>38,90</b>	<b>31,57</b>	25,48	11,75	26,26	55,18	14,29	38,61	95,56
90	195,37	193,19	191,69	38,90	31,57	<b>25,49</b>	11,75	<b>26,25</b>	<b>55,18</b>	<b>14,28</b>	<b>38,59</b>	<b>95,50</b>
110	195,37	193,19	191,69	38,90	31,57	25,49	11,75	26,25	55,17	14,28	38,59	95,50

Nas Tabelas 7.6 e 7.7 é mostrada a convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  para  $\varepsilon = 0,9$  e  $0,5$  e  $\lambda = 0,1$ , respectivamente. Verifica-se em todas as Tabelas uma boa taxa de convergência para os parâmetros analisados. A Tabela 7.6 mostra que a convergência para  $\theta_L$  se dá em torno de 30 termos, de  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  em torno de 50 termos da série, com até duas casas decimais, exceto  $\varphi$  para  $n=0,6$  e  $P_{\max}$  para  $n=1,4$ , nota-se também que resultados obtidos estão em concordância com os resultados de SANTOS *et al.* (2012) para  $n=1,0$ . Finalmente na Tabela 7.7 observa-se que para  $\theta_L$  e  $\varphi$  a convergência se dá em torno de 70 termos, com até duas casas decimais, exceto  $\varphi$  para  $n=1,4$ ,  $\tilde{W}$  em torno de 50 termos para  $n=0,6$  e 90 termos para  $n=1,0$  e  $1,4$ , e  $P_{\max}$  em torno de 90 termos da série para todos os valores de  $n$ .

Analisando as tabelas de convergência acima nota-se que para todos os casos analisados obteve-se uma boa taxa de convergência com poucos termos de série sendo requerido, e a comparação com os dados obtidos aqui com os obtidos por SANTOS *et al.* (2012) e SANTOS (2004) e a solução analítica para mancal longo, mostrou-se satisfatória, garantindo a validação dos códigos computacionais desenvolvidos.

**Tabela 7.8.** Comparação dos resultados de  $S$  (Número de Sommerfeld) e  $\varphi$  com os disponíveis na literatura, para  $\lambda=0,5$ .

N	Autores	Excentricidade específica ( $\varepsilon$ )					
		0,4		0,6		0,8	
		S	$\varphi$	S	$\varphi$	S	$\varphi$
0,4	Dien e Elrod (1983)	0,230	65,1	0,140	58,5	0,081	49,0
	<b>Presente trabalho</b>	<b>0,2360</b>	<b>67,9</b>	<b>0,1423</b>	<b>61,4</b>	<b>0,0834</b>	<b>51,4</b>
0,6	Dien e Elrod (1983)	0,170	64,4	0,100	56,8	0,054	45,6
	LI <i>et al.</i> (1996) [ $S=1/\tilde{W} \pi$ ]	0,171	64,0	0,100	56,3	0,054	45,3
	<b>Presente trabalho</b>	<b>0,1752</b>	<b>66,7</b>	<b>0,1023</b>	<b>59,2</b>	<b>0,0559</b>	<b>48,0</b>
0,8	Dien e Elrod (1983)	0,140	63,5	0,079	54,7	0,040	42,4
	<b>Presente trabalho</b>	0,1435	65,6	0,0810	57,1	0,0409	44,7
1,0	Dien e Elrod (1983)	0,120	62,4	0,066	52,6	0,030	39,4
	<b>Presente trabalho</b>	<b>0,1237</b>	<b>64,3</b>	<b>0,0559</b>	<b>48,0</b>	<b>0,0310</b>	<b>41,4</b>

**Tabela 7.9.** Comparação dos resultados de  $S$  (Número de *Sommerfeld*) e  $\varphi$  com os disponíveis na literatura, para  $\lambda=1,0$ .

$n$	Autores	Excentricidade específica ( $\varepsilon$ )					
		0,4		0,6		0,8	
		$S$	$\varphi$	$S$	$\varphi$	$S$	$\varphi$
	<i>Dien e Elrod (1983)</i>	0,390	66,3	0,220	57,7	0,110	46,6
0,4	<i>Raghunandana e Majumdar (1999)</i>	0,3783	--	0,2110	--	0,1096	--
	<b>Presente trabalho</b>	<b>0,3964</b>	<b>67,5</b>	<b>0,2202</b>	<b>59,3</b>	<b>0,1156</b>	<b>48,4</b>
	<i>Dien e Elrod (1983)</i>	0,330	65,3	0,170	55,3	0,079	42,7
0,6	<i>Raghunandana e Majumdar (1999)</i>	0,3190	--	0,1676	--	0,0765	--
	<i>LI et al. (1996) [S=1/<math>\tilde{W}</math> <math>\pi</math>]</i>	0,3259	64,9	0,1696	55,0	0,0784	42,4
	<b>Presente trabalho</b>	<b>0,3273</b>	<b>66,2</b>	<b>0,1718</b>	<b>56,6</b>	<b>0,0808</b>	<b>44,2</b>
	<i>Dien e Elrod (1983)</i>	0,290	63,9	0,140	52,7	0,059	39,3
0,8	<i>Raghunandana e Majumdar (1999)</i>	0,2841	--	0,1406	--	0,0566	--
	<b>Presente trabalho</b>	<b>0,2885</b>	<b>64,8</b>	<b>0,1431</b>	<b>53,9</b>	<b>0,0600</b>	<b>40,6</b>
	<i>Dien e Elrod (1983)</i>	0,260	62,5	0,120	50,5	0,045	36,4
1,0	<i>Raghunandana e Majumdar (1999)</i>	0,2593	--	0,1203	--	0,0428	--
	<b>Presente trabalho</b>	<b>0,2618</b>	<b>63,3</b>	<b>0,1224</b>	<b>51,5</b>	<b>0,0457</b>	<b>37,4</b>

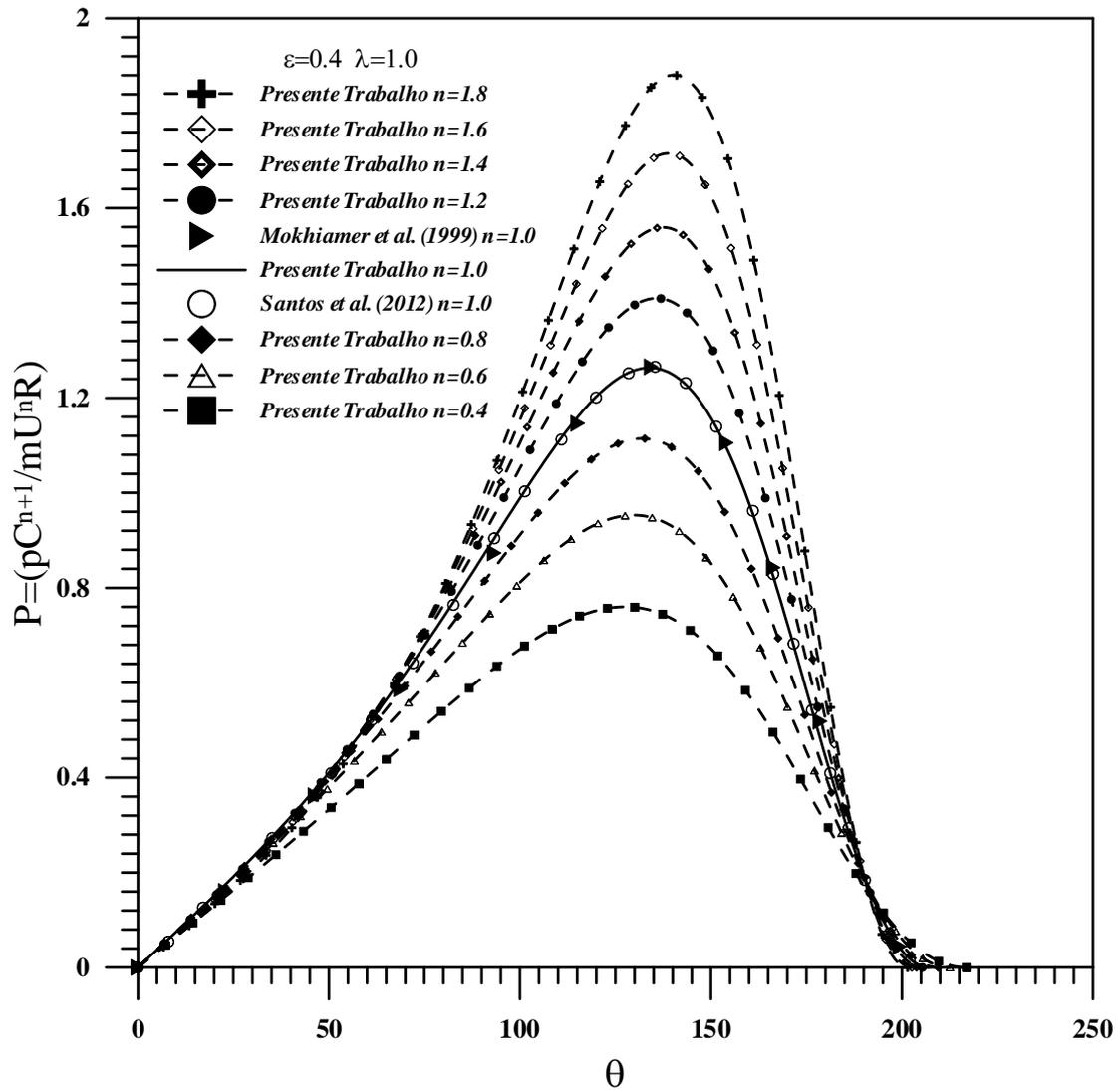
**Tabela 7.10.** Comparação dos resultados de  $S$  (Número de *Sommerfeld*) e  $\varphi$  com os disponíveis na literatura, para  $\lambda=4,0$ .

$n$	Autores	Excentricidade específica ( $\varepsilon$ )					
		0,4		0,6		0,8	
		$S$	$\varphi$	$S$	$\varphi$	$S$	$\varphi$
	<i>Dien e Elrod (1983)</i>	3,420	66,6	1,590	54,0	0,570	39,0
0,4	<b>Presente trabalho</b>	<b>3,3605</b>	<b>66,6</b>	<b>1,5588</b>	<b>54,2</b>	<b>0,5691</b>	<b>39,3</b>
	<i>Dien e Elrod (1983)</i>	3,230	64,6	1,380	51,3	0,430	35,7
0,6	<i>LI et al. (1996) [S=1/<math>W\pi</math>]</i>	3,158	64,6	1,364	51,3	0,430	35,7
	<b>Presente trabalho</b>	<b>3,1598</b>	<b>64,7</b>	<b>1,3705</b>	<b>51,5</b>	<b>0,4351</b>	<b>36,1</b>
	<i>Dien e Elrod (1983)</i>	3,040	62,8	1,220	48,8	0,340	33,1
0,8	<b>Presente trabalho</b>	<b>2,9940</b>	<b>62,9</b>	<b>1,2150</b>	<b>49,1</b>	<b>0,3391</b>	<b>33,5</b>
	<i>Dien e Elrod (1983)</i>	2,870	61,0	1,080	46,6	0,260	30,9
1,0	<b>Presente trabalho</b>	<b>2,842</b>	<b>61,2</b>	<b>1,0790</b>	<b>46,9</b>	<b>0,2643</b>	<b>31,3</b>

As Tabelas 7.8 a 7.10 comparam os resultados obtidos no presente trabalho, para o número de *Sommerfeld* e ângulo de ação, com os resultados de DIEN e ELROD (1983), RAGHUNANDANA e MAJUMDAR (1999) e LI *et al.* (1996) para diferentes valores de excentricidade específica, de índices de comportamento reológico do fluido e de razões de aspecto. Observa-se que os resultados obtidos, para o número de *Sommerfeld*,

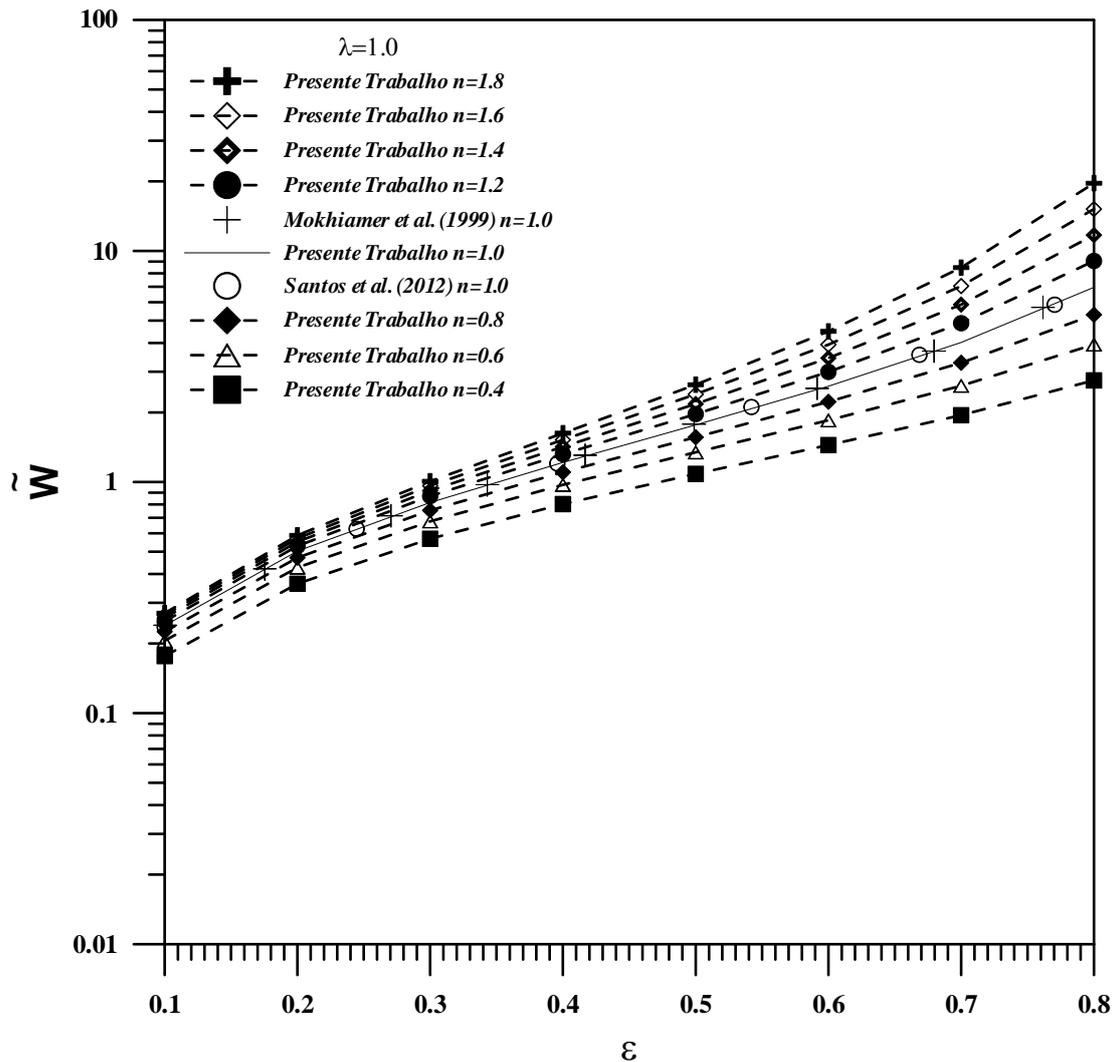
apresentam uma boa concordância, até segunda casa decimal, com os resultados de DIEN e ELROD (1983) e LI *et al.* (1996), para razões de aspecto  $\lambda=0,5$  e  $\lambda=1,0$  (Tabelas 7.8 e 7.9) e quando comparado com os resultados de RAGHUNANDANA e MAJUMDAR (1999), para razão de aspecto  $\lambda=1,0$  (Tabela 7.9) a concordância ocorre na primeira casa decimal. Observa-se, também, que os valores do número de *Sommerfeld* diminuem tanto com o aumento da excentricidade específica quanto com o aumento do índice de comportamento reológico do fluido  $n$ , o que já era de se esperar, visto que este número é inversamente proporcional a capacidade de carga. Quanto ao comportamento do número de *Sommerfeld* em relação a razão de aspecto nota-se que ambos são diretamente proporcionais. Já os resultados para o ângulo de ação, verifica-se que houve boa concordância, até segunda casa decimal na maioria dos casos, com os resultados de DIEN e ELROD (1983) e LI *et al.* (1996), para a razão de aspecto  $\lambda=4,0$ , (Tabelas 7.10), porém não há uma boa concordância para as razões de aspecto  $\lambda=0,5$  e  $\lambda=1,0$  (Tabelas 7.7 e 7.8), o que pode estar relacionado com a precisão do método aplicado, principalmente a malha utilizada, visto que ambos autores utilizaram o método das diferenças finitas na solução. Nota-se também que o ângulo de ação diminui com aumento dos valores de  $n$ ,  $\varepsilon$  e  $\lambda$ , sendo mais significativo a influência da excentricidade específica.

Os resultados obtidos para os parâmetros de desempenho operacional em mancais radiais, quais sejam, a distribuição da pressão adimensional na direção circunferencial, a capacidade de carga, o ângulo de ação, o coeficiente de atrito e a taxa de escoamento axial, para diferentes valores de  $n$ ,  $\varepsilon$  e  $\lambda$ , além da pressão máxima em função da posição axial  $\eta$ , para  $\varepsilon=0,4$  e  $\lambda=1,0$ , serão agora apresentados e comparados com os resultados disponíveis na literatura.



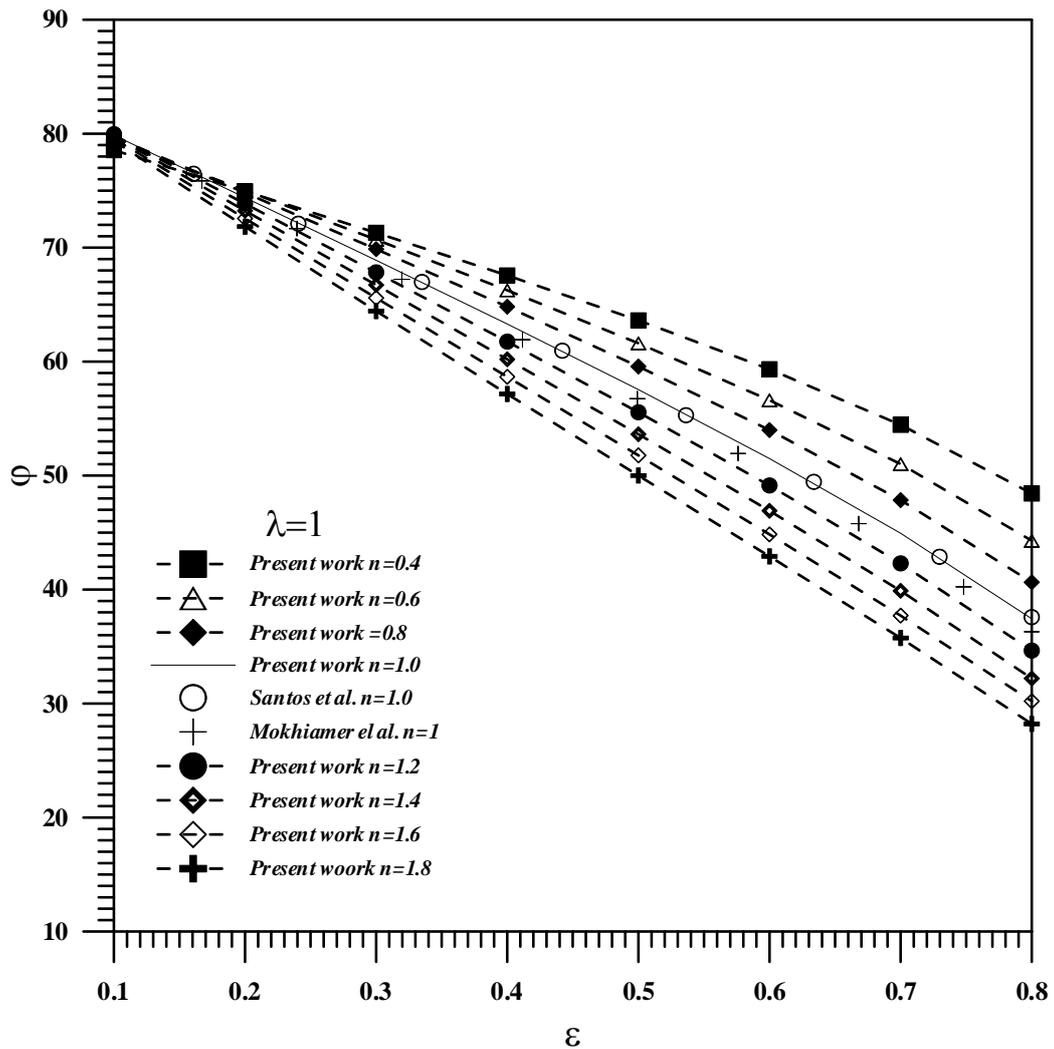
**Figura 7.3.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal para diferentes índices da lei da potência.

A Figura 7.3 apresenta os resultados obtidos para o campo de pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal para diferentes índices do fluido da lei da potência, e excentricidade específica  $\varepsilon=0,4$  e razão de aspecto  $\lambda=1,0$ . Observa-se uma excelente concordância dos resultados obtidos no presente trabalho quando comparados com os resultados obtidos por SANTOS *et al.* (2012) e MOKHIAMER *et al.* (1999), para fluidos newtonianos,  $n=1$ . Observa-se também uma diminuição no campo da pressão para valores de  $n < 1$  (pseudo-plásticos) e um aumento para valores de  $n > 1$  (dilatantes), ou seja, o aumento no índice de comportamento reológico para fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência contribui no aumento da distribuição de pressão.



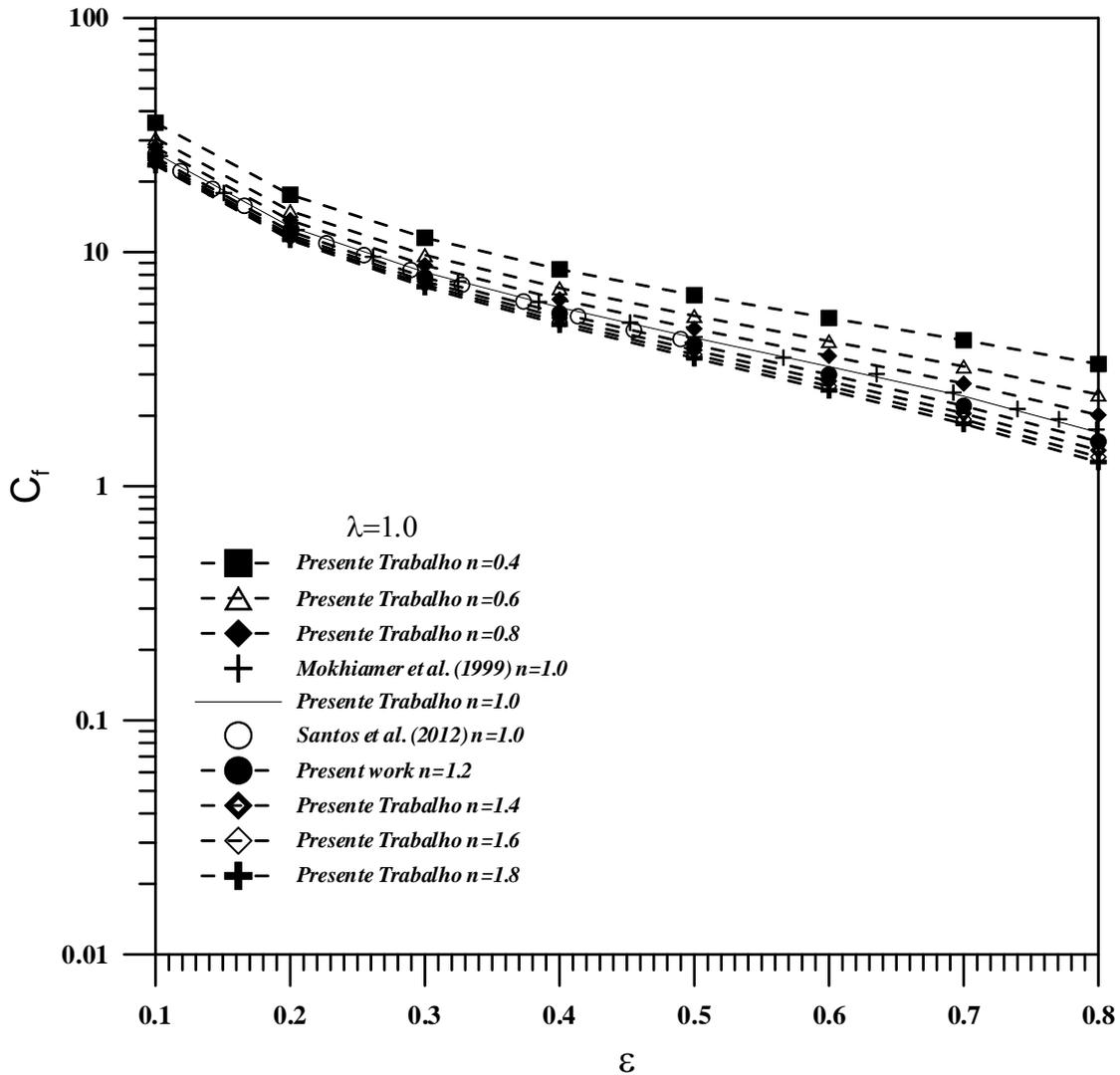
**Figura 7.4.** Capacidade de carga em função da excentricidade específica no plano médio do mancal, para diferentes índices da lei da potência.

Na Figura 7.4 são apresentados os resultados para capacidade de carga,  $\tilde{W}$ , em função da excentricidade específica e para diferentes valores do índice de comportamento reológico e razão de aspecto  $\lambda=1$ . Também é feita uma comparação da capacidade de carga do presente trabalho com o trabalho de SANTOS *et al.* (2012) e MOKHIAMER *et al.* (1999), para fluidos newtonianos e mais uma vez verifica-se a excelente concordância dos resultados. Observa-se também um aumento da capacidade de carga para valores maiores de excentricidade específica e índices do fluido não-newtoniano, ou seja, fluidos ditos dilatantes ( $n>1$ ) apresentam uma maior capacidade de carga que os fluidos newtonianos e que os fluidos ditos pseudo-plásticos ( $n<1$ ), o que melhora a eficiência de funcionamento do mancal, por esta razão justifica-se um aumento na aplicação industrial de fluidos que obedecem a lei da potência.



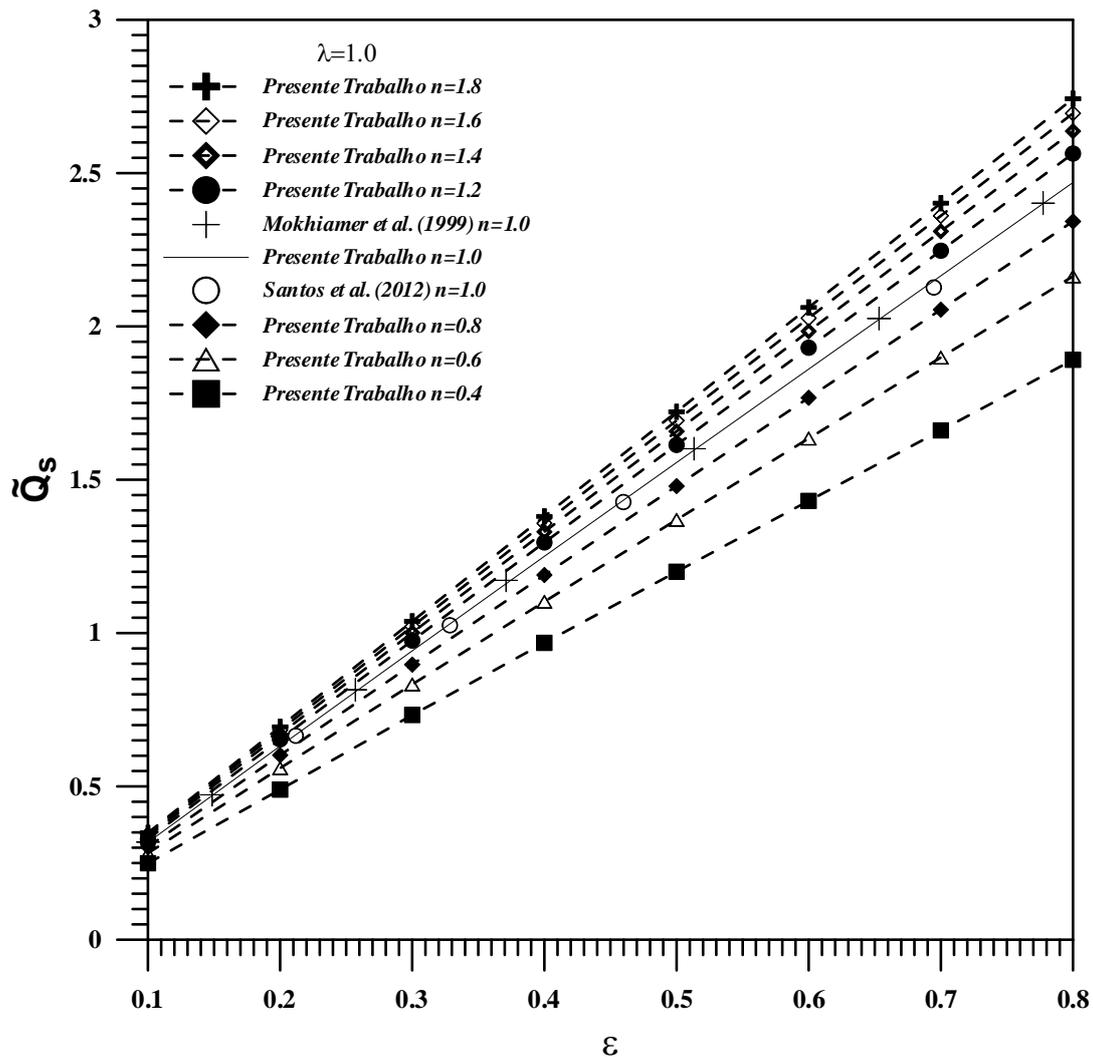
**Figura 7.5.** Ângulo da ação em função da excentricidade específica, para diferentes índices da lei da potência.

A Figura 7.5 mostra o ângulo de ação em função da excentricidade específica para diferentes índices de comportamento reológico e razão de aspecto  $\lambda=1,0$ . Os resultados obtidos apresentam uma boa concordância com os resultados de SANTOS *et al.* (2012) e MOKHIAMER *et al.* (1999), para fluidos newtonianos ( $n=1,0$ ). Nota-se também uma diminuição tanto com o aumento do índice do fluido não-newtoniano, quanto com o aumento da excentricidade específica, ou ainda que fluidos dilatantes ( $n>1$ ) apresentam ângulo de ação menor que os fluidos newtonianos ( $n=1,0$ ) e que os fluidos pseudoplásticos ( $n<1,0$ ).



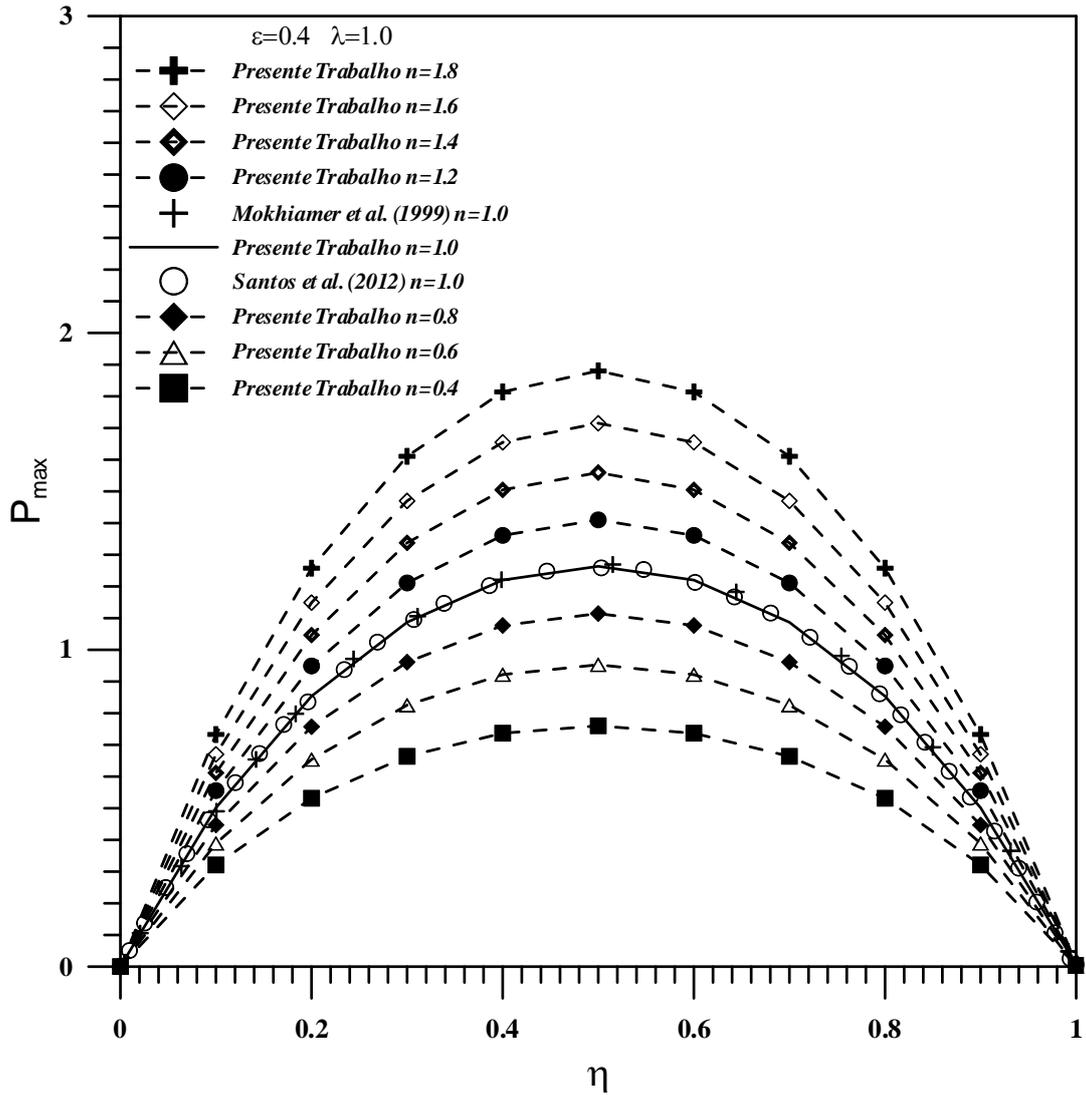
**Figura 7.6.** Coeficiente de atrito em função da excentricidade específica no plano médio do mancal para diferentes índices da lei da potência.

Na Figura 7.6 são apresentados os resultados de coeficiente de atrito,  $C_f$ , em função da excentricidade específica e para diferentes valores do índice do fluido não-newtoniano, e os mesmos são comparados com resultados de SANTOS *et al.* (2012) e MOKHIAMER *et al.* (1999), para fluidos newtonianos. Pode-se observar uma excelente concordância entre os resultados. Também se observa que o índice de comportamento reológico do fluido não-newtoniano que obedece a lei da potência tem influência determinante no parâmetro coeficiente de atrito. Neste caso, o aumento de  $n$  diminuem o coeficiente de atrito, ou seja, melhora o desempenho operacional do mancal.



**Figura 7.7.** Taxa de escoamento axial em função da excentricidade específica no plano médio do mancal para diferentes índices da lei da potência.

Na Figura 7.7 são apresentados os resultados para o escoamento lateral,  $Q_s$ , em função da excentricidade específica “ $\varepsilon$ ” e para diferentes valores do índice do fluido não-newtoniano. Observa-se uma excelente concordância dos resultados obtidos no presente trabalho quando comparados com os resultados obtidos por SANTOS *et al.* (2012) e MOKHIAMER *et al.* (1999), para  $n=1$ , ou seja, fluidos newtonianos. Observa-se, também um aumento no escoamento lateral com aumento dos valores do índice de comportamento reológico do fluido não-newtoniano que obedece a lei da potência, e com aumento dos valores da excentricidade específica.

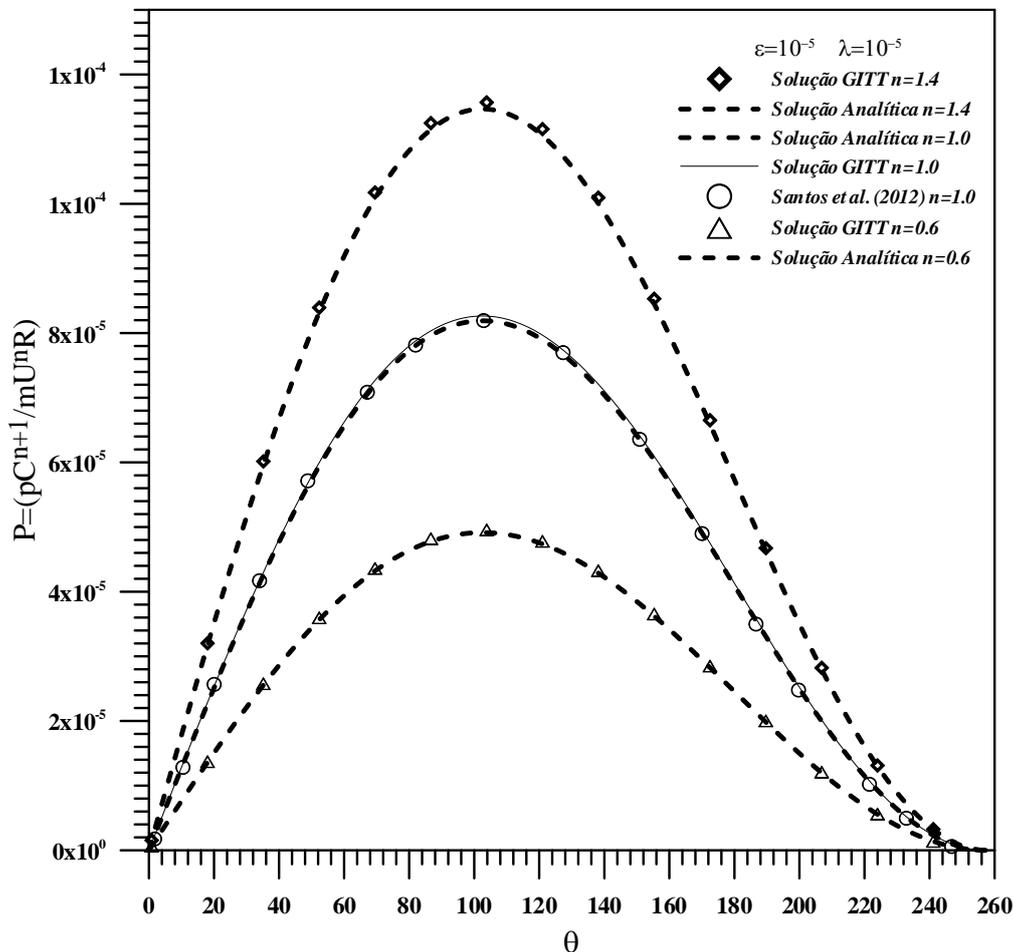


**Figura 7.8.** Pressão máxima em função da posição axial para diferentes índices da lei da potência.

A Figura 7.8 mostra a pressão máxima em função da posição axial  $\eta$  para diferentes índices da lei da potência  $n$ , excentricidade específica  $\varepsilon=0,4$  e razão de aspecto  $\lambda=1,0$ . Os resultados obtidos apresentam uma excelente concordância com os resultados de SANTOS *et al.* (2012) e MOKHIAMER *et al.* (1999), para fluidos newtonianos ( $n=1,0$ ). Nota-se também um aumento na pressão máxima com o aumento do índice do fluido não-newtoniano, confirmando o que já havia sido observado na Figura 7.3, ou seja, fluidos dilatantes ( $n>1$ ) apresentam melhor desempenho que os fluidos newtonianos ( $n=1,0$ ) e que os fluidos pseudoplásticos ( $n<1,0$ ).

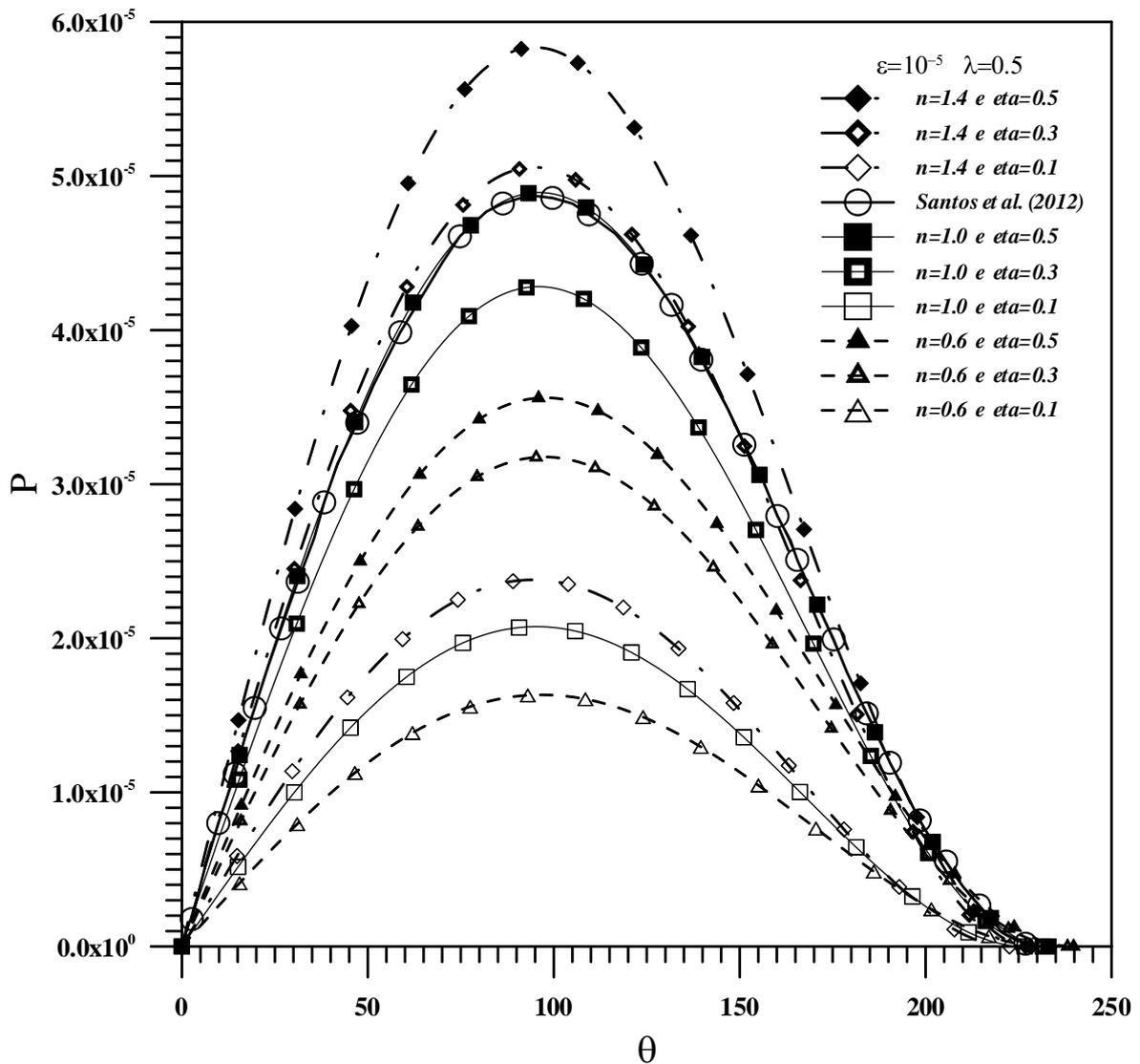
Portanto, as Figuras 7.3 a 7.8, apresentam os resultados obtidos no presente trabalho para os parâmetros de desempenho operacional de mancais radiais, quais sejam,

a distribuição da pressão circunferencial, capacidade de carga, ângulo de ação, o coeficiente de atrito e a taxa de escoamento lateral em função da excentricidade específica, além da pressão máxima em função da posição axial  $\eta$  do mancal, para diferentes índices da lei da potência, quais sejam,  $n=0,4, 0,8, 1,0, 1,2, 1,4, 1,6$  e  $1,8$ . Todos resultados obtidos, quando comparados com os resultados apresentados por SANTOS *et al.* (2012) e MOKHIAMER *et al.* (1999) para fluidos newtonianos,  $n=1,0$ , mostraram uma excelente concordância. Portanto, os dados apresentados no presente trabalho validam, mais uma vez, o código computacional desenvolvido, além de estabelecer resultados padrões, ou de referência, para trabalhos futuros com diferentes índices de comportamento reológico dos fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência.



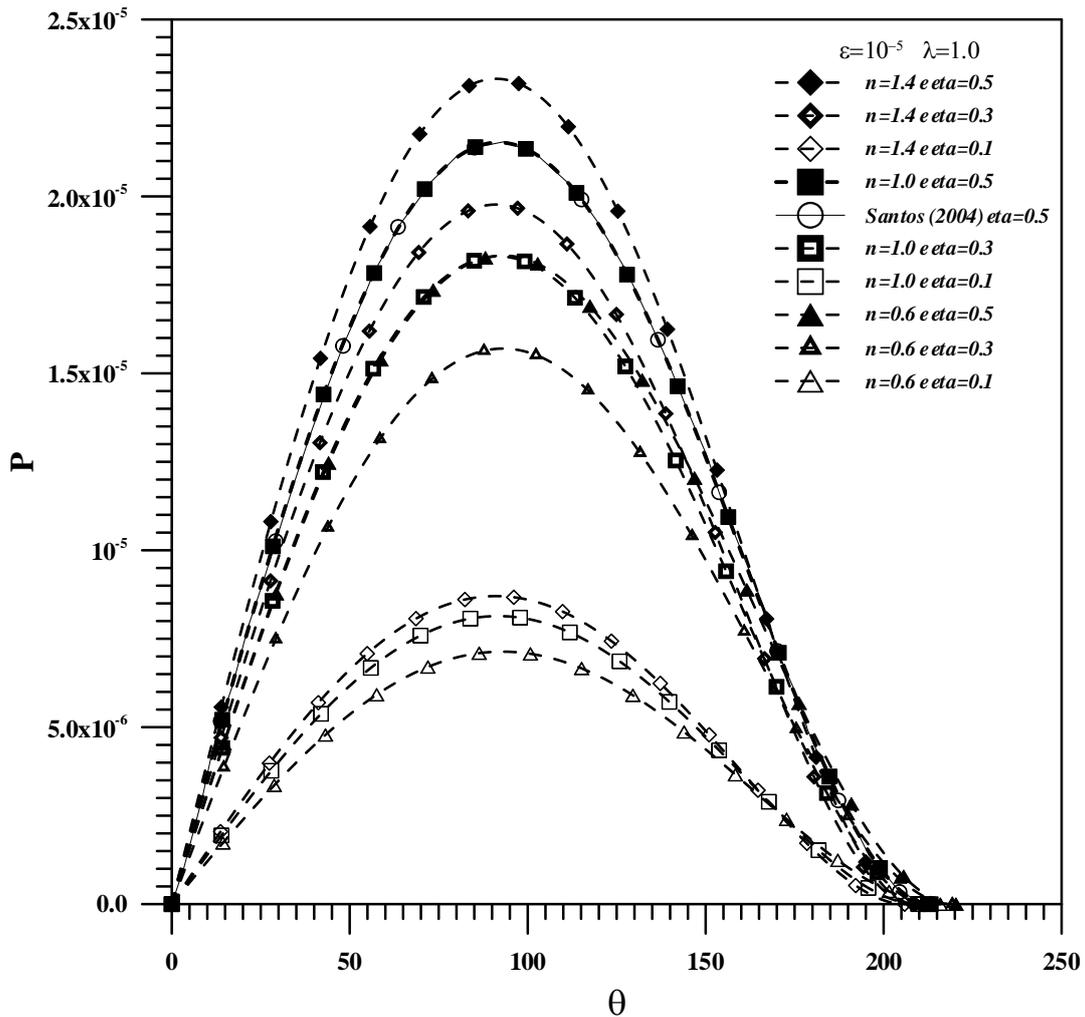
**Figura 7.9.** Comparação da distribuição da pressão em função de teta, para  $\varepsilon = 10^{-5}$  e  $\lambda = 10^{-5}$ , no plano médio do mancal, para solução analítica mancal longo e solução geral via GITT para  $n=0,6, 1$  e  $1,4$ , e SANTOS *et al.* (2012) para  $n=1,0$ .

Na Figura 7.9 faz-se uma comparação entre os resultados obtidos, para o campo da pressão, na solução analítica mancal longo com a formulação geral utilizando a GITT, para diferentes índices de comportamento reológico  $n$ , e verifica-se uma excelente concordância entre os resultados. Ambos dados apresentados, pela solução utilizando a GITT e pela solução analítica, também são comparados com os resultados de SANTOS *et al.* (2012), para fluidos newtonianos ( $n=1,0$ ), e novamente observa-se uma excelente concordância, o que garante e ratifica a confiabilidade dos dados mostrados, para distribuição da pressão, no presente trabalho.



**Figura 7.10.** – Distribuição da pressão em função de teta, para  $\varepsilon = 10^{-5}$  e  $\lambda = 0,5$ , em diferentes posições do mancal e índices da lei da potência  $n=0,6$ ,  $1,0$  e  $1,4$ , e comparação com SANTOS *et al.* (2012) posição  $\eta=0,5$  e  $n=1,0$ .

A Figura 7.10 mostra a distribuição da pressão em diferentes posições do mancal, para excentricidade específica  $\varepsilon = 10^{-5}$  e razão de aspecto  $\lambda = 0,5$ , para índices da lei da potência  $n=0,6, 1,0$  e  $1,4$ . Na comparação entre os diferentes índices da lei da potência, nota-se um aumento na pressão com o aumento do índice, o que já havia sido observado na Figura 7.1. Observa-se também uma boa concordância dos resultados obtidos no presente trabalho com os resultados apresentados por SANTOS *et al.* (2012), para fluidos newtonianos  $n=1,0$ .

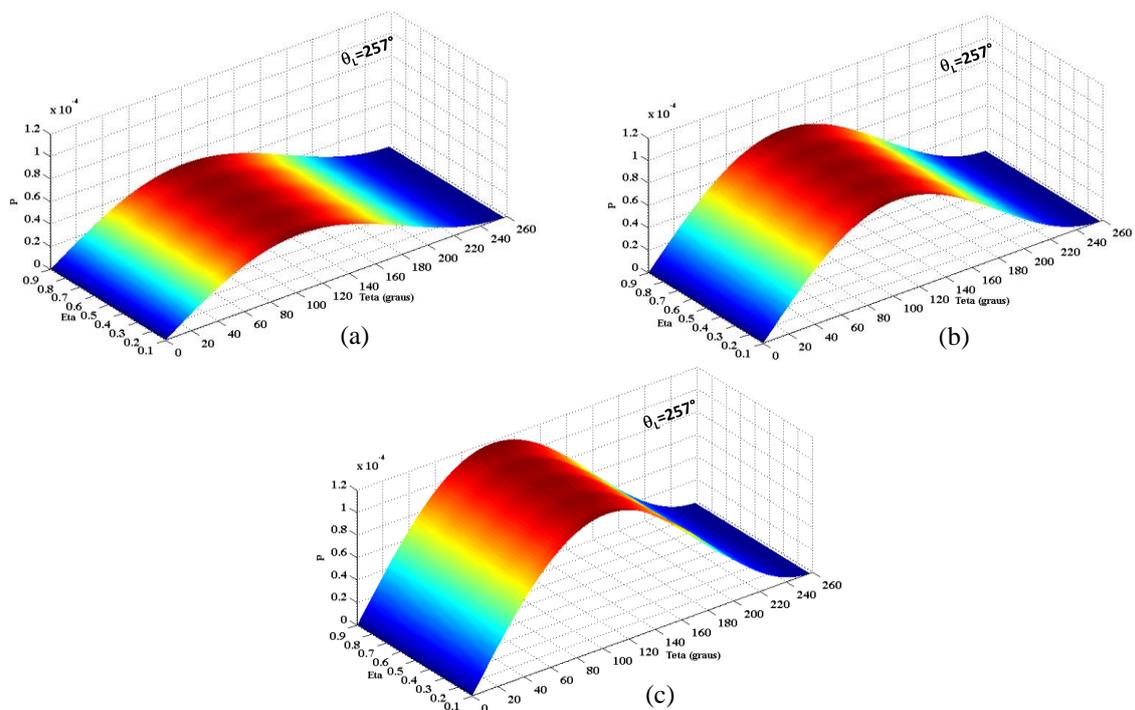


**Figura 7.11.** Distribuição da pressão em função de teta, para  $\varepsilon = 10^{-5}$  e  $\lambda = 1,0$ , em diferentes posições do mancal e índices da lei da potência  $n=0,6, 1,0$  e  $1,4$ , e comparação com SANTOS (2004), posição  $\eta=0,5$  e  $n=1,0$ .

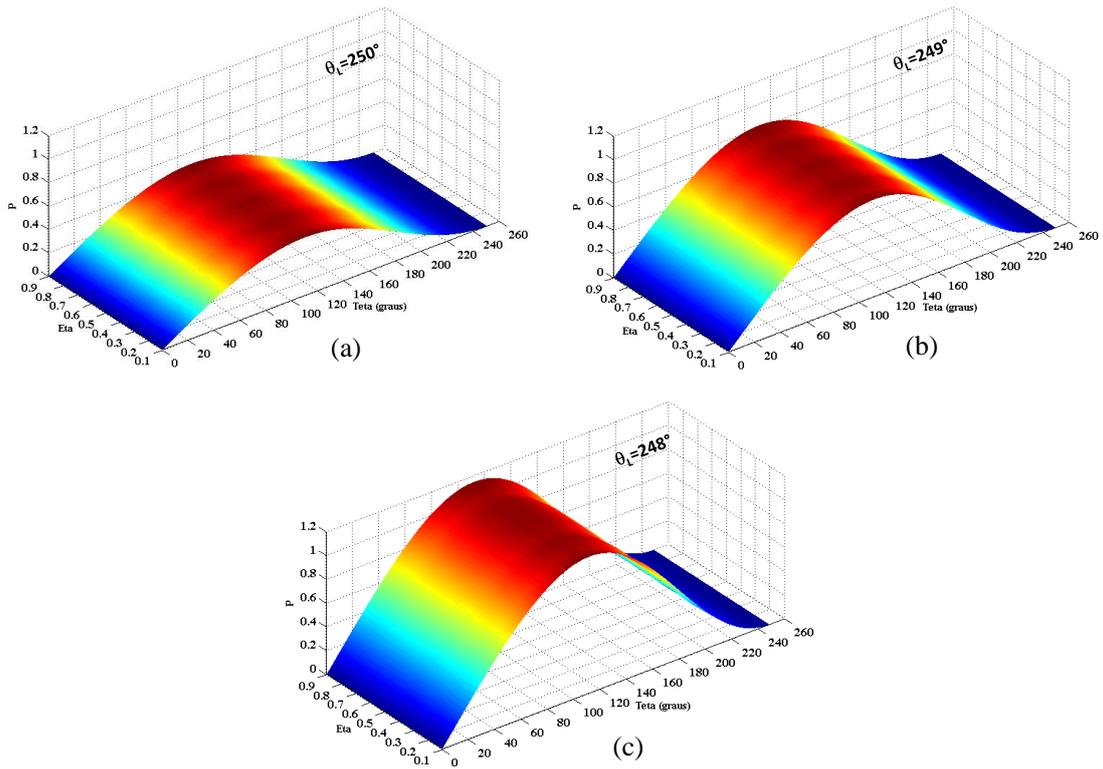
A Figura 7.11 ilustra a distribuição da pressão, para  $\varepsilon = 10^{-5}$  e  $\lambda = 1,0$ , em diferentes posições do mancal e diferentes índices do fluido da lei da potência  $n=0,6, 1,0$  e  $1,4$ , e faz uma comparação dos resultados gerados no presente trabalho com os obtidos por SANTOS (2004), no plano médio do mancal  $\eta=0,5$  e  $n=1,0$  (fluidos newtonianos).

Como já observado anteriormente, Figura 7.8, a pressão aumenta com o aumento do índice da lei da potência “n” do fluido não-newtoniano, independentemente dos valores da excentricidade e da razão de aspecto. Portanto, fluido não-newtonianos ditos pseudo-plásticos  $n < 1$  apresentam campo de pressão menor que fluidos newtonianos  $n = 1,0$  e estes por sua vez também apresentam campo de pressão menor que fluidos não-newtonianos ditos dilatantes  $n > 1$ .

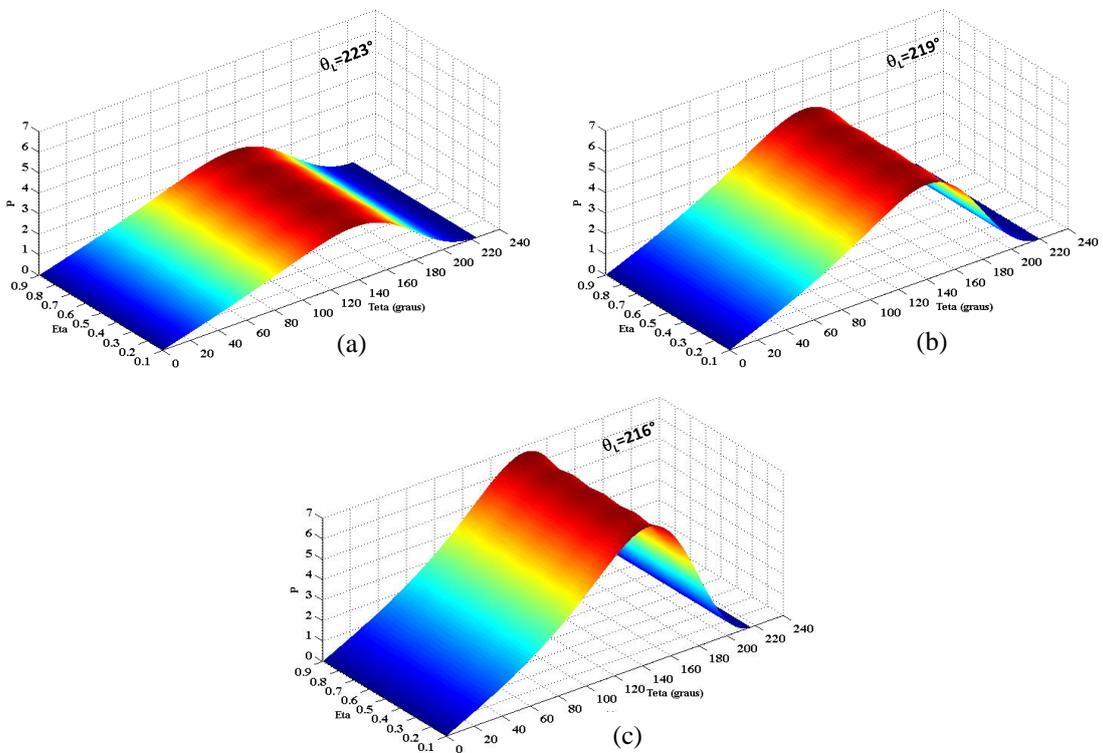
O desempenho de mancais radiais está diretamente relacionado aos parâmetros operacionais e de projeto, quais sejam, a razão de aspecto “ $\lambda = 2R/L$ ”, a excentricidade “ $\varepsilon$ ” que está diretamente relacionada a folga “ $c$ ” e a distribuição da pressão que depende da própria geometria, da velocidade de rotação do eixo e também da viscosidade do fluido. Como já observado anteriormente pelos gráficos, os fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência influenciam favoravelmente o desempenho de mancais radiais, por aumentarem a distribuição de pressão e conseqüentemente a capacidade de carga e também por diminuïrem o coeficiente de atrito. Portanto, é interessante simular a influência de  $\varepsilon$  e  $2R/L$  sobre o campo de pressão, para diferentes índices da lei da potência n; estas simulações foram realizadas variando a excentricidade específica de  $10^{-5}$ , 0,1, 0,5 e 0,9 e  $2R/L$  de  $10^{-5}$ , 0,5 e 1,0, para  $n = 0,6, 1,0, 1,4$  como mostrado nas Figuras 7.12 a 7.23.



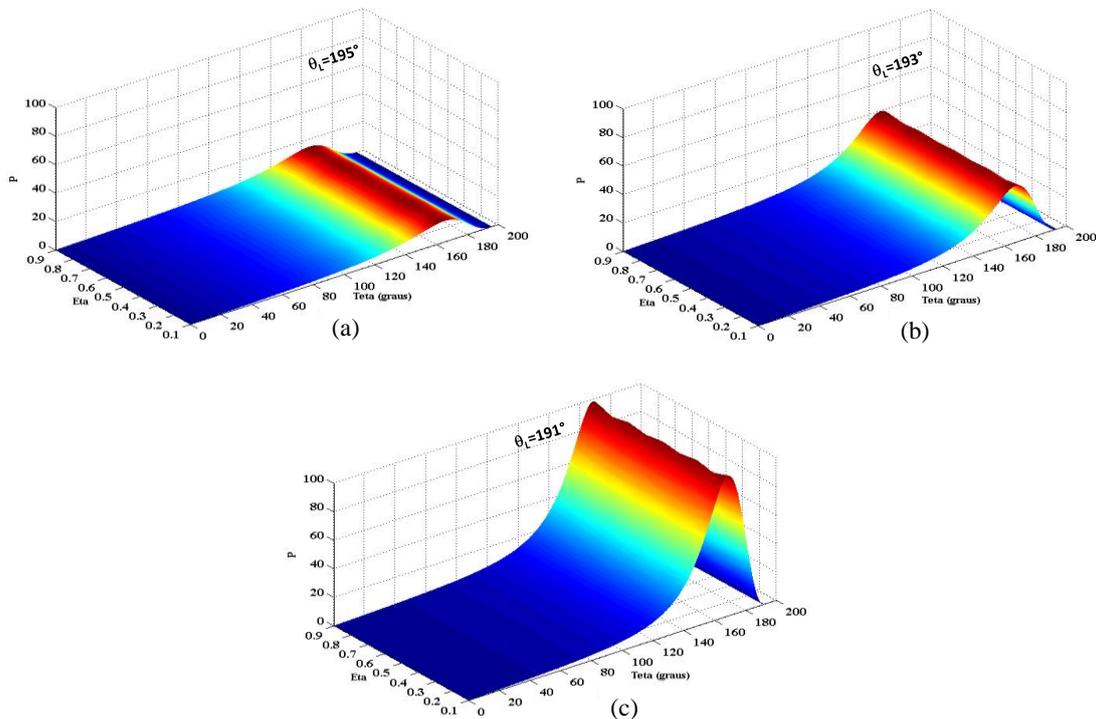
**Figura 7.12.** Gráfico do campo de pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\lambda = 10^{-5}$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n = 0,6$ ; (b)  $n = 1,0$ ; e (c)  $n = 1,4$ .



**Figura 7.13.** Gráfico do campo de pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\lambda = 10^{-5}$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .

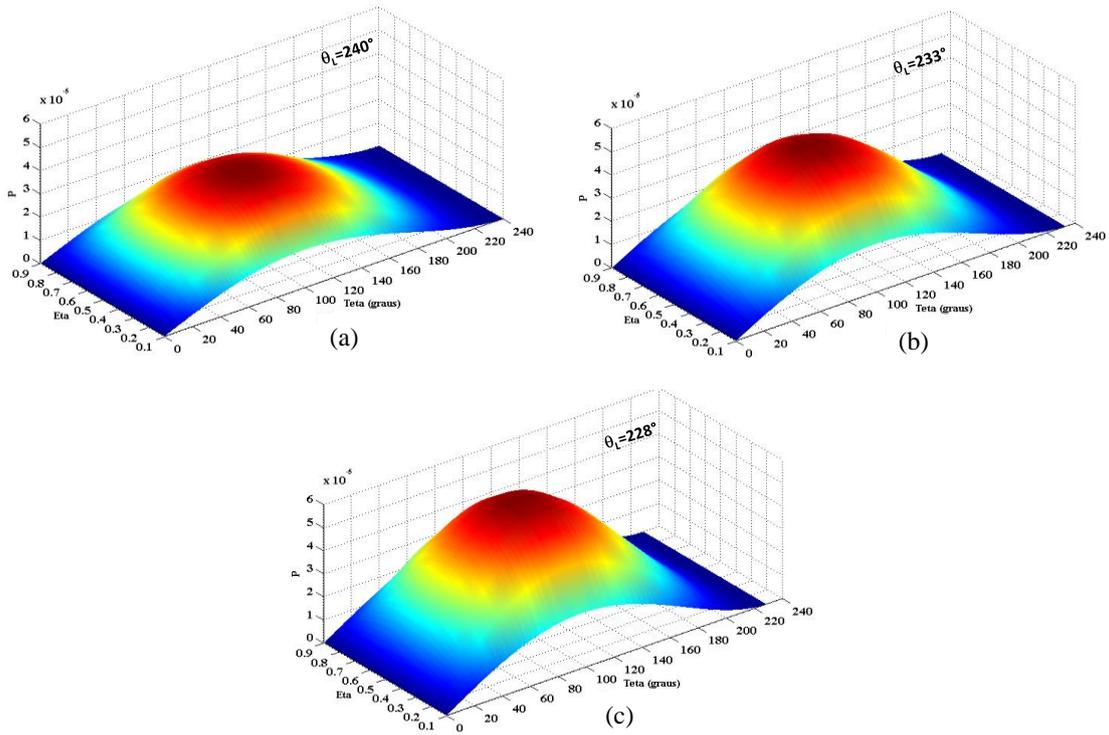


**Figura 7.14.** Gráfico do campo de pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 0,5$ ,  $\lambda = 10^{-5}$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .

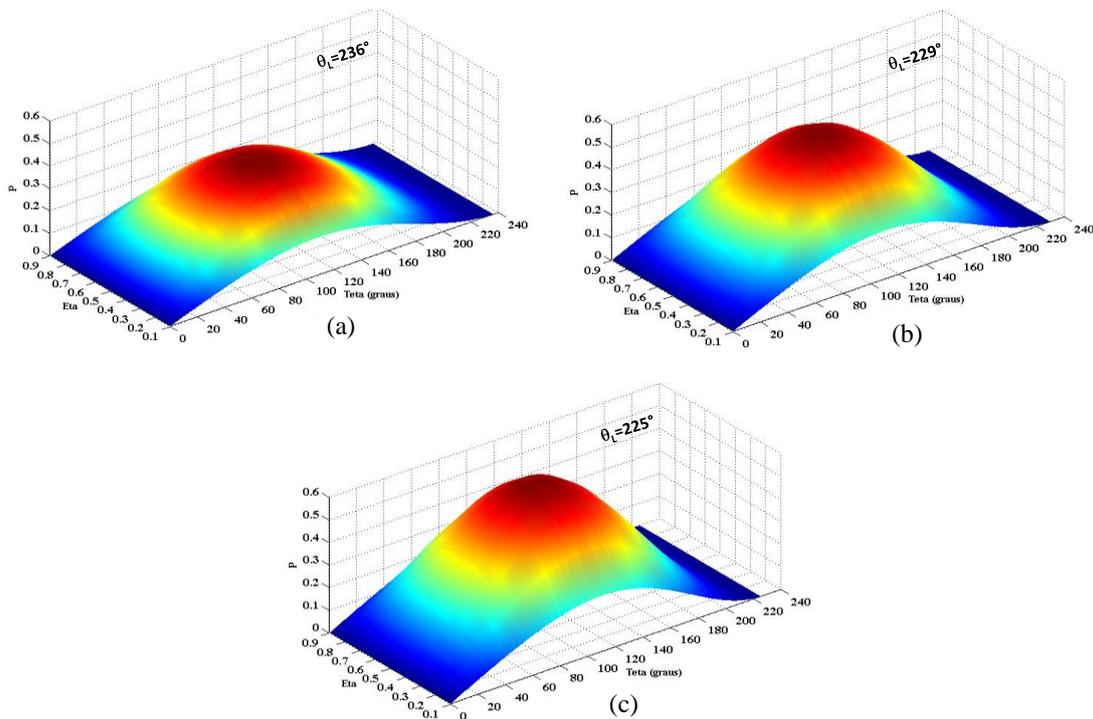


**Figura 7.15.** Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\lambda = 10^{-5}$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .

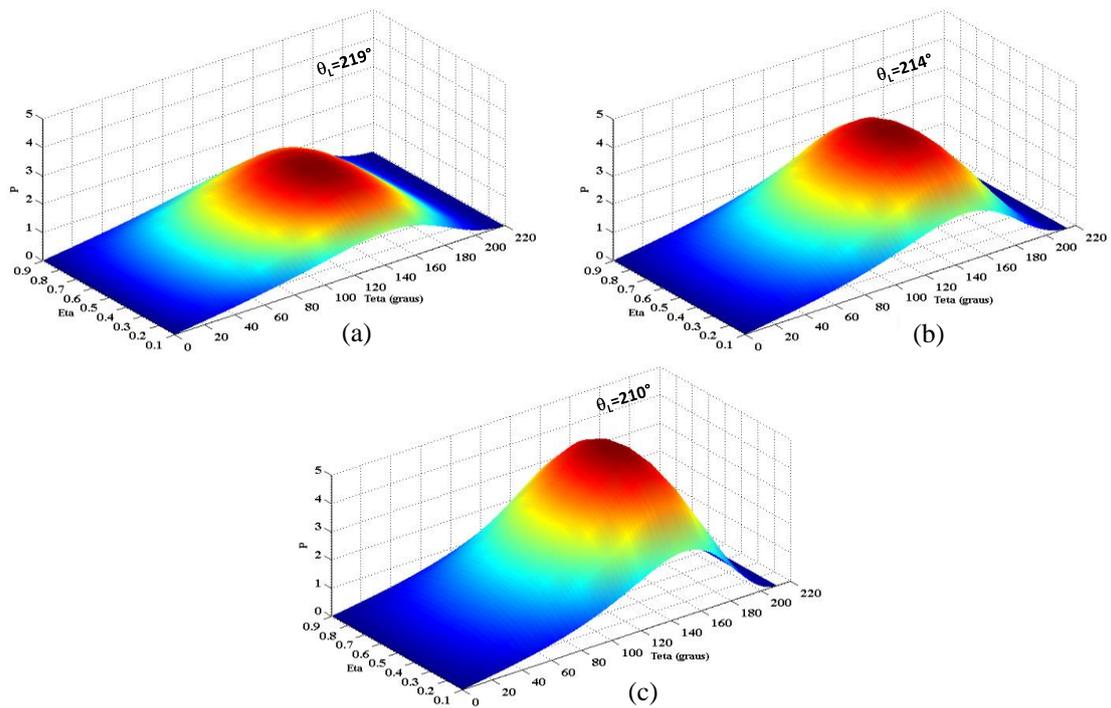
Nas Figuras 7.12 a 7.15 são apresentadas a distribuição da pressão em função de  $\theta$  para  $\varepsilon = 10^{-5}$ , 0,1, 0,5 e 0,9 e  $\lambda = 10^{-5}$ , para índices da lei da potência  $n=0,6$ , 1,0 e 1,4. Nas Figuras 7.12 observa-se que o valor de  $\theta_L$  não varia com índice  $n$  para excentricidade específica muito pequena, porém conforme se aumenta a excentricidade e o índice do fluido da lei da potência, nota-se uma diminuição nos valores de  $\theta_L$ , como mostra as Figuras 7.13 a 7.15. Verifica-se também que o valor de  $\theta_L$  independe da posição axial em mancais longos e que quanto menor os valores de  $\varepsilon$  e  $n$  menores as pressões máximas atingidas.



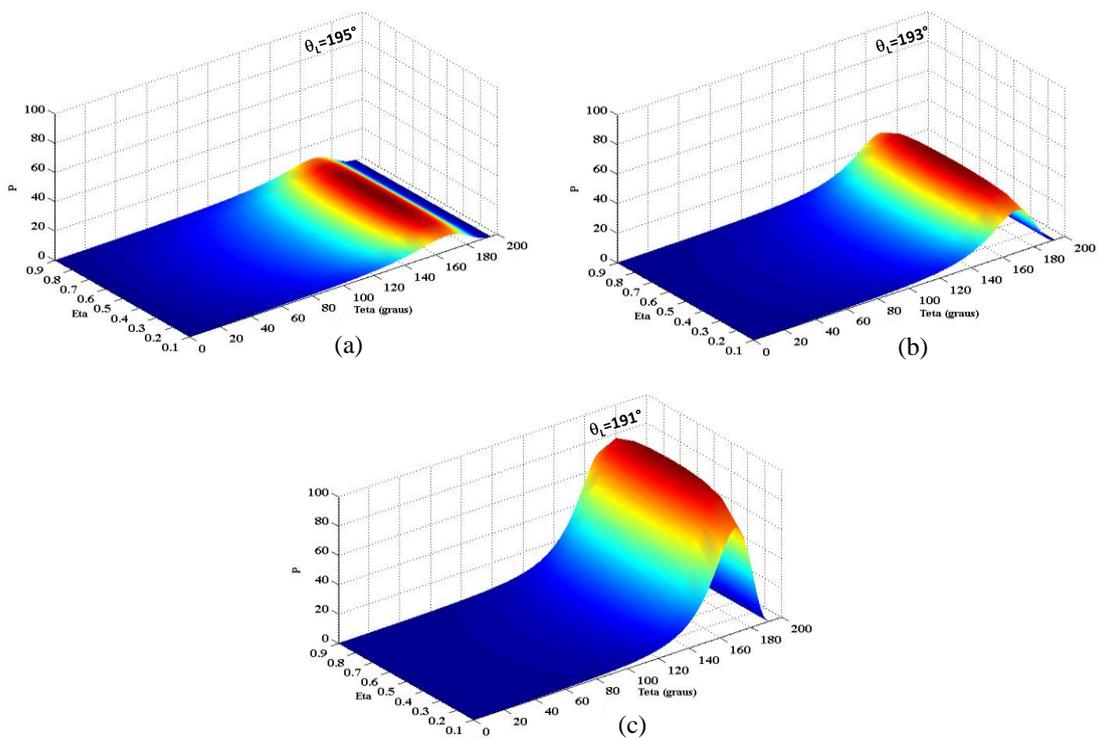
**Figura 7.16.** Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\lambda = 0,5$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .



**Figura 7.17.** Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\lambda = 0,5$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .

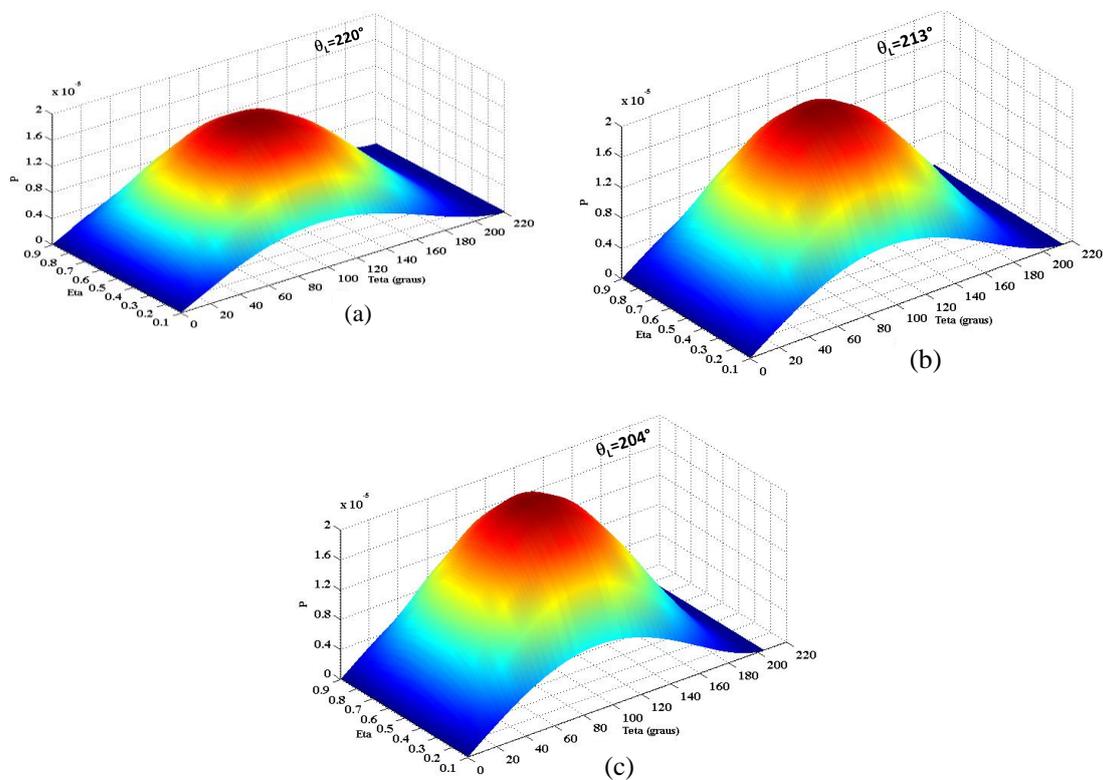


**Figura 7.18.** Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 0,5$ ,  $\lambda = 0,5$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .

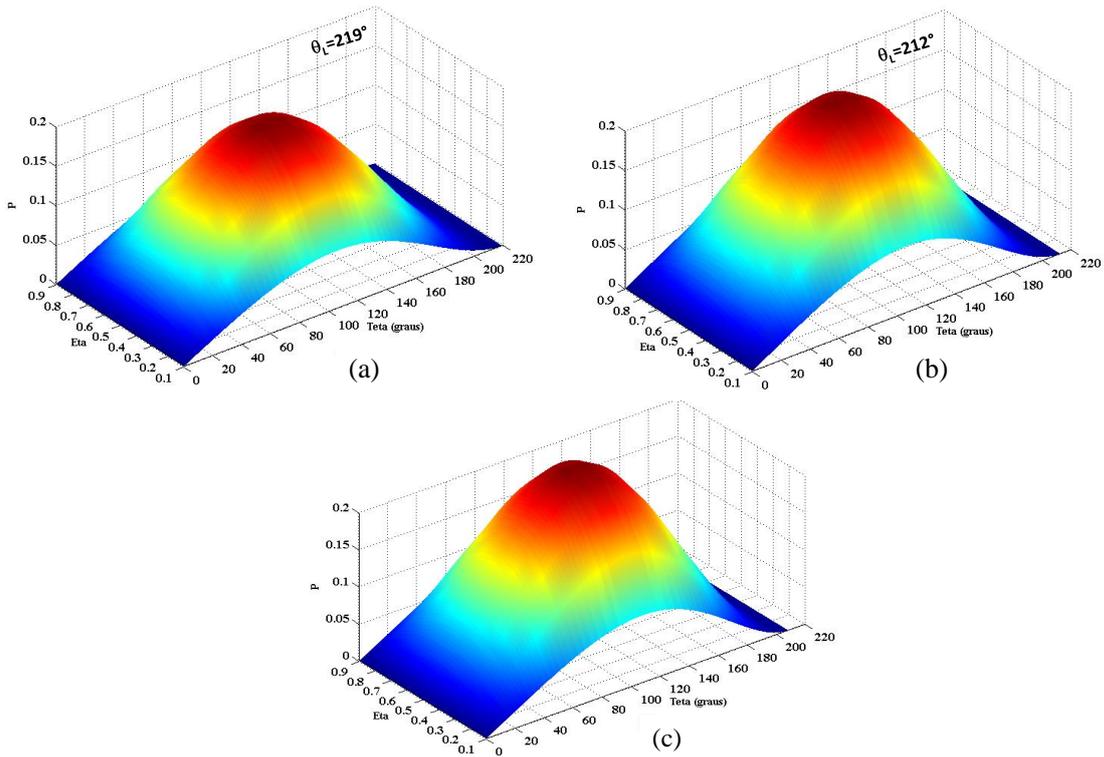


**Figura 7.19.** Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\lambda = 0,5$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .

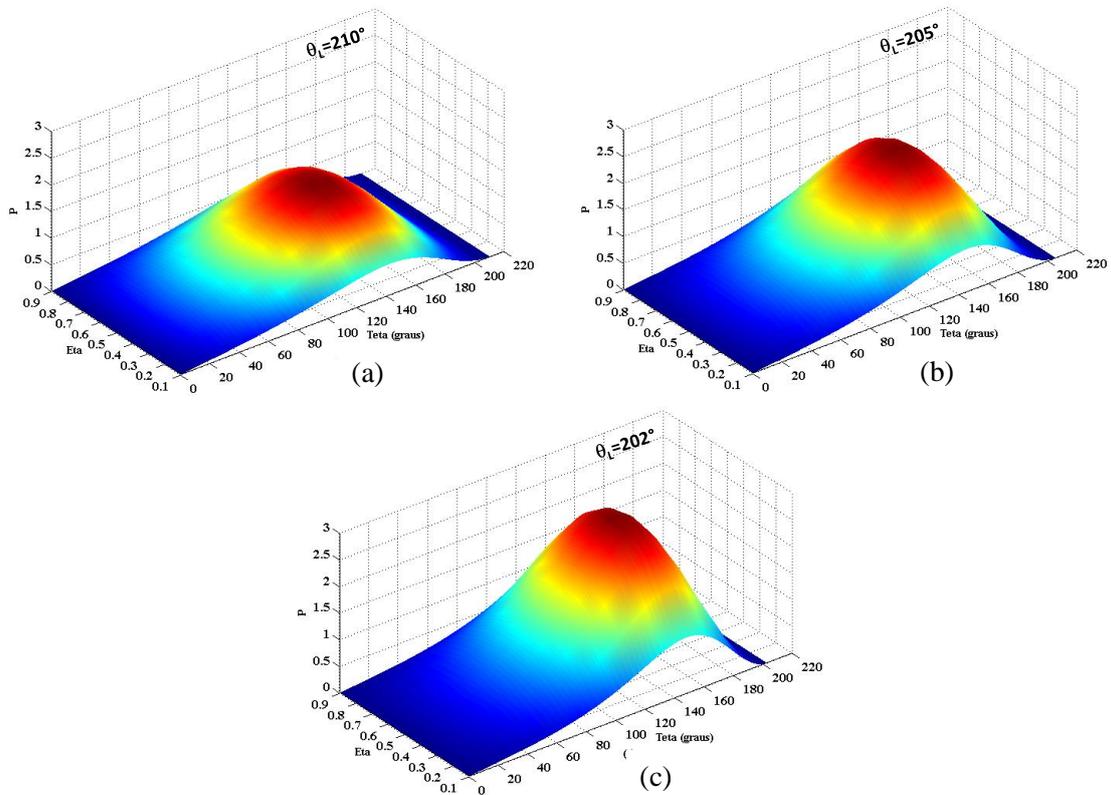
As Figuras 7.16 a 7.19 ilustram o campo de pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 10^{-5}$ , 0,1, 0,5 e 0,9 e  $\lambda = 0,5$ . Verifica-se, aqui, que para mancais curtos a posição de medida da pressão influencia no resultado do campo de pressão, e o maior valor de  $P_{\text{máx}}$  alcançado é obtido no plano médio do mancal. Como nas Figuras 7.12 a 7.15 observa-se que quanto maior o valor de “ $\varepsilon$ ” e “ $n$ ”, maior a  $P_{\text{máx}}$  e menor o valor de  $\theta_L$ . Observa-se também que quanto maior “ $\varepsilon$ ” a região de máxima pressão se desloca em direção a posição  $\theta = \theta_L$ .



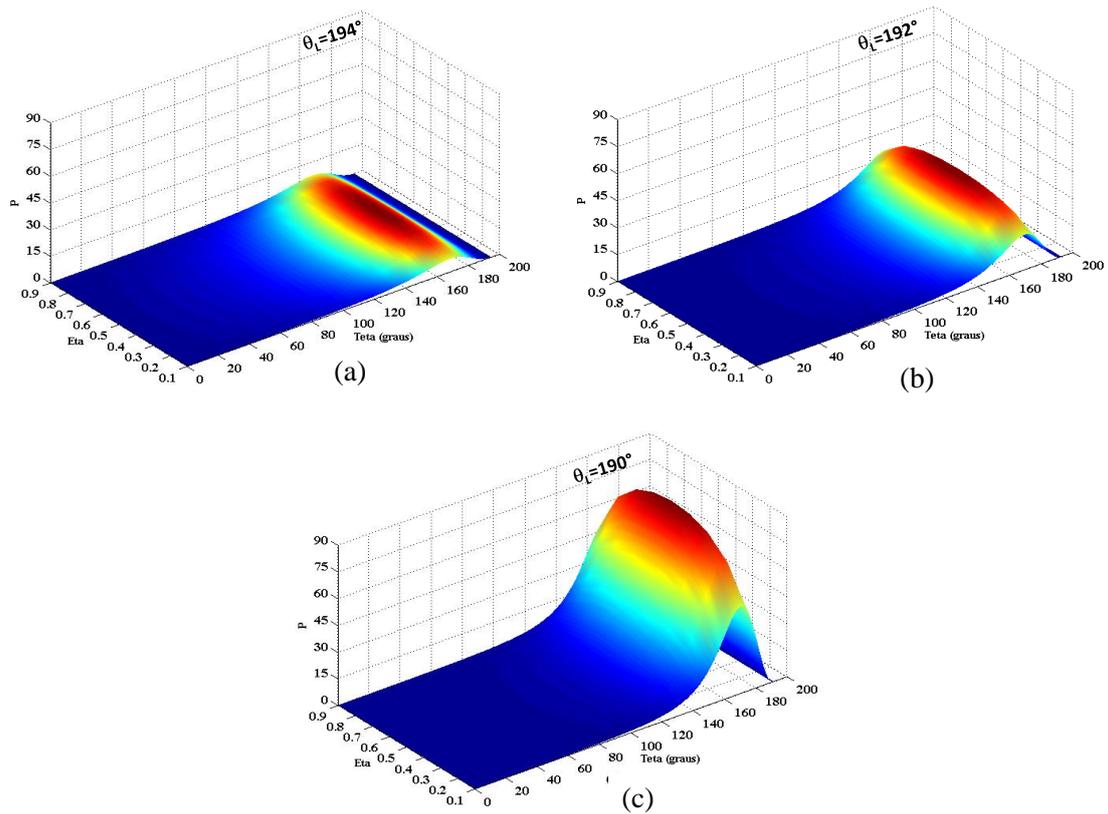
**Figura 7.20.** Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\lambda = 1$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .



**Figura 7.21.** Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 0,1$ ,  $\lambda = 1$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .



**Figura 7.22.** Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 0,5$ ,  $\lambda = 1$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .



**Figura 7.23.** Gráfico do campo pressão na direção circunferencial para  $\varepsilon = 0,9$ ,  $\lambda = 1$  em diferentes posições do mancal: (a)  $n=0,6$ ; (b)  $n=1,0$ ; e (c)  $n=1,4$ .

Nas Figuras 7.20, 7.21, 7.22 e 7.23 são mostrados o campo de pressão em função de  $\theta$  para  $\lambda = 1$ . Observa-se, como nas Figuras 7.16, 7.17, 7.18 e 7.19 ( $\lambda = 0,5$ ), que há dependência do campo de pressão com a posição do mancal onde é feita a medida da pressão. Assim, como nas Figuras anteriores, quanto maior o valor de “ $\varepsilon$ ” e “ $n$ ” maior será a  $P_{\text{máx}}$  atingida e a posição onde isto ocorre encontra-se próximo de  $\theta = \theta_L$ .

Quando se comparam todas as figuras, com relação a razão de aspecto  $\lambda=2R/L$ , nota-se que quanto maior é o seu valor menor será a pressão máxima e menor será o valor de  $\theta_L$ .

### 7.2.2 - Mancal Rugoso

Nesta seção são apresentados os resultados do campo de pressão para um mancal com rugosidade transversal, considerando três tipos: senoidal, meia onda e onda completa. Além da comparação destes resultados com os resultados para mancal liso, considerando os parâmetros pressão máxima, capacidade de carga, coeficiente de atrito e escoamento lateral, com isso avaliar o efeito combinado do fluido que obedece a lei da potência e da rugosidade. Para mostrar a análise do mancal rugoso é observado o comportamento de convergência dos potenciais em  $\theta_L$ ,  $\tilde{W}$ ,  $\varphi$  (ângulo de ação) e  $P_{\max}$  no plano médio do mancal, para os três tipos de rugosidades analisadas. O código computacional desenvolvido foi validado utilizando-se os resultados apresentados por KANGO e SHARMA (2010) para excentricidade específica ( $\varepsilon=0,7$ ), razão de aspecto ( $\lambda=2R/L=1,0$ ) índice de comportamento reológico ( $n=0,9, 1,0$  e  $1,1$ ) para fluidos não-newtonianos que obedecem a lei da potência. Além dos parâmetros raio do eixo rotativo ( $R=0,05$  m), comprimento do mancal ( $L=0,1$  m), folga radial ( $c=10^{-4}$  m), largura da cavidade ( $\omega=0,008$  m) e amplitude da cavidade ( $A=7,5$   $\mu\text{m}$ ), também utilizados pelos autores.

**Tabela 7.11.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  no plano médio do mancal com rugosidade senoidal para  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ , para o caso  $n=0,9$  e  $1,1$ .

NT	$\theta_L$		$\varphi(\text{graus})$		$\tilde{W}$		$P_{\max}$	
	$n=0,9$	$n=1,1$	$n=0,9$	$n=1,1$	$n=0,9$	$n=1,1$	$n=0,9$	$n=1,1$
6	200,45	200,18	44,11	41,28	3,903	4,779	5,708	7,477
10	200,46	200,18	44,24	41,39	3,899	4,775	5,661	7,414
14	<b>200,47</b>	<b>200,19</b>	44,28	41,43	3,897	4,772	5,646	7,395
18	200,47	200,19	44,30	41,45	3,896	4,771	5,640	7,387
22	200,47	200,19	44,31	41,46	3,896	4,771	5,637	7,382
26	200,47	200,19	<b>44,32</b>	<b>41,47</b>	<b>3,895</b>	<b>4,770</b>	5,635	7,380
30	200,47	200,19	44,32	41,47	3,895	4,770	<b>5,634</b>	7,379
34	200,47	200,19	44,32	41,47	3,895	4,770	5,634	7,378
38	200,47	200,19	44,32	41,47	3,895	4,770	5,634	7,378
42	200,47	200,19	44,32	41,47	3,895	4,770	5,634	<b>7,377</b>
46	200,47	200,19	44,32	41,47	3,895	4,770	5,634	7,377
50	200,47	200,19	44,32	41,47	3,895	4,770	5,634	7,377

**Tabela 7.12.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  no plano médio do mancal com rugosidade meia onda para  $\varepsilon = 0,7$  e  $\lambda = 1,0$ , para o caso  $n=0,9$  e  $1,1$ .

$NT$	$\theta_L$		$\varphi$ (graus)		$\tilde{W}$		$P_{\max}$	
	$n=0,9$	$n=1,1$	$n=0,9$	$n=1,1$	$n=0,9$	$n=1,1$	$n=0,9$	$n=1,1$
6	192,23	191,94	44,50	41,25	4,215	5,271	5,822	7,935
10	192,25	191,96	44,70	41,44	4,203	5,255	5,755	7,845
14	192,26	191,96	44,76	41,49	4,198	5,250	5,736	7,818
18	192,26	191,96	44,78	41,51	4,197	5,248	5,728	7,807
22	<b>192,27</b>	<b>191,97</b>	44,79	41,53	4,196	5,246	5,725	7,802
26	192,27	191,97	44,80	41,53	<b>4,195</b>	5,246	5,723	7,800
30	192,27	191,97	44,80	41,53	4,195	5,246	5,722	7,798
34	192,27	191,97	44,80	<b>41,54</b>	4,195	<b>5,245</b>	<b>5,721</b>	<b>7,796</b>
38	192,27	191,97	<b>44,81</b>	41,54	4,195	5,245	5,721	7,796
42	192,27	191,97	44,81	41,54	4,195	5,245	5,721	7,796
46	192,27	191,97	44,81	41,54	4,195	5,245	5,721	7,796
50	192,27	191,97	44,81	41,54	4,195	5,245	5,720	7,796

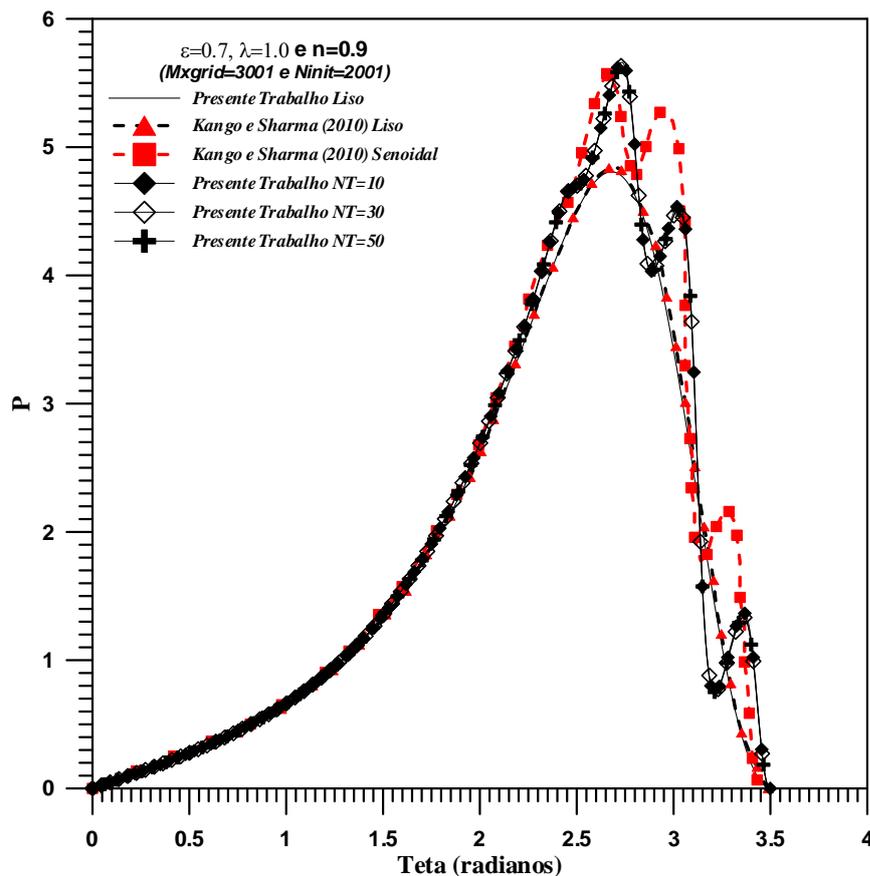
**Tabela 7.13.** Convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  no plano médio do mancal com rugosidade onda completa para  $\varepsilon = 0,7$  e  $\lambda = 1,0$ , para o caso  $n=0,9$  e  $1,1$ .

$NT$	$\theta_L$		$\varphi$ (graus)		$\tilde{W}$		$P_{\max}$	
	$n=0,9$	$n=1,1$	$n=0,9$	$n=1,1$	$n=0,9$	$n=1,1$	$n=0,9$	$n=1,1$
6	199,37	199,12	43,26	40,38	4,794	6,033	6,846	9,196
10	199,37	199,12	43,37	40,46	4,791	6,031	6,799	9,135
14	<b>199,38</b>	<b>199,13</b>	43,39	40,48	4,790	6,030	6,788	9,120
18	199,38	199,13	43,40	40,49	4,790	6,029	6,783	9,115
22	199,38	199,13	43,41	40,49	<b>4,789</b>	6,029	6,781	9,112
26	199,38	199,13	43,41	<b>40,50</b>	4,789	6,029	6,780	9,110
30	199,38	199,13	43,41	40,50	4,789	6,029	6,779	9,109
34	199,38	199,13	<b>43,42</b>	40,50	4,789	6,029	6,779	9,108
38	199,38	199,13	43,42	40,50	4,789	<b>6,028</b>	<b>6,778</b>	<b>9,107</b>
42	199,38	199,13	43,42	40,50	4,789	6,028	6,778	9,107
46	199,38	199,13	43,42	40,50	4,789	6,028	6,778	9,107
50	199,38	199,13	43,42	40,50	4,789	6,028	6,778	9,107

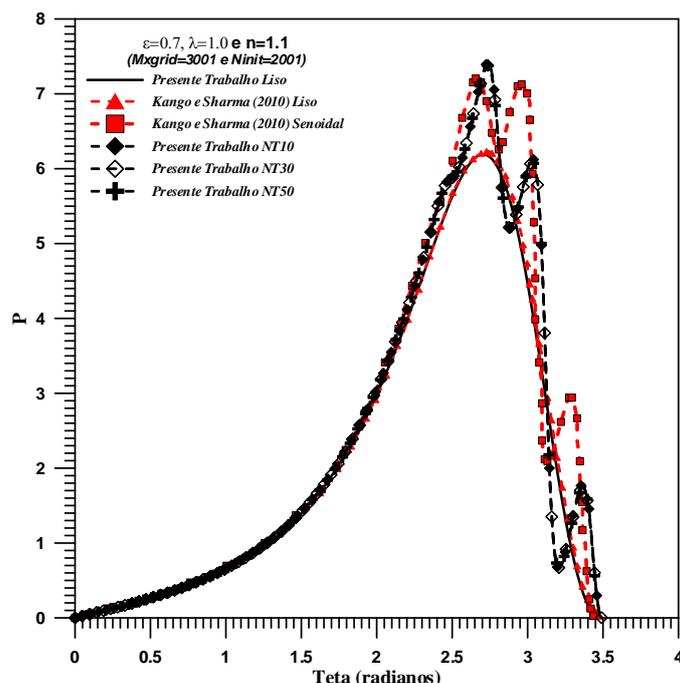
Nas Tabelas 7.11 a 7.13 é mostrada a convergência de  $\theta_L$ ,  $\varphi$ ,  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  para  $\varepsilon = 0,7$  e  $\lambda = 1,0$ , nos três tipos de rugosidade senoidal, meia onda e onda completa, respectivamente. Verifica-se em todas as Tabelas uma boa taxa de convergência para os parâmetros analisados. A Tabela 7.11 mostra que a convergência para  $\theta_L$  se dá em torno de 14 termos, de  $\varphi$  e  $\tilde{W}$  em torno de 26 termos da série, com até três casas decimais para  $\tilde{W}$ , enquanto que  $P_{\max}$  converge com 30 e 42 termos da série, para  $n=0,9$  e  $1,1$ , respectivamente. A Tabela 7.12 mostra a seguinte situação,  $\theta_L$  convergindo com 22

termos,  $\varphi$  com 38 termos para  $n=0,9$  e 34 termos para  $n=1,1$ , porém  $\tilde{W}$  convergiu com 26 e 34 termos para  $n=0,9$  e  $1,1$ , respectivamente. Para a pressão máxima, ainda na Tabela 7.12, a convergência se deu com 38 termos da série para ambos índices de comportamento reológico  $n=0,9$  e  $1,1$ . Finalmente na Tabela 7.13 observa-se que para  $\theta_L$  a convergência se dá em torno de 14 termos, para  $\varphi$  em torno de 34 termos para  $n=0,9$  e 26 termos para  $n=1,1$ , enquanto  $\tilde{W}$  e  $P_{\max}$  em torno de 38 termos, exceto para  $n=0,9$  onde a convergência para  $\tilde{W}$  foi com 22 termos da série.

Os resultados obtidos para os parâmetros de desempenho operacional, quais sejam, a distribuição da pressão adimensional na direção circunferencial, a capacidade de carga, o ângulo de ação, o coeficiente de atrito e a taxa de escoamento axial, para valores de  $n$ ,  $\varepsilon$  e  $\lambda$ , além da pressão máxima em função da posição axial  $\eta$  para  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ , serão agora apresentados considerando os três tipos de rugosidade: senoidal, meia onda e onda completa.

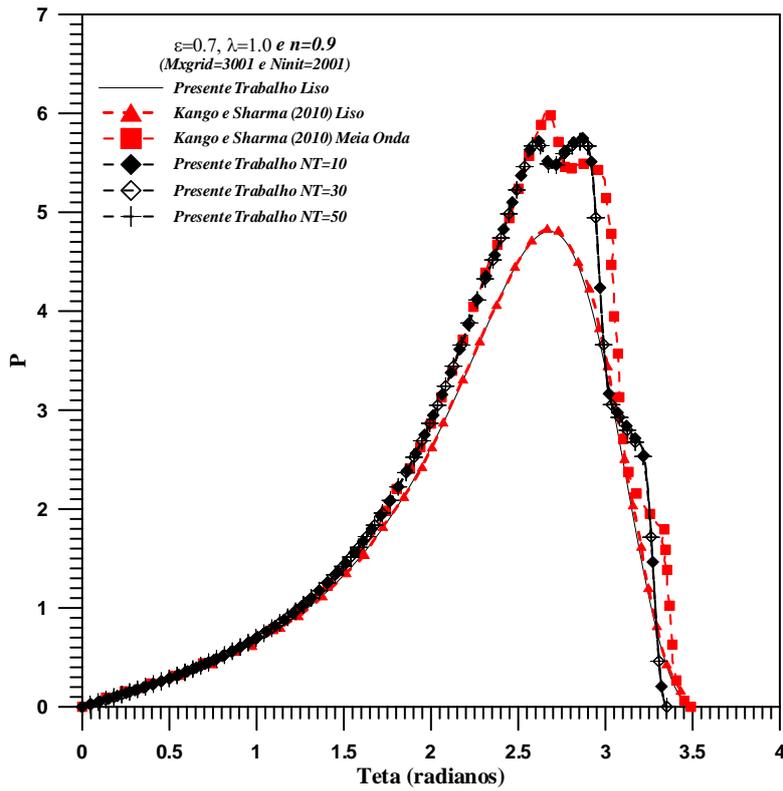


**Figura 7.24.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo senoidal para  $n=0,9$ ,  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ .

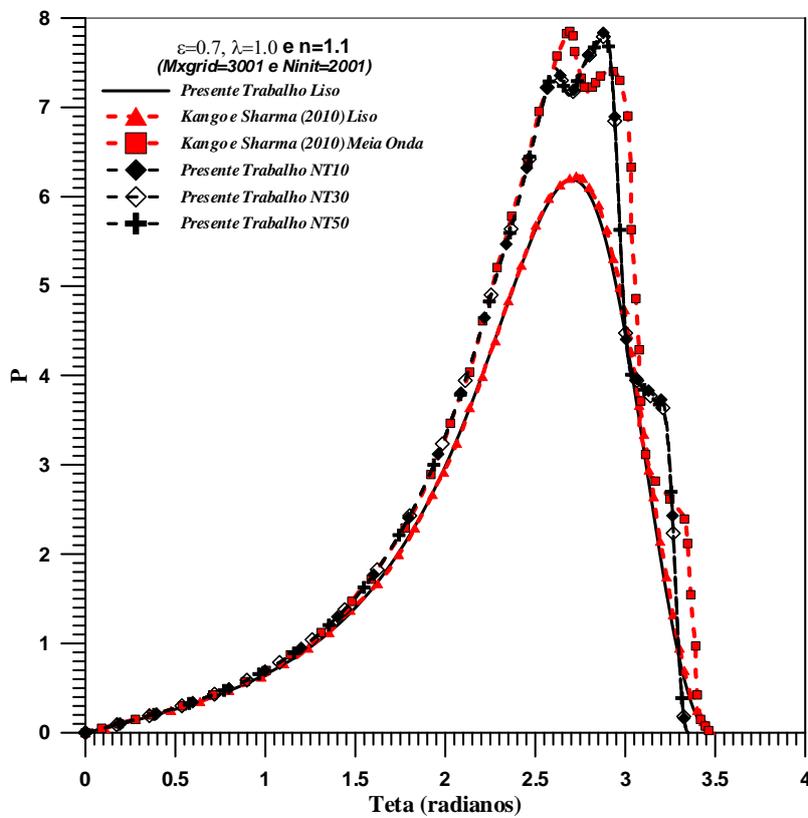


**Figura 7.25.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo senoidal para  $n=1,1$ ,  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ .

As Figuras 7.24 e 7.25 apresentam os resultados obtidos para o campo de pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal, com rugosidade senoidal, para os índices do fluido da lei da potência  $n=0,9$  e  $1,1$ , respectivamente, considerando excentricidade específica  $\varepsilon=0,7$  e razão de aspecto  $\lambda=1,0$ . Observa-se, em ambos casos, uma boa concordância para os valores de pressão máxima e ângulo de cavitação, quando comparados com resultados obtidos por KANGO e SHARMA (2010) pelo método das diferenças finitas. No entanto não houve um ‘alinhamento’ por completo entre as curvas com rugosidade, o que pode estar relacionado a diferença entre os métodos de solução. Entretanto para garantir a solução pelo presente trabalho foi considerada uma malha com  $Mxgrid=3001$  ( $Mxgrid$  é o número máximo de pontos permitidos na grade) e  $Ninit=2001$  ( $Ninit$  é o número de pontos iniciais da grade, incluindo o ponto final), com tolerância de  $10^{-5}$ , variando os números de termos na série de  $NT=10$  a  $50$ , de  $10$  em  $10$ , o que resulta numa maior precisão e resultados mais confiáveis, visto que os autores utilizaram apenas  $200$  nós em cada direção. Outros valores para  $Mxgrid$  e  $Ninit$  foram avaliados também, porém não houve alteração nos resultados convergidos. Verifica-se também um aumento de pressão máxima em relação ao mancal liso de  $17,13\%$  e  $19,16\%$ , para  $n=0,9$  e  $1,1$ , respectivamente. Já para o ângulo de cavitação não houve diferença, ficando com o  $\theta_L=3,49$  radianos.

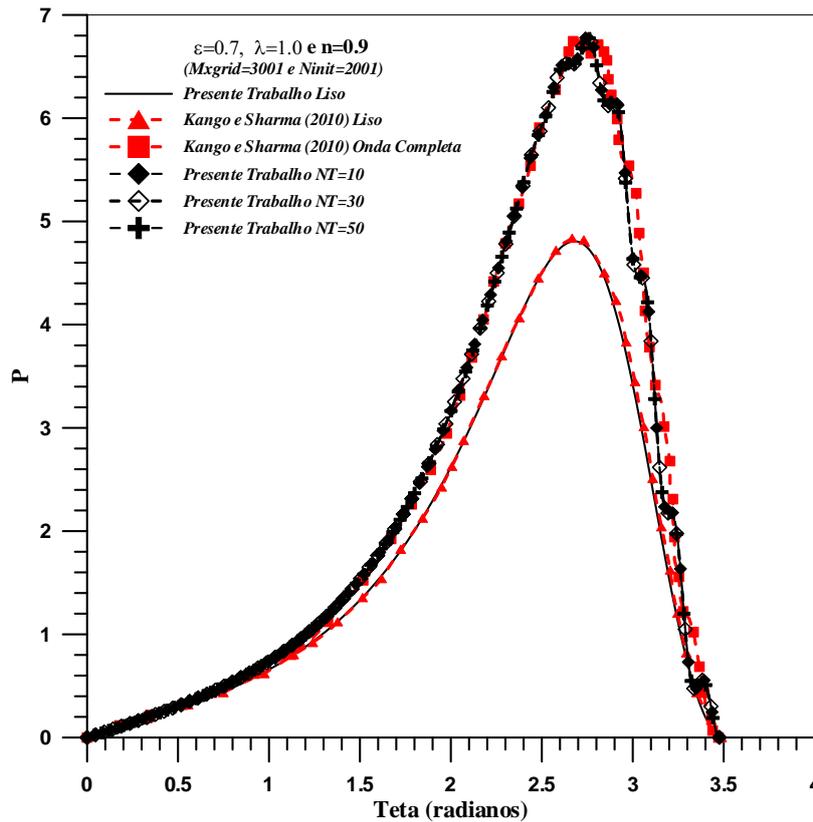


**Figura 7.26.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo meia onda, para  $n=0,9$ ,  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ .

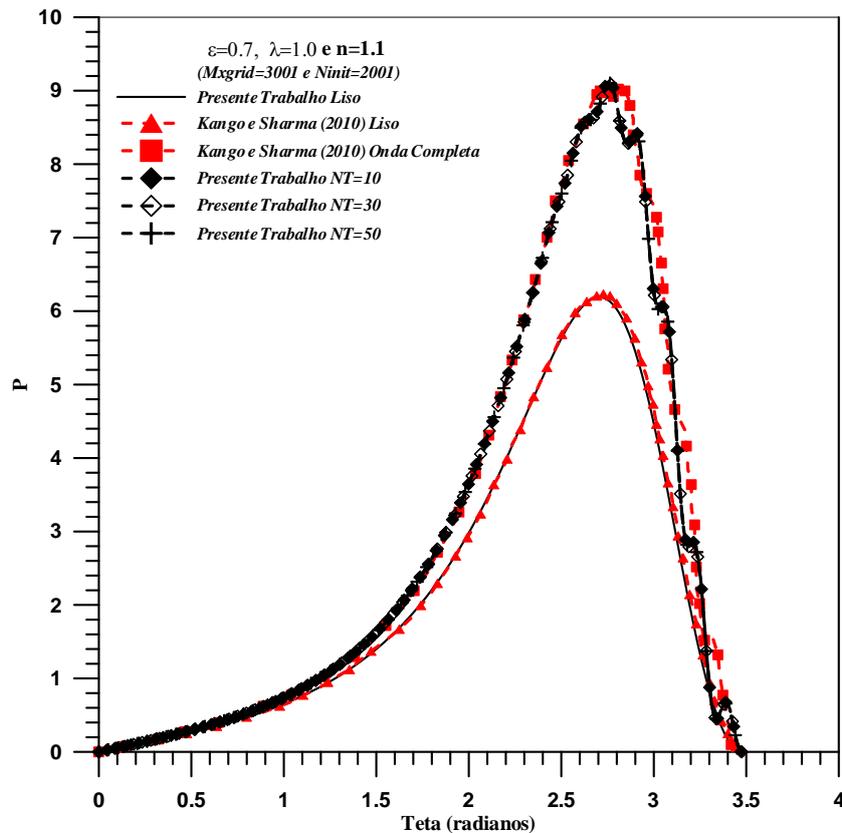


**Figura 7.27.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo meia onda, para  $n=1,1$ ,  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ .

As Figuras 7.26 e 7.27 apresentam os resultados obtidos para o campo de pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal, com rugosidade tipo meia onda, para os índices do fluido da lei da potência  $n=0,9$  e  $1,1$ , respectivamente, considerando excentricidade específica  $\varepsilon=0,7$  e razão de aspecto  $\lambda=1,0$ . Observa-se também, em ambos casos, uma boa concordância com os resultados obtidos por KANGO e SHARMA (2010), sendo que os valores de pressão máxima estão mais próximos para  $n=1,1$  (Figura 7.27). E novamente não houve um ‘alinhamento’ por completo entre as curvas com rugosidade, o motivo para esta situação foi discutido anteriormente, sendo necessário efetuar o mesmo procedimento. Em se tratando do aumento na pressão máxima em relação ao mancal liso, o que é visível, o mancal com rugosidade tipo meia onda, apresentou um acréscimo de 18,98 % e 25,89%, para  $n=0,9$  e  $1,1$ , respectivamente. O ângulo de cavitação manteve-se igual em ambos casos ( $n=0,9$  e  $1,1$ ), com  $\theta_L=3,35$  radianos.

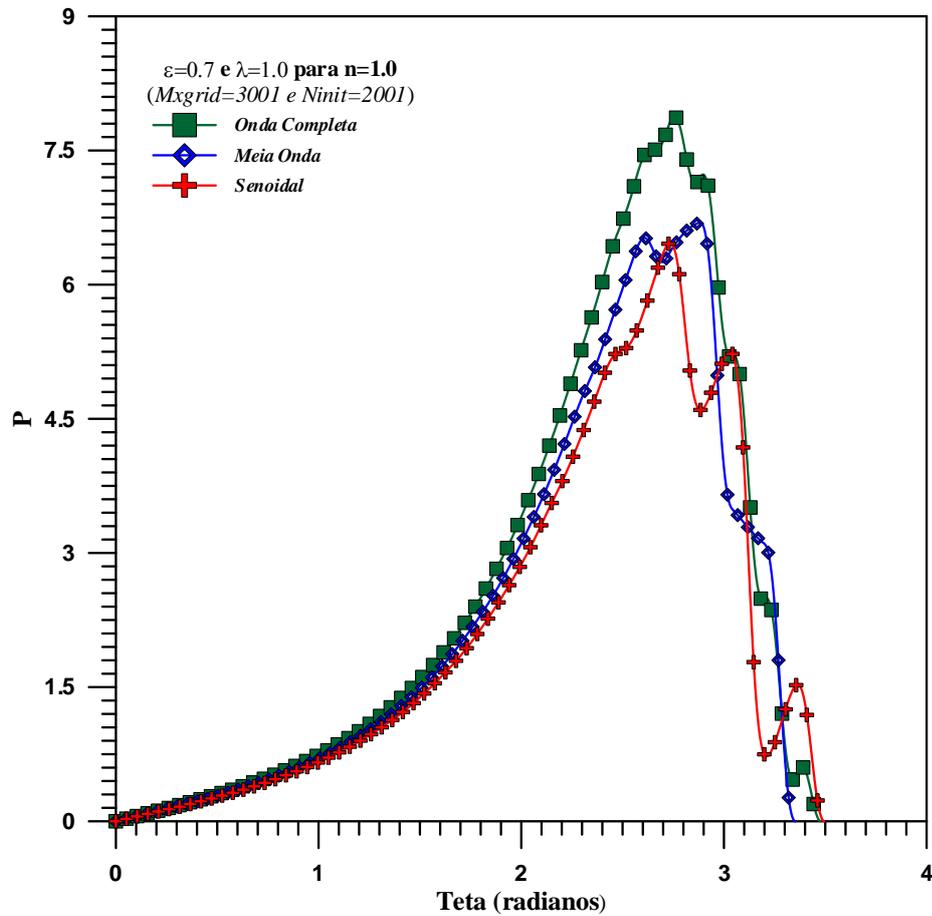


**Figura 7.28.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa, para  $n=0,9$ ,  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ .



**Figura 7.29.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa, para  $n=1,1$ ,  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ .

As Figuras 7.28 e 7.29 apresentam os resultados obtidos para o campo de pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal, com rugosidade tipo onda completa, para  $n=0,9$  e  $1,1$ , respectivamente, considerando  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ . Verifica-se que os resultados apresentados estão em concordância com os obtidos por KANGO e SHARMA (2010), tanto para valores de pressão máxima quanto para os valores de ângulo de cavitação. Nota-se visualmente um aumento na pressão máxima em relação ao mancal liso quando comparado com mancal rugoso, tipo onda completa, correspondendo um acréscimo de 40,98 % e 47,11%, para  $n=0,9$  e  $1,1$ , respectivamente. Assim como no mancal com rugosidade senoidal, não houve diferença no ângulo de cavitação, ficando com o  $\theta_L=3,47$  radianos.



**Figura 7.30.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com três tipos de rugosidade, para  $n=1,0$ ,  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ .

A Figura 7.30 apresenta a distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio mancal, para os três tipos de rugosidade analisadas, para  $n=1,0$ , excentricidade específica  $\varepsilon=0,7$  e razão de aspecto  $\lambda=1,0$ . Observa-se que a rugosidade tipo onda completa é a que apresenta melhor desempenho em termos de aumento de pressão máxima quando comparada com os outros dois tipos. As contribuições, em percentagem, dos três tipos de rugosidade são apresentadas na tabela a seguir

**Tabela 7.14.** Influência de três tipos diferentes de rugosidade transversal sobre a performance de um mancal, considerando apenas 10 cavidades.

<i>Rugosidade Transversal</i>		% <i>Variação</i>		<i>Kango e Sharma (2010)</i>		<i>Kango e Sharma (2010)</i>	
		<i>em P<sub>máx</sub></i>	<i>em W</i>	<i>em W</i>	<i>em C<sub>f</sub></i>	<i>em C<sub>f</sub></i>	<i>em Q<sub>s</sub></i>
Senoidal	n=0,9	+17,13	+7,06	+9,10	-2,88	-4,24	+3,25
	n=1,0	+18,25	+7,44	+9,81	-2,88	-4,91	+3,29
	n=1,1	+19,16	+7,77	+9,81	-2,79	-5,56	+3,34
Meia Onda	n=0,9	+18,98	+15,30	+17,43	-7,94	-9,82	+0,60
	n=1,0	+22,49	+16,91	+18,9	-8,55	-10,81	+0,68
	n=1,1	+25,89	+18,50	+20,40	-9,10	-11,79	+0,74
Onda Completa	n=0,9	+40,98	+31,64	+30,68	-15,07	-16,37	+0,58
	n=1,0	+44,11	+33,92	+33,30	-15,43	-17,54	+0,61
	n=1,1	+47,11	+36,21	+35,94	-15,71	-18,66	+0,62

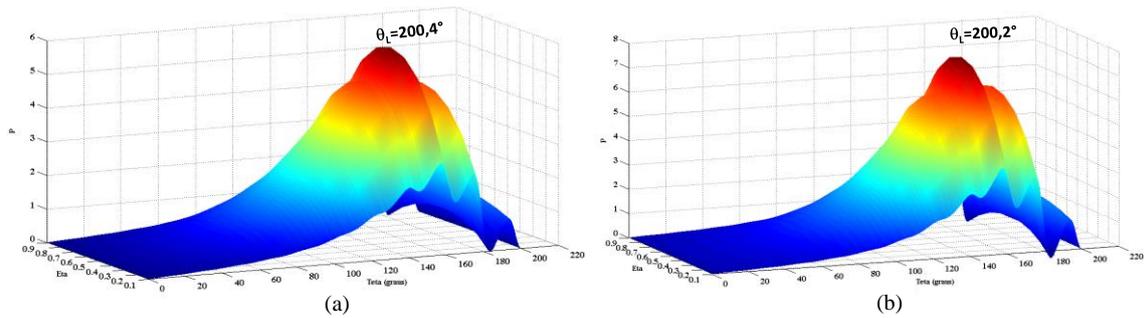
Nota:  $A=0,0000075$  m,  $\omega=0,008$  m,  $c=10^{-4}$  m,  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ .

A Tabela 7.14 apresenta os efeitos da rugosidade transversal, para ambos fluidos newtoniano e não-newtoniano, em um mancal radial considerando 10 cavidades. Analisando a tabela observa-se um aumento na pressão máxima, na capacidade de carga e no escoamento lateral nos três tipos de rugosidade estudados, e um decréscimo no coeficiente de atrito para ambos fluidos. A rugosidade tipo onda completa foi a que apresentou melhor performance para os parâmetros operacionais de interesse no estudo de mancais radiais, com aumento de 47,11% na pressão máxima, 36,21% na capacidade de carga, 0,62% no escoamento lateral e uma redução de 15,71% no coeficiente de atrito, para um fluido não-newtoniano com índice de comportamento  $n=1,1$ . A rugosidade tipo senoidal apresentou maior aumento no escoamento lateral 3,34%, também para  $n=1,1$ , o que para operação do mancal resulta em aumento no consumo de lubrificante e nos custos. Nota-se também que os resultados apresentados estão próximos aos resultados reportados por KANGO e SHARMA (2010), ressaltando que os autores não apresentam uma análise de convergência e utilizaram um número pequeno de nós (200 nas direções x e y) quando comparados com os utilizados no presente trabalho.

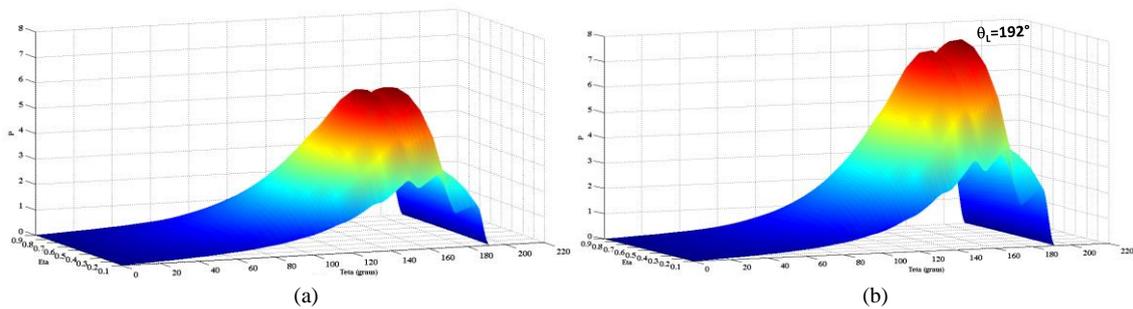
No estudo para mancais radiais sem rugosidade, ou seja, mancais ‘lisos’ já havia se notado que a pressão, a capacidade carga e o taxa de escoamento lateral aumentam com o índice de comportamento reológico do fluido  $n$ , e que o coeficiente de atrito diminui. Portanto o efeito combinado da rugosidade e valores crescentes no índice de comportamento reológico  $n$  potencializam a melhoria na performance dos mancais radiais

hidrodinâmicos, com destaque para rugosidade tipo onda completa dentre os três modelos estudados.

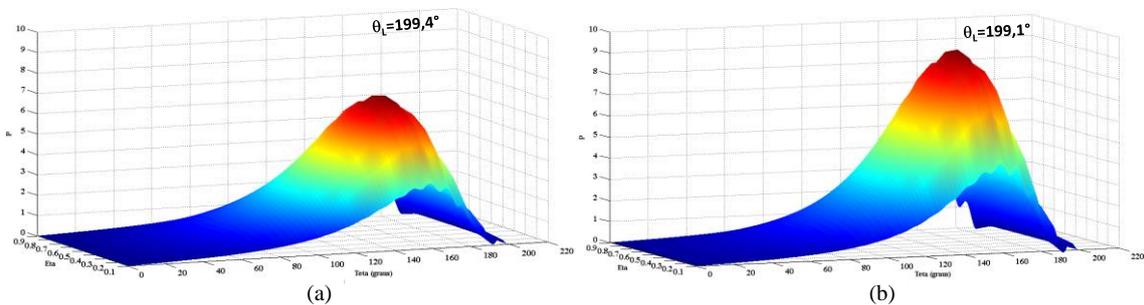
Objetivando uma melhor avaliação da distribuição do campo de pressão ao longo da direção axial e direção longitudinal, abaixo são apresentados gráficos de superfície para índices de comportamento do fluido  $n=0,9$  e  $1,1$ , considerando excentricidade específica  $\varepsilon=0,7$  e razão de aspecto  $\lambda=1,0$ , para os três de tipos de rugosidades analisados.



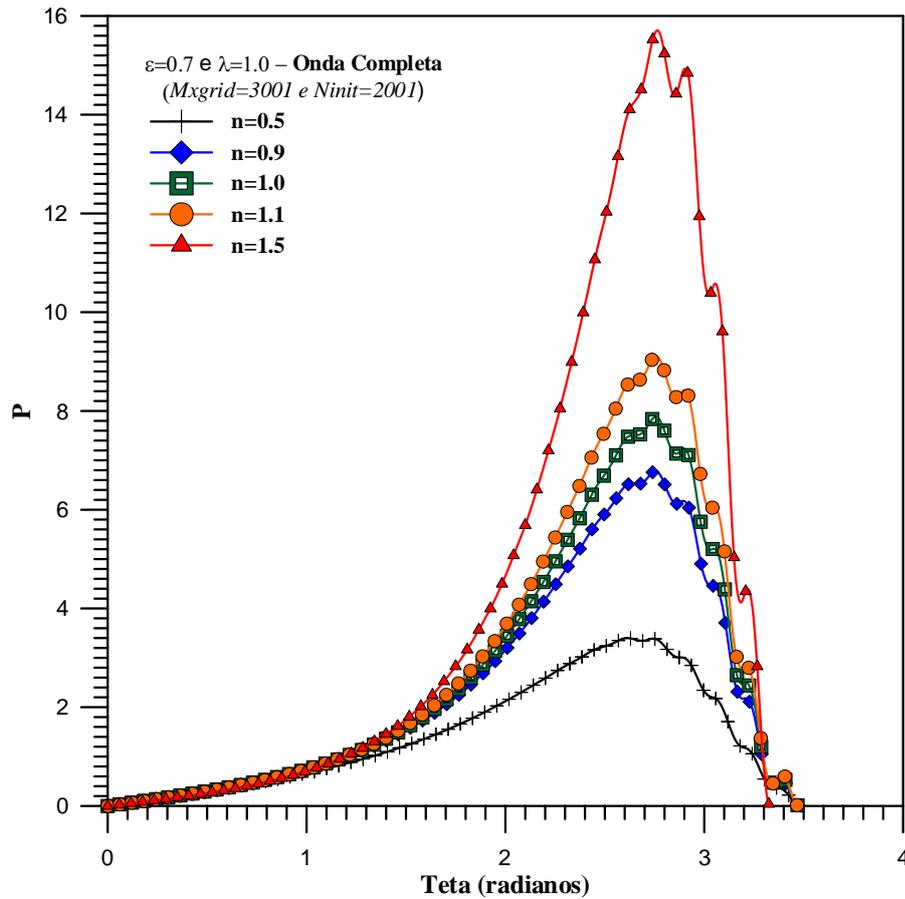
**Figura 7.31.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo senoidal, para  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ , (a)  $n=0,9$  e (b)  $n=1,1$ .



**Figura 7.32.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo meia onda, para  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ , (a)  $n=0,9$  e (b)  $n=1,1$ .

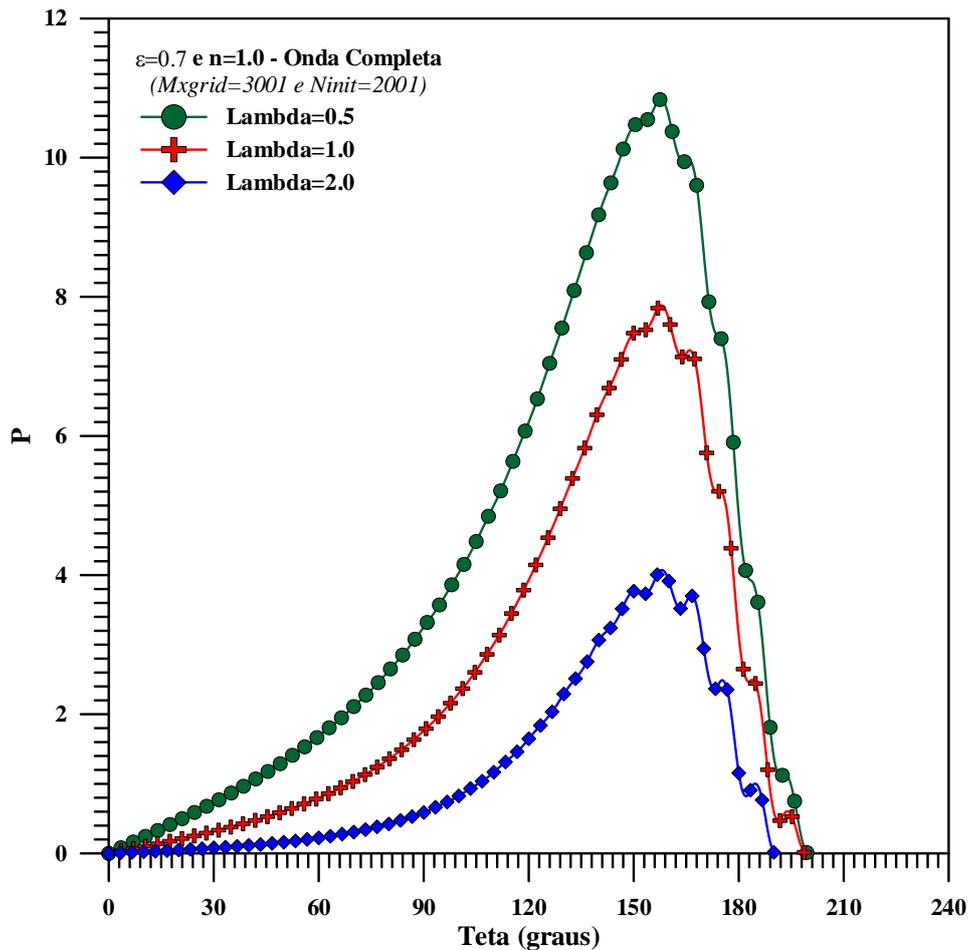


**Figura 7.33.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa, para  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ , (a)  $n=0,9$  e (b)  $n=1,1$ .



**Figura 7.34.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa, para  $n=0,5, 0,9,1,0, 1,1$  e  $1,5$ , com  $\varepsilon=0,7$  e  $\lambda=1,0$ .

A Figura 7.34 mostra o campo de pressão no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa para diferentes índices da lei da potência  $n=0,5, 0,9,1,0, 1,1$  e  $1,5$ , com excentricidade específica  $\varepsilon=0,7$  e razão de aspecto  $\lambda=1,0$ . Verifica-se, mas uma vez que o efeito combinado da rugosidade com o aumento do índice da lei potência aumentam substancialmente a pressão máxima.



**Figura 7.35.** Distribuição da pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal com rugosidade tipo onda completa, para  $n=1,0$  e  $\varepsilon=0,7$ , com  $\lambda=0,5$ ,  $1,0$  e  $2,0$ .

A Figura 7.35 apresenta a distribuição do campo de pressão na direção circunferencial no plano médio do mancal para rugosidade tipo onda completa, agora fixando os valores da excentricidade específica  $\varepsilon=0,7$  e o índice da lei da potência  $n=1,0$ , e variando os valores para razão de aspecto  $\lambda=0,5$ ,  $1,0$  e  $2,0$ . Nestas condições, nota-se uma diminuição na pressão máxima e no ângulo de cavitação com o aumento dos valores da razão de aspecto, o que não mudou em relação ao mancal liso.

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 8.1 - CONCLUSÕES

No presente trabalho foi abordado uma pequena parte de uma ciência muito mais ampla, chamada *tribologia*, mas que tem uma importância fundamental no meio científico por apresentarem oportunidades de estudos teóricos e/ou experimentais, como é caso da lubrificação hidrodinâmica em mancais radiais com lubrificantes não-newtonianos. Neste contexto, as principais conclusões evidenciadas neste estudo foram:

- Através do método da perturbação regular foi possível reproduzir a equação de Reynolds generalizada aplicável a lubrificantes não-newtonianos que obedecem a lei da potência, demonstrando ser um método eficiente na solução de equações diferenciais.
- Nos estudos dos casos limites para  $\varepsilon$  pequeno mancal longo e mancal longo com qualquer valor de  $\varepsilon$ , os resultados apresentados pela solução numérica conferem com os resultados obtidos nas soluções analíticas, validando o código computacional desenvolvido na formulação geral.
- A GITT demonstrou sua capacidade de solucionar problemas relacionados a lubrificação hidrodinâmica em mancais, pois os resultados apresentaram uma excelente concordância com os resultados da literatura, o que também garantiu a validação do código computacional desenvolvido.
- Os resultados para o campo de pressão demonstraram que quanto maior o valor de “ $\varepsilon$ ” e “ $n$ ” maior será a  $P_{máx}$  atingida e a posição onde isto ocorre encontra-se próximo de  $\theta = \theta_L$ , com relação a razão de aspecto  $\lambda=2R/L$ , nota-se que quanto maior é o seu valor menor será a  $P_{máx}$  e menor será o valor de  $\theta_L$ .
- Observou-se também um aumento da capacidade de carga para valores maiores de excentricidade específica “ $\varepsilon$ ” e índices “ $n$ ” do fluido não-newtoniano, ou seja, fluidos ditos dilatantes ( $n>1$ ) apresentam uma maior capacidade de carga que os fluidos newtonianos e que os fluidos ditos pseudo-plásticos ( $n<1$ ), o que melhora a eficiência de funcionamento do mancal, o que talvez justifique o aumento na

aplicação industrial de fluidos com altos índices “n”. Valores maiores de “ $\epsilon$ ” e “n” também aumentaram a taxa de escoamento axial e diminuíram o coeficiente de atrito e o ângulo de ação.

- A rugosidade aumenta a pressão, a capacidade de carga suportada e o escoamento lateral e diminui o coeficiente de atrito. Dos três tipos de rugosidade estudadas, a tipo onda completa, foi a que apresentou o melhor desempenho, e o pior a tipo senoidal. O efeito combinado do índice da lei da potência com a rugosidade, aumentam consideravelmente a pressão, carga suportada e o escoamento lateral.

## 8.2 - SUGESTÕES

Como observado anteriormente a *tribologia* é uma ciência muito ampla, e onde houver escoamento de fluidos, com transferência de calor e até mesmo de massa, sempre haverá o potencial para aplicação da GITT, e onde for possível, desde que tenha recursos disponíveis, validar seus resultados com dados de resultados experimentais seria fundamental. Portanto, como trabalhos futuros sugiro as seguintes sugestões:

- Análise termohidrodinâmica em mancais radiais lubrificadas com fluidos não-newtonianos, tipo lei da potência e outros, como por exemplo, *Couple Stress*, micro polar etc.. que apresentam potencial para aplicação da GITT.
- Estudos e análises experimentais dos parâmetros de desempenho de mancais, em sistemas isotérmicos e térmicos, como por exemplo campos de pressão e temperatura, capacidade de carga, taxa de escoamento lateral, etc.
- Estudos dos parâmetros operacionais em mancais radiais porosos ou de escora, operando com fluidos não-newtonianos, tanto em sistemas isotérmicos e como em térmicos.
- Análise termohidrodinâmica em mancais radiais considerando os efeitos de um campo magnético, combinado com fluidos newtonianos e/ou não-newtonianos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BALUPARI, R. S., 2004, "Validation of finite element program for journal bearings – Static e Dynamic properties", University of Kentucky Master's Theses. Paper 325.
- BLANCO, C. J. C., PRATA, A. T., PESSOA, F. C. L., 2014, "Simulation and optimization of thrust circular bearings with planes sector-shaped", *Industrial Lubrication and Tribology*, V. 66(1), pp. 75-82.
- BOMPOS, D. A., NIKOLAKOPOULOS, P. G., 2011, "CFD simulation of magnetorheological fluid journal bearings", *Simulation Modelling Practice and Theory*, V. 19, pp. 1035-1060.
- BUCKHOLZ, R. H., 1986, "Effects of Power-Law, Non-Newtonian Lubricants on Load Capacity and Friction for Plane Slider Bearings", *Journal of Tribology*, V. 108, pp. 86-91.
- CAMERON, A., 1966, "The Principles of Lubrication", London, Longmans Green, 591p.
- CASTELLÕES, F. V., QUARESMA, J. N. N., COTTA, R. M., 2010, "Convective heat transfer enhancement in low Reynolds number flows with wavy walls", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, V.53, pp. 2022-2034.
- CHATTOPADHYAY, A. K., DAS, S. E GUHA, S. K., 2002, "On the Steady-state Performance of Misaligned Hydrodynamic Journal Bearings Lubricated with Micropolar Fluids", *Tribology Internatioanl*, V. 35, pp. 201 -210.
- CHAVES, C. L., PEREIRA, L. M., LIMA, J. A., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N., 2000, "Hybrid solution for the laminar flow of power-law fluids inside rectangular ducts", *Computational Mechanics*, V. 26(5):490-496.
- CHU, L.-M., HSU, H.-C., CHEN, J.-L., 2014, "An analytical approach for analysis of slider bearings with non-Newtonian lubricants", *Hindawi Publishing Corporation - Advances in Mechanical Engineering*, V. 2014, Artigo ID 404759, pp. 7.

CHUN, S. M., 2002, "A parametric study on bubbly lubrication of high-speed journal bearings", *Tribology International*, V. 35, pp. 1-13.

COTTA, R. M. & MIKHAILOV, M. D., Unified Integral Transform Method, *Journal Braz.* v.12, pp.301-310, 1990.

COTTA, R. M., 1993, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, 340p.

COTTA, R. M. & MIKHAILOV, M. D., The Integral Transform Method, *Appl. Math. Modeling*, v.17, pp.156-161, 1993.

COTTA, R. M., Benchmark Results in Computational Heat and Fluid Flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, (Invited paper), V.37, suppl.1, pp.381-393, 1994.

COTTA, R. M. & MIKHAILOV, M. D., Integral Transform of Eigenvalue Problems, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v.10, pp. 829-835, 1994.

COTTA, R. M. & MIKHAILOV, M. D., *Heat Conduction: - Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*, John Wiley, New York, 1997.

COTTA, R. M., *The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering*, Begell House, Nova York, 1998.

DIEN, I. K. & ELROD, H. G., 1983, "A generalized steady-state Reynolds equation for non-Newtonian fluids, with application to journal bearings", *Trans ASME, Journal of Lubrication Technology*, V.105, pp. 385-90.

DOWSON, D., 1962, "A generalized Reynolds equations for fluid-film lubrication, *Int. J. Mech. Sci.* Pergamon Press Ltd., V. 4, pp. 159-170

DUARTE JR, D., 2005, "Tribologia, lubrificação e mancais de deslizamento". Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna Ltda.

EL KHLIFI, M., SOUCHET, D., BOUYAHIA, F., 2007, "Numerical modeling of non-Newtonian fluids in slider bearings and channel thermohydrodynamic flow", *Journal of Tribology*, V.129, pp. 695-699.

ELROD, H. G., 1981, "A Cavitation Algorithm", *ASME Journal of Lubrication Technology*, V.103, pp. 350-354.

FOX, R. W. & McDonald, A. T., *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, Guanabara,. 1988.

FRÊNE, J., NICOLAS, D., DEGUEURCE, B., 1989, "Hydrodynamic Lubrication: Bearings and Thrust Bearings", *Tribology Series*, V.33, Editor D. Dowson (Gt. Britain).

GERTZOS, K. P., NIKOLAKOPOULOS, P. G., PAPADOPOULOS, C. A., 2008, "CFD analysis of journal bearing hydrodynamic lubrication by Bingham lubricant", *Tribology International*, V. 41, pp. 1190-1204.

HAMROCK, B. J., SCHMID, S. R., JACOBSON, B. O., 2004, "Fundamentals of Fluid Film Lubrication", New York, Second Edition, Marcel Dekker, Inc.

HOROWITZ, H. H., STEIDLER, F. E., 1961, "Calculated Performance of Non-Newtonian Lubricants in Finite Width Journal Bearings", *A S L E Transactions*, V.4:2, pp. 275-281.

HSU, Y. C., 1967, "Non-Newtonian flow in infinite-length full journal bearing". *Journal of Lubrication Technology*, pp. 329-33.

HUYNH, P. B., 2005, " Numerical study of slider bearing with limited corrugation", *ASME Journal of Tribology*, V. 127, pp. 582-595.

IMSL LIBRARY, MATH/LIB., Houston, Texas, 2014.

JANG, J. Y., CHANG, C. C., 1987, "Adiabatic solutions for a misaligned journal bearing with non-Newtonian lubricants", *Tribology International*, V. 20 N° 05, pp. 267-275.

JANG, J. Y., CHANG, C. C., 1988, "Adiabatic analysis of finite width journal bearings with non-Newtonian lubricants", *Wear*, V. 122, pp. 63-75.

JIANMING, W., GAOBING, J., 1989, "The optimum design of the Rayleigh slider bearings with a power law fluid", *Wear* V.129, pp. 1-11.

JOHNSON JR, M. W., MANGKOESOE BROTO, S., 1993, "Analysis of lubrication theory for the power law fluid", *Journal of Tribology*, V. 115, pp. 71-77.

JU, S. M., WENG, C. I., 1994, "Thermohydrodynamic analysis of finite-width journal bearings with non-Newtonian lubricants", *Wear* V. 171, pp. 41-49.

KANGO, S., SHARMA, R. K., 2010, "Studies on the influence of surface texture on the performance of hydrodynamic journal bearing using power law model", *Int. J. Surface Science and Engineering*, V. 4, pp. 505-524.

KUMAR, S., 1980, "Stochastic models with variable viscosity for hydrodynamic lubrication of rough surfaces", *Wear* V.62, pp. 329-336.

KUMAR, S., SHARMA, R. K., 2008, "Studies of the hydrodynamic bearings with surface profiling and entrained solid particulate", PhD Thesis, IIT Delhi, India.

LI, W. -L., WENG, C. -I., LUE, J. -I., 1996, "Surface roughness effects in journal bearings with non-Newtonian lubricants", *Tribology Transactions*, V. 39, n° 4, pp. 819-826.

LIN, J. -R., CHOU, T. -L., HO, M. -H., 2006, "Dynamic characteristic of finite slider bearings lubricated with a non-Newtonian power-law fluid", *Industrial Lubrication and Tribology*, V. 58, N° 5, pp. 254-259.

LIN, J.-R., CHOU, T.-L., LIANG, L.-J., HUNG, T.-C., 2012, "Non-Newtonian dynamics characteristics of parabolic-film slider bearings: Micropolar fluid model", *Tribology International*, V. 48, pp. 226-231.

LIU, S., 2012, “On boundary conditions in lubrication with one dimensional analytical solutions”, *Tribology International*, V. 48, pp. 182-190.

MACHADO, H. A. & COTTA, R. M., *Integral Transform Method for Boundary Layer Equations in Simultaneous Heat and Fluid Flow Problems*, *International Journal Numerical Methods Heat & Fluid Flow*, v.5, pp.225-237, 1995.

MAGNO, R. N. O., 1998, “Solução das equações da camada limite para um fluido não-newtoniano via Técnica da Transformada Integral Generalizada”, *Dissertação (Mestrado)*, PPEQ/UFPA, Belém-PA, Brasil.

MAGNO, R. N. O., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N., 1999, “Integral transform solution for the internal boundary layer of non-Newtonian fluids”, *Hybrid Methods in Engineering*, V1, pp. 173-184.

MAGNO, R. N. O., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N., 2002, “Solutions for the internal boundary layer equations in simultaneously developing flow of power-law fluids within parallel plates channels”, *Chemical Engineering Journal*, V.87, pp. 339-350.

MAJUMDAR, C. R., 1969, “The numerical solution of hydrostatic oil journal bearings with several supply ports”, *Wear*, V.4, pp. 389-396.

MALISKA, C. R., *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1995.

METZNER, A. B., 1965, “Heat transfer in non-Newtonian fluids”, *Advances in Heat Transfer*, V.2, Academic Press, New York.

MIKHAILOV, M. D. e ÖZISIK, M. N., *Unified Analysis and Solution of Heat and Mass Diffusion*, John Wiley, New York, 1984.

MIYAZIMA, A. T., Solução Analítica e Numérica da Equação de Reynolds para Mancal Radial de Deslizamento Hidrodinâmico, Itajubá, 1989. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - EFEI.

MOKHIAMER, U. M., CROSBY, W. A., EL-GAMAL, H. A., 1999, “A Study of a Journal Bearing Lubricated by Fluids with Couple Stress Considering the Elasticity of the Liner”, *Wear*, V. 224, pp. 194-201.

MONTEIRO, E. R., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N., COTTA, R. M., 2010, “Laminar flow and convective heat transfer of non-Newtonian fluids in doubly connected ducts”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, V. 53, pp. 2434-2448.

NASCIMENTO, S. C. C., Solução das Equações de Movimento para o Escoamento de um Fluido Power-Law em Canal de Placas Paralelas via Técnica da Transformada Integral Generalizada, Belém, 2001. Dissertação ( Mestrado em Engenharia Química) – UFPA.

NASCIMENTO, U. C. S., Estudo da Região de Entrada Térmica no Escoamento Laminar de Plástico de Bingham em Dutos Anulares Concêntricos, Belém, 2000. Dissertação ( Mestrado em Engenharia Química) – UFPA.

NASCIMENTO, S. C. S., MACÊDO, E. N., QUARESMA, J. N. N., 2006, “Generalized Integral Transform Solution for hydrodynamically developing non-Newtonian flows in circular tubes”, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, V. XXVIII, Nº 1/125.

NAYFEH, A. H., 1973, “Perturbation Methods”, John Willey, New York

NESSIL, A., LARBI, S., BELHANECHÉ, H., MALKI, M., 2013, “Journal bearings lubrication aspect analysis using non-Newtonian fluids”, *Hindawi Publishing Corporation - Advances in Tribology*, V. 2013, Article ID 212568, pp. 9.

NOWAK, Z., WIERZCHOLSKI, K., 1984, “Flow of a Non-Newtonian Power Law Lubricant through the Conical Bearing Gap”, *Acta Mechanica* V.50, pp. 221-230.

ÖZISIK, M. N. e MURRAY, R. L., On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions Parameters, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 96, pp. 48-51, 1974.

PÉREZ GUERRERO, J. S., COTTA, R. M., 1995, “Integral Transform Solution of Developing Laminar Duct Flow in Navier-Stokes Formulation”, *International Journal Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1203-1213.

PÉREZ GUERRERO, J. S., COTTA, R. M., 1996, “Benchmark integral transform results for flow over a backward-facing step”, *Computers and Fluids*, Vol. 25, pp. 527-540.

PÉREZ GUERRERO, J. S., QUARESMA, J. N. N., COTTA, R. M., 2000, “Simulation of laminar flow inside ducts of irregular geometry using integral transforms”, *Computational Mechanics*, Vol. 25, pp. 413-420.

PINKUS, O., STERNLICHT, B., 1961, “Theory of Hydrodynamic Lubrication”, McGraw-Hill Book Company Inc., 464p.

RAGHUNANDANA, K., MAJUMDAR, B. C., (1999), “Stability of journal bearing systems using non-Newtonian lubricants: a non-linear transient analysis”, *Tribology International*, V.32, pp. 179-184.

RAGHUANDANA, K., 2007, “Inverse design methodology for the stability design of elliptical bearings operating with non-Newtonian lubricants”, *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*, San Francisco, USA.

ROSA, E. S., 2009, “Introdução ao Método das Perturbações”, *Apostila Métodos Matemáticos*, FEM-DE UNICAMP, Brasil.

RUSSO, M., CAPONE, G., D’AGOSTINI, V., 1983, “Performance of finite journal bearings in non-laminar lubrication regime”, *Tribology International*, V. 16, Nº 2, pp. 85-88.

SAFAR, Z. S., 1979, “Journal bearings operating with non-Newtonian lubricant film”, *Wear*, V.53, pp. 95-100.

SANTOS, E. N., 2004, “Solução da equação de Reynolds para mancais radiais via Técnica da Transformada Integral Generalizada”, Dissertação (Mestrado), PPEM/UFPA, Belém, PA, Brasil.

SANTOS, E. N., BLANCO, C. J. C., MACÊDO, E. N., MANESCHY, C. E. A., QUARESMA, J. N. N., 2012, “Integral transform solutions for the analysis of hydrodynamic lubrication of journal bearings”, *Tribology International*, V. 52, pp. 161-169.

SHARMA, D., ATHRE, K., BISWAS, S., IYENGER, S. R. K., 1991, “Solution of Reynolds’ Equation for a Non-Newtonian Lubricant in a Journal Bearing Implementing the Moving Boundary Conditions”, *Tribology International*, V. 24, N° 2, pp. 85-89.

SHARMA, S. C., JAIN, S. C., SAH, P. L., 2000, “Effect of non-Newtonian behavior of lubricant and bearing flexibility on the performance of slot-entry journal bearing”, *Tribology International*, V. 33, pp. 507-517.

SILVA, F. A. P., *Tribologia*, Fundação Calouste Gulbekian, Janeiro, 1985.

SILVA, R. L., *A Técnica da Transformada Integral Generalizada no Escoamento e na Transferência de Calor em Dutos*, João Pessoa, 2003. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – UFPB.

SILVA, R. L., QUARESMA, J. N. N., SANTOS, C. A. C., COTTA, R.M., 2011, “Integral transforms solution for flow development in wavy wall ducts”, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, V.21 pp. 219-43.

SINHA, P., SINGH, C., 1982, “Lubrication of a cylinder on a plane with a non-Newtonian fluid considering cavitation”, *Journal Lubrication of Technology* V. 104, pp. 168-172.

SPHAIER, L. A., COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., QUARESMA, J. N. N., 2011, “The UNIT algorithm for solving one-dimensional convection-diffusion problems via integral transforms. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, V. 38, pp. 565-571.

STEPHENSON, R. W., 1997, “Analysis of hydrodynamic journal bearings with hydrostatic recess- Summary of computer programs”, Report, University of Kentucky, Lexington, Kentucky.

SKELLAND, A. H. P., 1967, “Non-Newtonian flow and heat transfer”, John Wiley and Sons, Inc., New York.

SWAMY, S. T. N., PRABHU, B. S., RAO, B. V. A., 1975, “Calculated load capacity of non-Newtonian lubricants in finite width journal bearings”, *Wear*, V.31, pp. 277-285.

SZERI, A., 2005, “Fluid Film Lubrication: Theory and Design”, UK, Second Edition, University of Cambridge.

TALA-IGHIL, N., FILLON, M., MASPEYROT, P., 2011, “Effect of textured area on the performances of a hydrodynamic journal bearing”, *Tribology International*, V.44, pp. 211-219.

TAYAL, S. P., SINHASAN, R., SINGH, D. V., 1982, “Analysis of hydrodynamic journal bearings having non-Newtonian lubricants”, *Tribology International*, pp. 17-21.

TRUEDELLE, C., NOLL, W., 1965, “The non-Newtonian field theories of mechanics”, *Encyclopedia of Physics*, V. III, pt. 3, Springer-Verlag, Berlin.

VERMA, R. L., 1981, “Generalized Reynolds and integrated energy equations for fluid-film lubrication”, *Int. Journal Non Linear Mechanics* V. 16, pp. 71-78.

WANG, X. -L., ZHU, K. -Q., WEN, S. -Z., 2001, “Thermohydrodynamic analysis of journal bearings lubricated with *couple stress* fluids”, *Tribology International*, V. 34, pp. 335-343.

WILLIAMS, P. D., SYMMONS, G. R., 1987, "Analysis of Hydrodynamic Journal Bearings Lubricated with Non-Newtonian Fluids", Tribology International, V. 20, N° 3, pp. 119-224.

YOO, S. S., 1974, "Heat transfer and friction factors for non-Newtonian fluids in turbulent pipe flow", Ph.D. Thesis, University of Illinois, Chicago, U.S.A.

## APÊNDICE I

### CÁLCULO DA TAXA DE ESCOAMENTO AXIAL PARA A FORMULAÇÃO GERAL: VIA BALANÇO INTEGRAL

Na Equação (5.1.a) obtida no Capítulo 5 a partir da Equação (3.0) para o cálculo da taxa de escoamento axial, devido a existência do termo  $\partial\psi_i/\partial\eta|_{\eta=0}$ ,  $\tilde{Q}_S$  demora a convergir. Com objetivo de verificar a fórmula de inversão e melhorar a convergência de  $\tilde{Q}_S$  foi feito um balanço integral na Eq. (5.1a), assim temos que:

$$\left(\frac{\sqrt{n}\theta_L\lambda}{2}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\eta} \left( (\tilde{h}(\phi))^{n+2} \frac{\partial P}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \left( (\tilde{h}(\phi))^{n+2} \frac{\partial P}{\partial\phi} \right) = f(\phi) \quad (\text{A.1})$$

sendo,

$$f(\phi) = 6n\theta_L^2 \varepsilon \text{sen}(\theta_L\phi) \quad (\text{A.2})$$

Aplicando a regra da cadeia na Eq. (A.1), tem-se:

$$a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial\phi^2} + g(\phi) \frac{\partial P}{\partial\phi} = \tilde{f}(\phi) \quad (\text{A.3})$$

sendo,

$$a = \frac{\sqrt{n}\theta_L\lambda}{2} \quad (\text{A.4})$$

$$g(\phi) = (n+2) \frac{\partial\tilde{h}(\phi)}{\partial\phi} / \tilde{h}(\phi) \quad (\text{A.5})$$

$$\tilde{f}(\phi) = f(\phi) / (\tilde{h}(\phi))^{n+2} \quad (\text{A.6})$$

Integrando a Eq. (A.3) no domínio de  $[ 0, \eta ]$  e a equação resultante no domínio de  $[\eta, 1 ]$  será obtida uma expressão para o termo  $\partial P/\partial \eta|_{\eta=0}$  para ser substituído na Eq. (3.40) evitando desta forma o surgimento da autofunção na equação da taxa de escoamento axial e desta forma melhorando a convergência deste parâmetro. Assim:

$$a^2 \int_0^\eta \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} d\eta + \int_0^\eta \frac{\partial^2 P}{\partial \phi^2} d\eta + \int_0^\eta g(\phi) \frac{\partial P}{\partial \phi} d\eta = \int_0^\eta \tilde{f}(\phi) d\eta$$

logo,

$$a^2 \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_\eta = a^2 \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} - \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\eta) \left[ \frac{\partial^2 \tilde{P}_i}{\partial \phi^2} + g(\phi) \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial \phi} \right] + \tilde{f}(\phi) \eta \quad (\text{A.7})$$

Integrando a Eq. (6) no domínio  $[ \eta, 1 ]$ , tem-se:

$$a^2 \int_\eta^1 \frac{\partial P}{\partial \eta} d\eta = a^2 \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \int_\eta^1 d\eta - \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_\eta^1 C_i(\eta) d\eta \right) \left[ \frac{\partial^2 \tilde{P}_i}{\partial \phi^2} + g(\phi) \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial \phi} \right] + \tilde{f}(\phi) \int_\eta^1 \eta d\eta$$

logo,

$$P(\eta, \phi) = - \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} (1-\eta) + \sum_{i=1}^{\infty} D_i(\eta) \left[ \frac{d^2 \tilde{P}_i}{d\phi^2} + g(\phi) \frac{d\tilde{P}_i}{d\phi} \right] \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2} \tilde{f}(\phi) (1-\eta^2) \quad (\text{A.8})$$

Da condição de contorno ( 5.1.b) ( $P=0$  em  $\eta = 0$ ), tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{d^2 \tilde{P}_i}{d\phi^2} + g(\phi) \frac{d\tilde{P}_i}{d\phi} \right) D_i(0) - \frac{1}{2a^2} \tilde{f}(\phi) \quad (\text{A.9})$$

Substituindo a Eq. (A.9) na Eq. (3.20) obtida no Capítulo 3, tem-se:

$$\tilde{Q}_s = -\frac{\theta_L}{6} \left\{ \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} D_i(0) \int_0^1 \tilde{h}^{n+2} [m_i^2 \tilde{P}_i + C_i \tilde{f}(\phi)] d\phi - \frac{1}{2a^2} \int_0^1 \tilde{h}^{n+2} \tilde{f}(\phi) d\phi \right\} \quad (\text{A.10})$$

sendo,

$$D_i(0) = \int_0^1 C_i(\eta) d\eta = \frac{1}{\mu_i \sqrt{N_i}} \quad (\text{A.11})$$

$$C_i(\eta) = \frac{1 - \cos(\mu_i)}{\mu_i \sqrt{N_i}} \quad (\text{A.12})$$

$$\tilde{h}(\phi) = 1 + \varepsilon \cos(\theta_L \phi) \quad (\text{A.13})$$