



Programa de Pós-Graduação em Engenharia
de Recursos Naturais da Amazônia

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO REBAIXAMENTO DE LENÇÓIS FREÁTICOS COM POÇOS VERTICAIS OU HORIZONTAIS PRÓXIMOS A CORRENTES POR TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Elizeu Melo da Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, PRODERNA/ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais.

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma

Belém

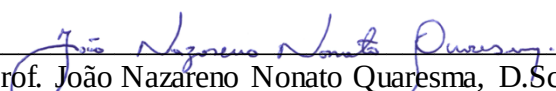
Maio de 2017

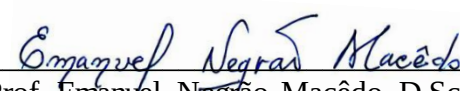
**SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO REBAIXAMENTO DE LENÇÓIS
FREÁTICOS COM POÇOS VERTICAIS OU HORIZONTAIS PRÓXIMOS A
CORRENTES POR TRANSFORMADAS INTEGRAIS**

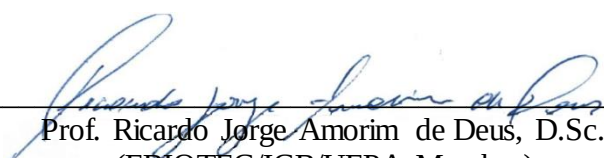
Elizeu Melo da Silva

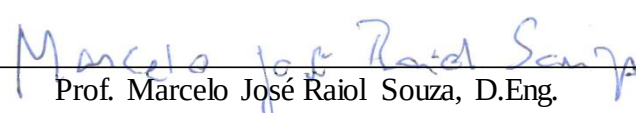
TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA
DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA
AMAZÔNIA (PRODERNA/ITEC) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS.

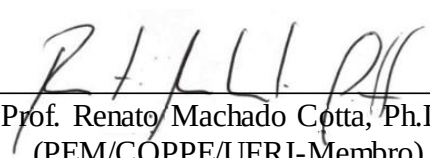
Examinada por:


Prof. João Nazareno Nonato Quaresma, D.Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA-Orientador)


Prof. Emanuel Negrão Macêdo, D.Sc.
(PRODERNA/ITEC/UFPA-Membro)


Prof. Ricardo Jorge Amorim de Deus, D.Sc.
(FBIOTEC/ICB/UFPA-Membro)


Prof. Marcelo José Raiol Souza, D.Eng.
(CCNT/UEPA-Membro)


Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.
(PEM/COPPE/UFRJ-Membro)

BELÉM, PA - BRASIL

MAIO DE 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistemas de Bibliotecas da UFPA

Silva, Elizeu Melo da

Solução do problema do rebaixamento de lençóis freáticos com poços verticais ou horizontais próximos a correntes por transformadas integrais/Elizeu Melo da Silva.- 2017.

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, Belém, 2017.

1. Águas subterrâneas - escoamento 2. Poços
3. Transformadas integrais. I. Título

CDD 23. ed. 553.79

Dedicado em memória do meu irmão Eliézio Melo da Silva, que em vida foi meu primeiro e melhor amigo e de sua esposa, Patrícia Grama Araújo. Dedico também em memória do meu saudoso tio Miguel Pereira por ter sido um grande amigo e incentivador e do querido professor Dennin Tomas Quispe Arapa falecido neste dia.

AGRADECIMENTOS

Antes de todas as pessoas a quem possa agradecer, agradeço a Deus e a seu filho Jesus Cristo por sua infinita misericórdia para comigo, que certamente me deu forças e sabedoria pra consumir este projeto, que era dele desde o início.

Gostaria de também de agradecer a algumas pessoas, dentre as muitas que me ajudaram a realizar este trabalho, em especial a minha família: aos meus Pais: José Pereira da Silva e Maria Melo da Silva, à minha maravilhosa e amada esposa Suellem Melo, às minhas doces e lindas filhas Joanna e Manuela e ao meu lindo e amado filho Miguel. A todas as minhas irmãs: Elisângela, Eloíde, Edna, e Eline Melo e aos meus cunhados: Shelby Gadelha e Joas Santos.

Quero agradecer também à minha Sogra, Sra. Raimunda e meu sogro, o Sr. Moacir e a todos os seus filhos e filhas em especial ao Moacir Filho e a Arlenira pelo apoio e amizade. Aos meus compadres e amigos Saidson e Valéria Antônio e as suas filhas Juliana e Letícia pelo grande apoio a mim prestado.

Ao meu orientador e amigo João Nazareno Nonato Quaresma, pelo apoio e companheirismo dedicados nestes últimos anos e por ser grande incentivador na busca pelo conhecimento, demonstrando sempre muito respeito e até mesmo admiração pelos seus orientados.

Ao professor Emanuel Negrão Macêdo, que além de competente, com alegria soube dosar as dificuldades convertendo-as em uma salutar descontração nos momentos de tensão.

Aos meus irmãos de caminhada do Segue-me-Paróquia N. Sra. de Nazaré-Diocese de Marabá-e aos Jovens do grupo Milícia Celeste-Paróquia N. Sra. de Nazaré-Arquidiocese de Belém-pelas orações e amizade.

Ao PRODENA/ITEC/UFPA pela oportunidade dada ao desenvolvimento do meu curso de doutorado.

Ao CNPq pelo apoio financeiro concedido.

“Não te desvaneças, pois, com qualquer arte ou conhecimento que recebeste. Se te parece que sabes e entendes bem muitas coisas, lembra-te que é muito mais o que ignoras. Não te presumas de alta sabedoria; antes, confessa a tua ignorância.”

Tomás de Kempis.

Resumo da Tese apresentada ao PRODENA/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais (D.Eng.)

**SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO REBAIXAMENTO DE LENÇÓIS
FREÁTICOS COM POÇOS VERTICAIS E HORIZONTAIS PRÓXIMO A
CORRENTES POR TRANSFORMADAS INTEGRAIS**

Elizeu Melo da Silva

Maio/2017

Orientador: João Nazareno Nonato Quaresma

Área de Concentração: Uso e Transformação de Recursos Naturais

Soluções analíticas ou híbridas baseadas na técnica de transformação integral são propostas para tratar o problema do rebaixamento tridimensional de aquíferos confinados, gotejantes ou não confinados usando poços verticais totalmente penetrantes (FPVW) ou poços de coletores radiais (RCW) entre rios paralelos de leitos semi-permeáveis, com vazão de bombeamento variando no tempo e condição inicial variando no espaço. Favorecendo a técnica empregada, foi adotado o esquema de ordenamento dos autovalores e realizada uma análise extensiva da convergência das soluções. Um filtro pseudo-estacionário foi utilizado na solução a fim de absorver informações do termo fonte, definido pelo poço, o que acelerou consideravelmente a convergência da solução em série, eliminando a convergência oscilante provocada pelo fenômeno de Gibbs. A fim de validar os resultados obtidos, foram realizadas comparações com resultados existentes na literatura, onde se demonstrou a eficiência da solução proposta. Foi verificada a influência da vazão de bombeamento sobre as taxas de depleção, gotejamento, liberação e drenagem gravimétrica dos aquíferos e observando como em atividades de drenagem de longo prazo as taxas de esgotamento dos rios é igual a variação da vazão de bombeamento, ou seja, as taxas de esgotamento do rio em atividades de longo prazo podem ser gerenciadas pela própria vazão de bombeamento do poço.

Abstract of Thesis presented to PRODENA/UFPA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Natural Resource Engineering (D.Eng.)

**SOLUTION OF THE PROBLEM OF DRAWDOWN WATER TABLE OF
AQUIFERS WITH VERTICAL OR HORIZONTAL WELLS NEAR STREAMS
BY INTEGRAL TRANSFORMS**

Elizeu Melo da Silva

May/2017

Advisor: João Nazareno Nonato Quaresma

Research Area: Use and Transformation of Natural Resources

Analytical or hybrid solutions based on the integral transformation technique are proposed to treat the problem of three-dimensional drawdown of confined, leaky or unconfined aquifers using fully penetrating vertical wells (FPVW) or radial collector wells (RCW) between parallel rivers with semi-permeable streambeds, with pumping rates varying in Time and initial condition varying in space. Favoring the technique employed, the scheme of ordering the eigenvalues was adopted and the extensive analysis of the convergence of the solutions was performed. A pseudo-stationary filter was used in the solution to absorb information from the source term, defined by the well, which considerably accelerated the convergence of the solution in series, eliminating the oscillating convergence caused by the Gibbs phenomenon. In order to validate the obtained results, comparisons were made with the results in the literature, where the efficiency of the proposed solution is demonstrated. It was verified the influence of the pumping rate on the rates of depletion, leakage, release and gravimetric drainage of the aquifer and observing how in long-term drainage activities the rates of river exhaustion are equal to the variation of the pumping rate, that is, stream depletion rates on long-term activities can be managed by itself pumping the well flow.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS	7
1.2 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	8
CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA.....	9
2.1 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	9
2.1.1 - Porosidade	12
2.1.2 - Produção Específica	15
2.1.3 - Permeabilidade	16
2.1.4 - Coeficiente de Armazenamento	17
2.1.5 - Transmissividade	19
2.1.6 - Taxas de Bombeamento	19
2.2 - REVISÃO DA LITERATURA	21
CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO.....	26
3.1 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	26
3.2 - METODOLOGIA DE SOLUÇÃO	31
3.2.1 - Técnica da Transformada Integral Generalizada	33
3.3 - SOLUÇÃO DA EDP POR TRANSFORMADAS INTEGRAIS	36
3.3.1 - Solução do Problema Filtro	38
3.3.2 - Solução do Problema Homogêneo.....	45
3.3.3 - Cálculo das Taxas de Bombeamento	49
CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO	53
4.1 - RESULTADOS- POÇO VERTICAL	54
4.2 - RESULTADOS- POÇO HORIZONTAL	61
4.3 - ESTUDO DA VARIAÇÃO DA TAXA DE BOMBEAMENTO	68
4.4 - ESTUDO DA VARIAÇÃO DA CONDIÇÃO INICIAL	72
4.5 - ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	76
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	81
5.1 - CONCLUSÕES	82
5.2 - SUGESTÕES	83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	84
Apêndice A - Transformação da condição inicial.....	89
Apêndice B - Transformação da equação pseudo-estacionária.....	91

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Distribuição da água na Terra.	1
Figura 1.2	Esquema dos fluxos da água e componentes hidrológicos nas zonas vadosa e saturada.	2
Figura 1.3	Zonas não saturada e saturada do subsolo.	3
Figura 1.4	Processos comuns de poluição de água subterrânea.	4
Figura 1.5	Intrusão salina e interação entre águas subterrâneas e águas superficiais. 5	
Figura 1.6	Rebaixamento do lençol freático provocado por poço vertical: a) Q_1 próximo ao rio com vazão baixa, parte do lençol freático com fluxo do aquífero para o rio; b) Q_2 vazão maior que a capacidade de recarga do aquífero, fluxo do rio para o aquífero induzido pelo bombeamento do poço.....	6
Figura 2.1	Seis categorias de estrutura do solo: (a) de grãos únicos; (b) granular; (c) maciço;(d) chapa; (e) em blocos; (f) prismático.....	10
Figura 2.2	Representação esquemática que classifica os tipos de aquífero.	11
Figura 2.3	Diagrama mostrando vários tipos de interstícios de rocha; a) Depósito sedimentar bem classificado, com porosidade elevada; b) Depósito sedimentar mal classificado, com porosidade baixa; c) Depósito sedimentar bem classificado, consistindo de seixos que são eles próprios porosos, de modo que o depósito como um todo tem uma porosidade muito elevada; d) Depósito sedimentar bem classificado, cuja porosidade foi diminuída pela deposição de material mineral nos interstícios; e) Rocha tornada porosa por solução; f) Rocha tornada porosa por fraturamento.	13
Figura 2.4	Classificação dos tipos de aquíferos, quanto a porosidade: a) poroso; b) Fissural ou c) Cárstico.....	13
Figura 2.5	Formação do solo em suas três fase.	14
Figura 3.1	Esquema da distribuição horizontal de um RCW de vazão variável num aquífero situado entre dois rios paralelos, com nível freático inicial variável: a) posição horizontal do poço; b) corte transversal.....	26
Figura 3.2	Figura esquemática de um aquífero com nível freático inicial variável entre dois rios paralelos drenado por um FPVW de vazão variável: a) localização horizontal do poço; b) esquema do aquífero confinado; c) aquífero gotejante e d) aquífero não confinado.	27
Figura 4.1	SDR_1 de aquíferos confinados, gotejantes e não confinados, obtidos das Eqs. (3.116), (3.77)-(3.78) e da solução do sistema de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99) e da Eq. (3.102) nos casos confinado e gotejante.....	55
Figura 4.2	SDR_1 , SRR e GDR de aquíferos não confinados, obtidos através das Eqs. (3.116), (3.118) e (3.120) e da solução do sistema de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99).	56
Figura 4.3	Distribuição temporal de SDR_1 e SDR_2 de aquífero não confinado para $k_1=k_2=50$, variando a distância entre os rios w_x	57

Figura 4.4	Distribuição espaciais da pressão adimensional preditas pela presente solução em $z=0$ para $k_1 = k_2 = 50$, $w_x = 10$ em: a) $t=10^3$; b) $t=10^5$58
Figura 4.5	Perfil da distribuição da pressão hidráulica em aquíferos livres para tempos distintos, variando na direção x , obtidos da Eq. (3.104).59
Figura 4.6	Perfil da distribuição da pressão hidráulica em aquíferos livres para produções específicas S_y distintas variando na direção x , obtidos da Eq. (3.104).59
Figura 4.7	SDR_1 , SRR e GDR em aquíferos livres variando o rendimento específico S_y61
Figura 4.8	SDR_1 num aquífero não confinado fazendo: $k_z=0.01, 0.1, 1$ e 10 , comparados a solução de HUANG et al. (2015).62
Figura 4.9	Distribuição bidimensional da pressão hidráulica num aquífero não confinado, próxima a um poço horizontal com $N=2$, $\Theta_1=\pi/2$ e $\Theta_2=3\pi/2$, comparados a solução de HUANG et al. (2015) para $\Theta_1=0$ e $\Theta_2=\pi$63
Figura 4.10	Distribuição horizontal da pressão num aquífero livre em $z=0$ e $t=10^7$, predita pela Eq. (3.104): (a) provocada por poço vertical, Eq.(3.78), e provocada por RCW, Eq. (3.87) com: (b) $N=2$; (c) $N=4$ e (d) $N=8$64
Figura 4.11	Cálculo de SDR_1 variando no tempo, predita pela Eq. (3.116) de aquífero livre com RCWs paralelos ou perpendiculares aos rios, adotando: $N=2$ e os ângulos $(\Theta_1=\pi/2, \Theta_2=3\pi/2)$ e $(\Theta_1=0, \Theta_2=\pi)$, respectivamente.65
Figura 4.12	SDR_1 , SRR e GDR provocados por um RCW num aquífero livre formado 2, 4 ou 8 coletores, preditas pelas Eqs. (3.116), (3.118) e (3.120).66
Figura 4.13	SDR_1 , SRR e GDR provocados por um RCW num aquífero livre formado variando a comprimento dos seus coletores $L_k=0.5, 0.57$ e 0.9566
Figura 4.14	SDR_1 de aquífero livre variando a profundidade do RCW, fazendo $z_0=0.85, 0.5$ e 0.1567
Figura 4.15	SDR_1 , SRR e GDR provocadas por poço vertical, índice V, e horizontal, índice H, para dois coletores, $N=2$, $L_k=0.5$68
Figura 4.16	Modelos hipotéticos de vazão de bombeamento: (a) Caso 1 e (b) Caso 2.69
Figura 4.17	$SDR_{1,V}$ e $SDR_{1,H}$; GDR_V , GDR_H e SRR_V , SRR_H de aquíferos não confinados drenados por poços verticais e horizontais com vazão de bombeamento $Q(t)=\exp(-\omega_1 t)$71
Figura 4.18	$SDR_{1,V}$ e $SDR_{1,H}$; GDR_V , GDR_H e SRR_V , SRR_H de aquíferos não confinados drenados por poços verticais e horizontais com vazão de bombeamento $Q(t)=\cos(\pi\omega_1 t/2)\theta_{t_1}(t_1-t)+\sin[\omega_2(t-t_2)]\theta_{t_2}(t-t_2)$71
Figura 4.19	SDR_1 de aquíferos não confinados drenados por poços horizontais com vazão de bombeamento $Q(t)$: 1 , $\exp(-\omega t)$ e $\cos(\pi\omega_1 t/2)\theta_{t_1}(t_1-t)+\sin[\omega_2(t-t_2)]\theta_{t_2}(t-t_2)$72
Figura 4.20	Figura esquemática da distribuição da pressão inicial variando no espaço: (a) $\varepsilon < 0$; (b) $\varepsilon > 0$73

Figura 4.21 SDR₁, SRR e GDR de um aquífero não confinado drenado com poço horizontal, N=4, com condição inicial diferente de zero para $\varepsilon = -10^{-4} \dots 74$

Figura 4.22 SDR₁ de um aquífero não confinado drenado com poço horizontal com condição inicial diferente de zero, variando ε no intervalo $[-10^{-3}, 10^{-3}]$.75

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Valores médios de algumas propriedades ligadas às funções de armazenamento e condução dos aquíferos.....	18
Tabela 2.2	Sistema de classificação do tamanho da partícula entre USDA e ISSS. .	19
Tabela 3.1	Problemas de autovalor nas direções x, y e z.....	41
Tabela 4.1	Parâmetros de entrada dimensionais e adimensionais-Poço vertical e horizontal.	53
Tabela 4.2	Modelos hipotéticos de vazão de bombeamento.	69
Tabela 4.3	Esquema de ordenamento 2-D e 3-D dos autovalores.	76
Tabela 4.4	Convergência de SDR ₁ de um aquífero não confinado: Filtro -FPVW e RCW.....	77
Tabela 4.5	Convergência de SDR ₁ de aquífero não confinado - FPVW	78
Tabela 4.6	Convergência de SDR ₁ de um aquífero não confinado - RCW.....	78

NOMENCLATURA

SDR	Taxa de Depleção do Rio (<i>Stream Depletion Ratio</i>)
SRR	Taxa de Liberação de Armazenamento (<i>Storage Release Rate</i>)
GDR	Taxa de Drenagem por Gravidade (<i>Gravity Drainage Rate</i>)
LR	Taxa de Vazamento ou Gotejamento (<i>Leakage Rate</i>)
RCW	Poço de Coletores Radiais (<i>Radial Collector Well</i>)
FPVW	Poço Vertical Totalmente Penetrante (<i>Fully Penetrate Vertical Well</i>)
GITT	Técnica de Transformada Integral Generalizada
CITT	Técnica de Transformada Integral Clássica
SDR _{1,V}	Taxa de Depleção do Rio 1, poço vertical
SDR _{1,H}	Taxa de Depleção do Rio 1, poço horizontal
GDR _V	Taxa de Drenagem por Gravidade, poço vertical
GDR _H	Taxa de Drenagem por Gravidade, poço horizontal
SRR _V	Taxa de Liberação de Armazenamento, poço vertical
SRR _H	Taxa de Liberação de Armazenamento, poço horizontal
MMA	Ministérios do Meio Ambiente
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
NGWA	<i>National Ground Water Association</i>
K _x , K _y , K _z	Condutividades hidráulicas nas direções x, y e z. [m/dia]
S _y , S _s	Produção específica [*], Armazenamento específico [m ⁻¹].
W _x , W _y , H	Largura do aquífero nas direções x, y [m], profundidade [m].
T, S	Transmissividade [m ² /dia], Coeficiente de armazenamento [*].
K', B	Condutividade hidráulica do aquitardo [m/dia], largura do aquitardo [m].
K ₁ , B ₁	Condutividade hidráulica do leito [m/dia] e largura do leito do rio 1 [m].
K ₂ , B ₂	Condutividade hidráulica [m/dia] e largura do leito do rio 2 [m].
$\bar{x}_0^*$, $\bar{y}_0^*$, $\bar{z}_0^*$	Localização do termo fonte [m].
x ₀ [*] , y ₀ [*] , z ₀ [*]	Localização do centro do RCW [m].
L _k [*]	Comprimento da lateral k do coletor [m]
Q ₀	Taxa de inicial de bombeamento do poço [m ³ /dia].
σ	S _y /S _s H ou S _y /S

k_y, k_z	Condutividades hidráulicas adimensional nas direções y e z K_y / K_x , $K_z x_0^{*2} / K_x H^2$
k'	Condutividade hidráulica adimensional do aquitardo $K' H / B K_z$
k_1, k_2	Condutividade hidráulica adimensional do leito do rio $K_1 x_0^* / B_1 K_x$, $K_2 x_0^* / B_2 K_x$
w_x, w_y	Largura adimensional do aquífero nas direções x e y W_x / x_0^* , W_y / x_0^*
$\bar{x}_0, \bar{y}_0$	Localização adimensional do termo fonte $\bar{x}_0^* / x_0^*$, $\bar{y}_0^* / x_0^*$
x_0, y_0	Localização adimensional do centro do RCW x_0^* / x_0^* , y_0^* / x_0^*
L_k	Comprimento adimensional da lateral L_k^* / x_0^*

* Adimensional.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Uma condição favorável para a existência de vida no nosso e nos demais planetas é a existência de água. Aproximadamente 70% da superfície da Terra é revestida por água, contudo menos de 3% de toda essa água é doce, enquanto aproximadamente 97,5% dela é salgada e imprópria para consumo em condições naturais. A água doce disponível é encontrada na sua forma líquida ou congelada, sendo aproximadamente 31% encontrada na sua forma líquida e 69% na forma de gelo, situado sua maioria nas calotas polares. Segundo dados do MMA (MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE, 2007), de toda a água doce disponível para consumo, 96% são provenientes de água subterrânea e apenas 4% dessa água encontram-se na superfície, conforme pode ser visto na Figura 1.1.

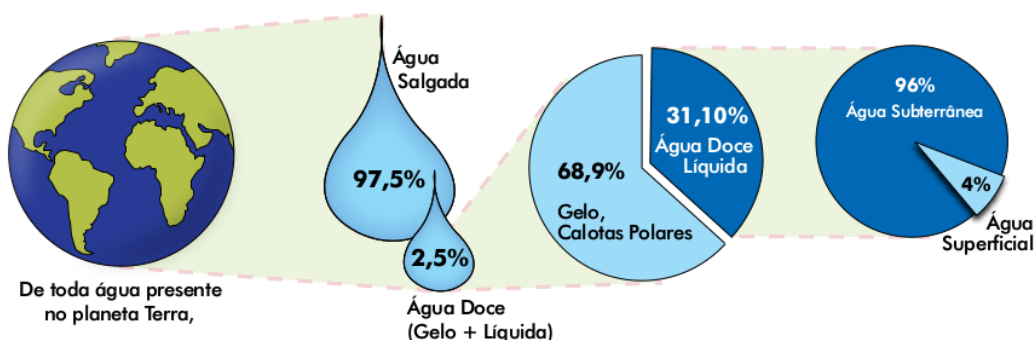


Figura 1.1 - Distribuição da água na Terra.
Fonte: MMA (2007).

Uma parte significativa da população mundial se utiliza apenas da água proveniente do solo. Países como Arábia Saudita, Dinamarca e Malta utilizam exclusivamente essas águas para todo o abastecimento humano. Enquanto que na Áustria, Alemanha, Bélgica, França, Hungria, Itália, Holanda, Marrocos, Rússia e Suíça, mais de 70% da demanda por água é atendida por manancial hídrico subterrâneo (FEITOSA, 1997).

No Brasil, segundo IBGE (INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA, 2000), cerca de 55 % dos distritos são abastecidos por água subterrânea. Cidades como Ribeirão Preto (SP), Maceió (AL), Mossoró (RN) e até

mesmo Manaus (AM), suprem todas as suas necessidades hídricas utilizando esse tipo de abastecimento. Além de atender diretamente à população, esses recursos são utilizados na indústria, agricultura (irrigação), lazer, etc. Em função dessa crescente demanda, as águas subterrâneas estão sob forte pressão. A superexploração, ou seja, a extração de água em volume maior do que a capacidade de recarga dos reservatórios pode provocar a redução da quantidade de água que abastece os rios, a seca de nascentes, o esgotamento dos reservatórios, entre tantos outros impactos negativos.

A água das chuvas ou de irrigação pode ser interceptada nas folhas da vegetação. De acordo com MIDÕES (2001), se a precipitação ou a intensidade de irrigação é maior do que a capacidade de infiltração do solo, a água será removida pelo escoamento superficial, ou se acumulam na superfície do solo até que se evapora para a atmosfera ou infiltra-se no solo. Uma parte desta água é retornada para a atmosfera por evaporação, a outra parte se infiltra no solo, que pode ser absorvida pelas raízes das plantas e eventualmente retornar para a atmosfera num processo denominado transpiração, conforme descreve a Figura 1.2.

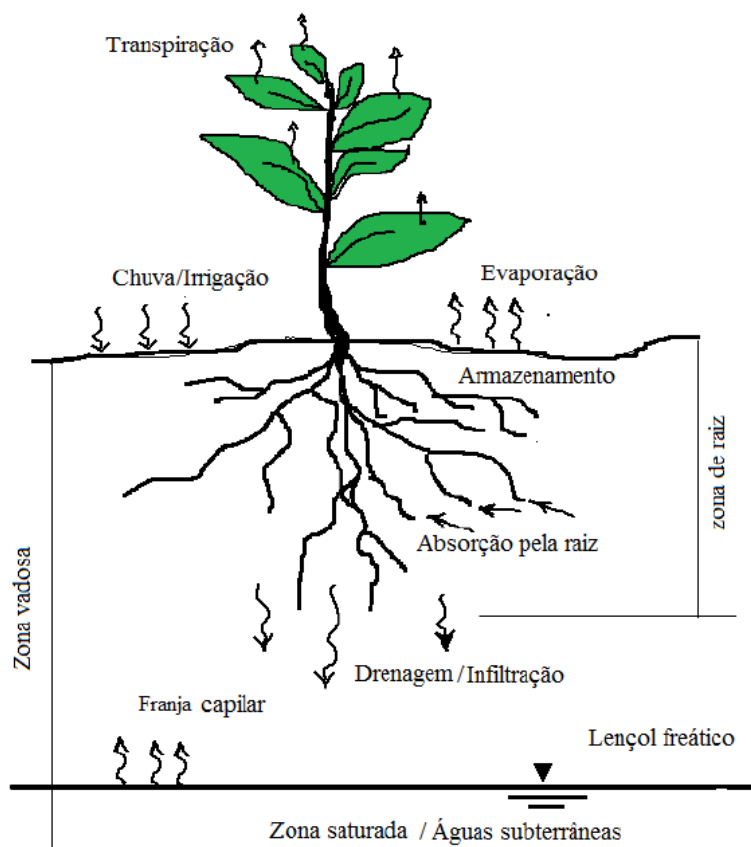


Figura 1.2 - Esquema dos fluxos da água e componentes hidrológicos nas zonas vadosa e saturada.

Fonte: Adaptado de ŠIMŮNEK e van GENUCHTEN (2006).

Os processos de evaporação e transpiração são muitas vezes combinados num único processo denominado de evapotranspiração, (OR *et al.* 2002). Segundo ŠIMŮNEK e van GENUCHTEN (2006) a água que não retorna à atmosfera por evapotranspiração, possivelmente atingirá o lençol freático. Por efeito da capilaridade, a água eleva-se acima do nível da zona de saturação, formando a franja capilar. Se o nível da água é suficientemente perto da superfície do solo ela pode mover-se a partir do lençol freático através das franjas capilares em direção à zona de raiz e posteriormente ser transpirada. De acordo com JÚNIOR (2007) a altura da elevação capilar depende da dimensão dos interstícios e podem atingir valores desde 0,6m a 3,0m nas argilas, ou apenas alguns milímetros de altura em areias grossas. A água que percola a zona de aeração e chega à zona saturada, alimenta os reservatórios subterrâneos, capazes de armazenar grandes quantidades de água naturalmente filtradas e geralmente mais protegidas de fontes de poluição que as águas superficiais.

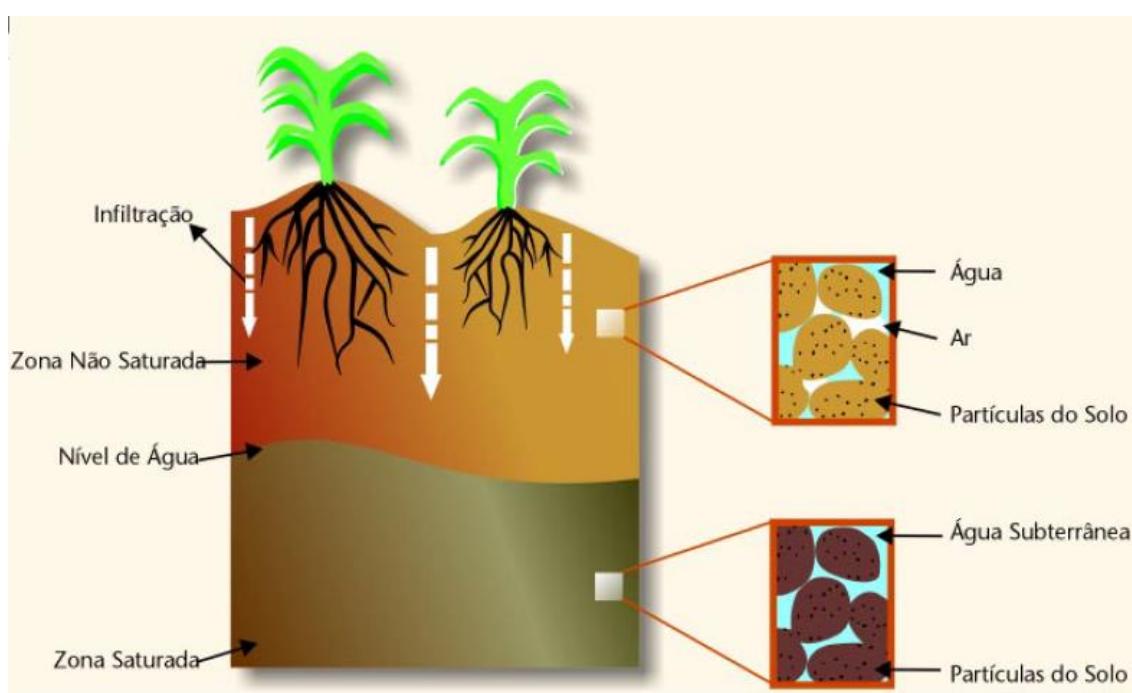


Figura 1.3 - Zonas não saturada e saturada do subsolo.
Fonte: MIDÕES (2001).

De acordo com OR *et al.* (2002) os fenômenos de transporte de fluidos que ocorrem na zona não saturada acontecem nas fases líquida e gasosa. Segundo os autores, o solo está dividido entre a parte sólida, líquida e uma parte é composta por ar,

como pode ser visto na Figura 1.3 que mostra um esquema de como a água está distribuída entre as zonas não saturada e saturada do subsolo. No entanto, na zona de saturação os poros estão livres de ar, portanto a fase gasosa é então desprezada.

A exploração desses recursos tem diversas finalidades, tais como abastecimento, agricultura ou simplesmente seu rebaixamento temporário a fim de possibilitar construções ou atividades de escavação, tais como mineração ocorrendo abaixo do nível do lençol freático. Todas estas atividades implicam modificações das propriedades do solo, podendo ocasionar inclusive a contaminação da zona de aeração e consequentemente da zona saturada por efluentes usados ou produzidos nestas atividades e no caso de drenagem do solo a exaustão do lençol.

Segundo FERREIRA (2014), nas últimas décadas a quantidade de composição dos resíduos e efluentes gerados nestas atividades aumentaram acima da capacidade do solo em reter estes poluentes. A autora então destaca as principais fontes potenciais de contaminação das águas subterrâneas: os lixões; aterros mal operados; acidentes com substâncias tóxicas; atividades inadequadas de armazenamento, manuseio e descarte de matérias primas, produtos, efluentes e resíduos em atividades industriais, como indústrias químicas, petroquímicas, metalúrgicas, eletroeletrônicas, alimentícias, galvanoplastias, curtume, etc.; atividades minerárias que expõem o aquífero; sistemas de saneamento "in situ"; vazamento das redes coletoras de esgoto; uso incorreto de agrotóxicos e fertilizantes; bem como a irrigação que pode provocar problemas de salinização ou aumentar a lixiviação de contaminantes para a água subterrânea; e outras fontes dispersas de poluição, como se podem ver na Figura 1.4.

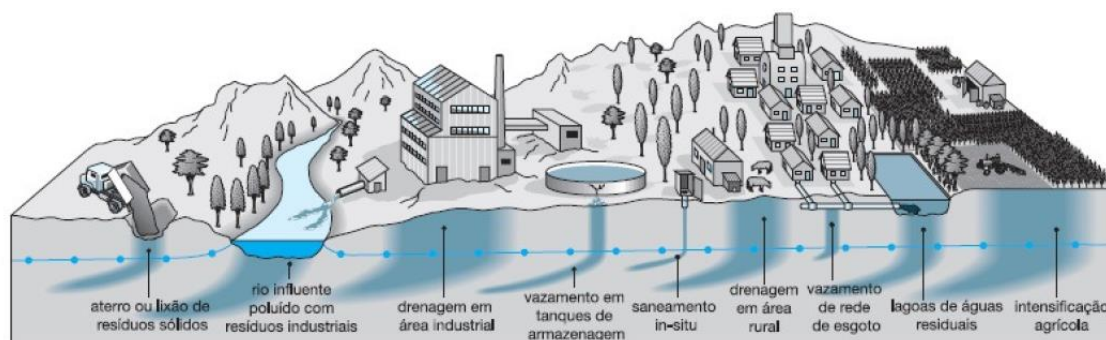


Figura 1.4-Processos comuns de poluição de água subterrânea.

Fonte: FERREIRA (2014).

O uso desordenado desses recursos pode provocar um colapso no abastecimento das regiões que dependam integralmente dessas fontes. Quando a capacidade de um

aquífero em se recuperar é extrapolada por muito tempo, denominamos de superexploração ou superexploração. Segundo MMA (2007), a superexploração é quando a extração de água em volume maior do que o repostado pela natureza, podendo provocar a redução da quantidade de água que abastece os rios, a seca de nascentes e até mesmo o esgotamento dos reservatórios.

De acordo com SILVA e GOMES (2007) em áreas litorâneas, geralmente resultado da superexploração em poços muito próximos do mar, a exaustão do aquífero provoca a liberação dos poros que são ocupados pelas águas marítimas, no sentido do mar para o continente, através de um processo conhecido como intrusão da cunha salina. O avanço da cunha salina é o processo de salinização do aquífero com o avanço da água do mar sobre a água doce no solo freático KOUSSIS *et al.* (2012). Segundo MIDÕES (2001), a intrusão salina é um fenômeno que ocorre em regiões costeiras onde os aquíferos estão em contato com a água do mar, ocorrendo a infiltração da água do mar, mais densa, para dentro do aquífero, formando uma cunha sob a água doce, como pode ser visto na Figura 1.5 a região de intrusão salina entre as águas do mar e o aquífero. A Figura 1.5(A) mostra o exemplo de um rio que recarrega um aquífero, enquanto a Figura 1.5(B) mostra a descarga de águas subterrâneas através de nascentes que alimentam o rio.

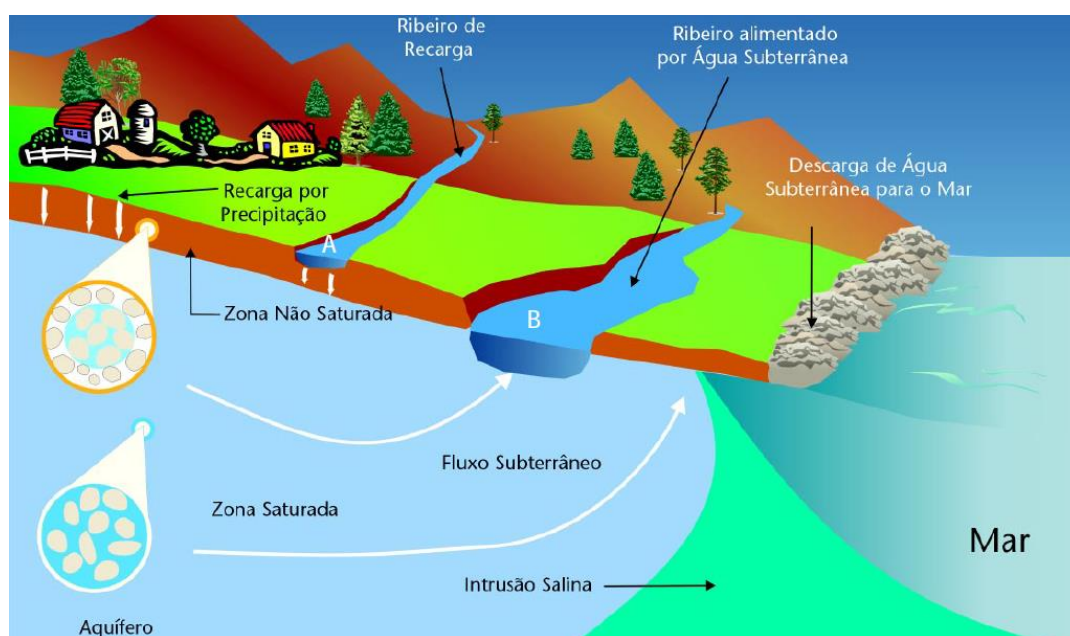


Figura 1.5 - Intrusão salina e interação entre águas subterrâneas e águas superficiais.
Fonte: MIDÕES (2011).

A água captada por poços perto de rios ou riachos pode diminuir o fluxo neste riacho em um processo conhecido como fluxo de depleção ou esgotamento do rio

(HUANG *et al.*, 2014). Este problema se tornou particularmente importante mais recentemente, pelo fato de termos nas regiões mais populosas um aumento expressivo na demanda dos recursos hídricos para o abastecimento das grandes cidades e áreas de cultivos e outros usuários de grande porte, tais como indústrias com atividades de produção ou beneficiamento, como é o caso da mineração, por exemplo. Por este motivo, as agências reguladoras, buscam definir limites para captação de água por poços localizados próximos a córregos. Deste modo, existe uma necessidade continuada tanto para soluções quanto para uma melhor compreensão do comportamento da taxa de esgotamento de fluxo do rio ou taxa de depleção do rio SDR (*Stream Depletion Rate*) e de outras taxas que ajudam a entender a dinâmica do fluxo de água no interior dos aquíferos, tais como a taxa de liberação de armazenamento SRR (*Storage Release Rate*), a taxa de vazamento ou de gotejamento do aquífero LR (*Leakage Rate*) e a taxa de drenagem por gravidade GDR (*Gravity Drainage Rate*).

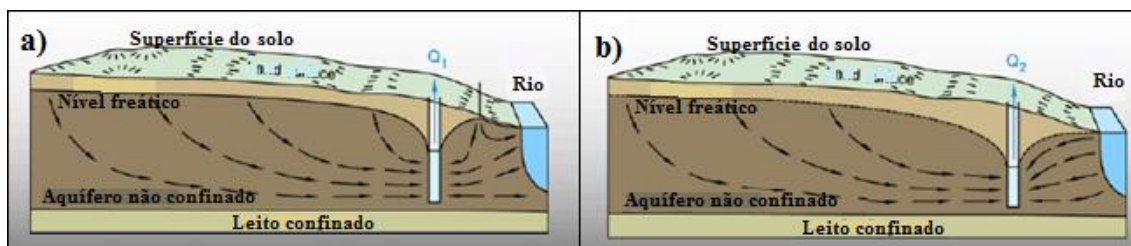


Figura 1.6 - Rebaixamento do lençol freático provocado por poço vertical: a) Q_1 próximo ao rio com vazão baixa, parte do lençol freático com fluxo do aquífero para o rio; b) Q_2 vazão maior que a capacidade de recarga do aquífero, fluxo do rio para o aquífero induzido pelo bombeamento do poço. Fonte: FRAGOSO e NEVES (2017).

Quando um poço é posicionado muito próximo a um córrego, dependendo das condições hidrológicas do aquífero e das taxas de vazão de bombeamento do poço, o bombeamento pode afetar o fluxo de água do rio quando o cone de rebaixamento do aquífero atinge o seu leito, fazendo com que o fluxo do rio passe a ocorrer no sentido do rio pra dentro do aquífero, conforme mostra a Figura 1.6.

Além dos poços comuns posicionados verticalmente, existe hoje outra classe de horizontais denominados de poço coletores radiais (RCW-*Radial Collector Well*). Uma das vantagens em se utilizar poços horizontais é o custo operacional destes poços que podem ser até a metade daquele dos poços verticais, JOSHI (2003). Outra vantagem é que os poços horizontais têm melhor contato com os aquíferos, sendo mais apropriado a

aquíferos finos. O avanço das técnicas de escavação possibilitou o surgimento deste tipo de poço denominado multilateral ou poço de coletor radial.

Segundo JOSHI (2003), esses poços possuem várias formas e oferecem a possibilidade de diferentes tipos de acabamentos para isolar e controlar a produção de diferentes ramos envolvendo multicamadas. No entanto, a partir de 2000, as aplicações de multilaterais em larga escala são observadas em reservatórios de óleo pesado e em reservatórios de carbonatos, usando finalizações de orifícios abertos. Grande parte das aplicações de poços multilaterais é encontrada nos reservatórios de óleo pesado no Canadá e Venezuela e nos reservatórios de carbonato no Oriente Médio.

As aplicações dos RCW têm atraído muito a atenção nas atividades de abastecimento e remediação de águas subterrâneas. Em comparação com os poços verticais, os RCWs requerem menos custos operacionais, é mais produtivo e têm uma melhor eficiência na retirada de água dos aquíferos finos. Em situação em que não seja possível a instalação de um poço vertical normalmente o sistema de drenagem do solo é realizado utilizando poços horizontais. Além disso, os RCWs podem extrair água de um aquífero subjacente a obstáculos tais como edifícios, aeroportos ou estradas, onde os poços verticais não podem ser utilizados.

1.1 - MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

A principal motivação nesta pesquisa está em buscar estabelecer parâmetros de manuseio e exploração dos recursos hídricos que sejam compatíveis com a realidade e capacidade de cada região, preservar o volume e a qualidade da água existente em nossos vastos e abundantes aquíferos, que vem sofrendo desde a década de 1960 com o avanço das técnicas de controle de pragas, insetos e fungos nas lavouras e com as atividades urbanas ou industriais que proporcionam a contaminação dos aquíferos, exigidos cada vez mais no abastecimento de cidades e indústrias.

O objetivo deste trabalho é propor uma solução geral para problemas tridimensionais do rebaixamento de aquíferos confinados, gotejantes ou não confinados em meios porosos homogêneos e anisotrópicos de domínio finito, na zona saturada, utilizando poços verticais e/ou horizontais com vazão de bombeamento e condição inicial variáveis, situados entre dois rios paralelos.

A solução aqui apresentada será obtida através da Técnica de Transformada Integral Generalizada (GITT-*Generalized Integral Transform Technique*), que é uma técnica híbrida numérico-analítica, conforme estabelecida por COTTA (1993). O sistema de EDOs

resultante da transformação será resolvido utilizando um código desenvolvido no Mathematica para este trabalho. A fim de melhorar a convergência, será utilizado um filtro pseudo-estacionário, donde se obtém um problema contendo solução analítica capaz de absorver o termo fonte existente no modelo adotado.

Como objetivo específico, estudaremos a variação de alguns parâmetros físicos no modelo e como estes podem influenciar no rebaixamento do lençol freático e nas curvas características das taxas de esgotamento, gotejamento, drenagem por gravidade e liberação de armazenamento.

1.2 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O seguinte trabalho está organizado a partir do Capítulo 1, com a introdução que descreve a área de estudo e sua importância na manutenção e preservação dos recursos hídricos. Neste capítulo também encontramos a motivação do trabalho e os objetivos gerais e específicos que este pretende alcançar.

O Capítulo 2 contempla os fundamentos teóricos para a formulação matemática da equação governante e faz uma revisão da literatura citando os principais trabalhos existentes na área de estudo. Na fundamentação teórica, que embasa este trabalho, é descrita a técnica empregada para o desenvolvimento do trabalho, neste caso a GITT, que servirá no decorrer do trabalho como fonte para os passos a serem adotados no capítulo imediatamente posterior.

O Capítulo 3 consta da formulação matemática descrita de maneira geral. Quanto à solução, serão abordados três casos distintos, abordando os três tipos de aquíferos: confinado, gotejantes ou não confinados drenado por poços: verticais ou horizontais.

Após a implementação computacional, no Capítulo 4 será feita a análise dos resultados obtidos, comparando-os primeiro aos resultados existentes na literatura e posteriormente aplicados a alguns casos hipotéticos, onde variamos a pressão inicial e a equação da vazão de bombeamento. Será realizada uma análise de convergência da solução, descrita através de tabelas e uma breve discussão dos resultados.

Por fim, teremos no Capítulo 5 a conclusão de trabalho desenvolvido, fazendo as observações pertinentes e apresentando algumas propostas para trabalhos posteriores.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA

2.1 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Segundo JURY e HORTON (2004) o solo pode ter sua estrutura classificada em três grandes grupos: de grão único, maciço e agregado. O solo de grão único é assim classificado por se referir à disposição geométrica do solo separado numa formação porosa, com pouca ou nenhuma cimentação de partículas. Um exemplo desse tipo de solo são as areias de textura grossa, que se orientam frequentemente desse modo, produzindo uma estrutura sólida rígida constituída por minerais primários de forma grosseiramente esférica. O solo de estrutura maciça representa o extremo oposto de uma consolidação completa, sem linhas aparentes de fraqueza. Esse tipo de disposição é característico do material de base, apresentando elevado teor de argila. Entre os extremos estão os solos agregados, formados a partir da junção de partículas menores que, por agentes de cimentação produzidos pelas plantas, animais e pela população microbiana, formam partículas maiores de várias formas. Os solos agregados são compostos pelas ações de intemperismo fora do material de origem, em função dos ciclos de umedecimento e secagem, congelamento e descongelamento, raízes das plantas, tocas de animais, ou outras forças destrutivas. TROEH e THOMPSON (1993) subclassificam os solos de estrutura agregada em outros quatro grupos: granular, chapa, bloco e prismático, de acordo com suas formas, conforme pode ser visto na Figura 2.1.

O comportamento de cada tipo de solo depende da sua formação geológica e de como estão depositados os agregados em cada uma de suas camadas. Esta distribuição granulométrica implica diretamente na forma e velocidade com que os líquidos se movem por entre os poros interconectados. De acordo com BEAR (1972 e 1979) estas formações geológicas estão divididas em quatro tipos distintos: aquíferos, aquíferos, aquíferos, aquíferos, aquíferos e aquíferos.

–**Aquíferos:** são unidades geológicas onde se infiltra e armazena-se água, que pode ser utilizada como fonte de abastecimento. Geralmente, ao penetrar em camadas porosas, quase sempre de rochas sedimentares, a água passa por um processo natural de filtração, tornando-se própria para consumo. Os aquíferos possuem

permeabilidade que permite a movimentação da água em seu interior e são através deles que os cursos de águas superficiais (rios, lagos, nascentes, fontes, pântanos e afins) são mantidos.

- **Aquitardos:** são formações geológicas de natureza semipermeável. Os aquitardos transmitem água a uma taxa muito menor que nos aquíferos. Entre aquíferos adjacentes, separados por aquitardos, pode ocorrer fluxo de água entre eles, o que é denominado de formações semipermeáveis ou formações gotejantes.
- **Aquicludes:** formações geológicas que possuem água, mas não permitem o deslocamento dela entre seus poros por conta de sua baixa permeabilidade.
- **Aquíferos:** são formações geológicas impermeáveis onde não se retém nem se permitem o escoamento de água.

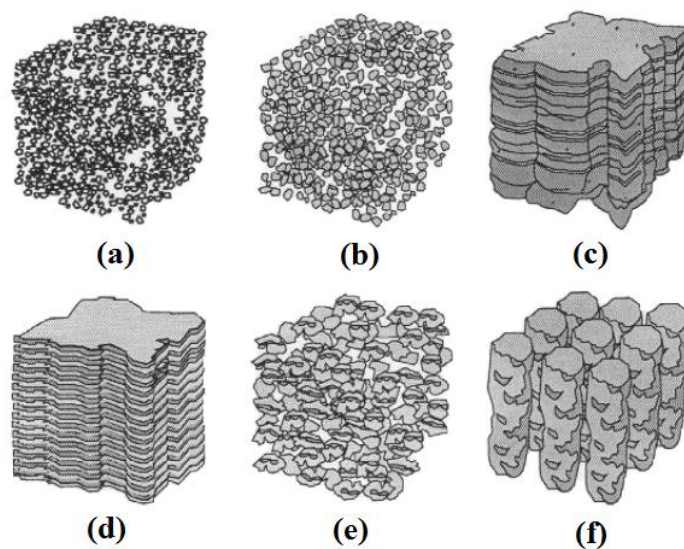


Figura 2.1 - Seis categorias de estrutura do solo: (a) de grãos únicos; (b) granular; (c) maciço; (d) chapa; (e) em blocos; (f) prismático. Fonte: JURY e HORTON (2004).

Dependendo da maneira em que são dispostas as camadas do solo, ou seja, de como estão dispostos os aquitardos, aquicludes e aquíferos, estas camadas formam tipos diferentes de aquíferos. BEAR (1972) e BARLOW e MOENCH (1998) definem tipos distintos de aquíferos como, Figura 2.2:

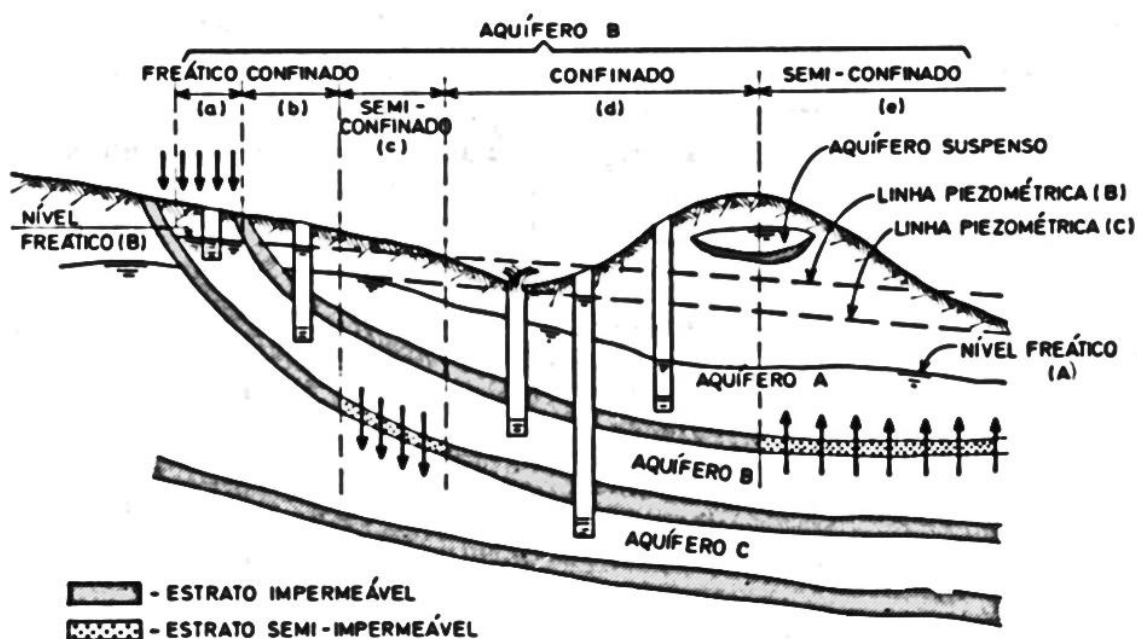


Figura 2.2-Representação esquemática que classifica os tipos de aquífero.

Fonte: JÚNIOR (2007).

1-Aquífero não confinado: também denominado de aquífero livre ou freático, esse tipo de aquífero tem sua superfície limitada por uma camada permeável e seu fundo é limitado por uma camada impermeável. Desse modo a pressão que a água exerce no nível freático é igual à pressão atmosférica. Pelo fato de esse tipo de formação está mais exposta, por não conter nenhum isolamento do meio externo este tipo de aquífero é mais vulnerável a contaminação por efluentes. Por outro lado sua capacidade de recarga é muito maior que a dos aquíferos confinados, pois é recarregável em toda a sua extensão, como na Figura 2.2 (a).

2-Aquífero confinado: também conhecido como aquífero de pressão, é limitado na parte superior e inferior por uma camada impermeável. Nele a pressão da água em seu topo é maior do que a pressão atmosférica. Nesse tipo de aquífero o movimento da água no solo ocorre apenas nas direções horizontais, por esse motivo sua recarga é feita horizontalmente por rios, riachos ou indiretamente nos pontos de afloramento. Se o aquífero confinado estiver abaixo da superfície piezométrica, um poço cavado nele jorrará naturalmente, sem necessidade de bombeamento. A esse tipo de aquífero denomina-se aquífero artesianos e seus poços são denominados “jorrantes” ou “artesianos”, como na Figura 2.2 (b) e (d).

3-Aquífero suspenso: é um caso especial de aquífero livre, formado sobre uma camada impermeável ou semipermeável. A definição de suspenso se dá pelo fato de esse tipo de aquífero encontrar-se acima do nível freático ou da linha piezométrica, como na Figura 2.2 (d) e (e).

4-Aquífero gotejante ou semiconfinado: quando existem dois aquíferos adjacentes separados por uma camada semipermeável ou simplesmente permeável, em que o aquífero subjacente seja confinado ou não, havendo transferência de água entre eles, denomina-se então de aquífero gotejante ou semiconfinado. Em aquíferos gotejantes esse fluxo de água pode acontecer para dentro ou para fora do aquífero, através de suas fronteiras superior ou inferior. A quantidade e a direção do gotejamento dependem da diferença piezométrica existente entre as formações adjacentes, como na Figura 2.2 (c) e (e).

Cada tipo de formação possui características específicas, que determinam a forma e a velocidade com que os fluidos se movem por entre os poros ou fraturas existentes no solo ou na rocha. Portanto, alguns conceitos úteis ao entendimento de como ocorre o movimento dos fluidos nestas matrizes fazem-se necessários. Para isso, serão introduzidos os conceitos básicos úteis à compreensão dos fenômenos hidrológicos a partir de algumas definições.

2.1.1 - Porosidade

A porosidade é a relação do volume de vazios no solo com seu volume total. Expressa em termos percentuais, representa a quantidade de água que a unidade de volume de um material pode armazenar em seus espaços vazios. É a característica que permite a rocha armazenar fluidos em seu interior. Segundo HILLEL (2004) a porosidade do solo geralmente varia entre 0.3 e 0.6. Em rochas sedimentares e sedimentos não consolidados os espaços vazios são poros intergranulares, homogeneamente distribuídos.

Nas rochas ígneas e metamórficas os espaços vazios são constituídos por fraturas. Para que uma rocha ígnea ou metamórfica seja aquífera, é necessário que estas fraturas sejam longas e abertas, e que várias fraturas sejam conectadas entre si, permitindo a infiltração e fluxo da água no seu interior. A Figura 2.3 mostra um

diagrama identificando cada tipo de rocha de acordo com modo com que estão distribuídos os seus poros e com o tipo de sedimentação com que o solo foi constituído.

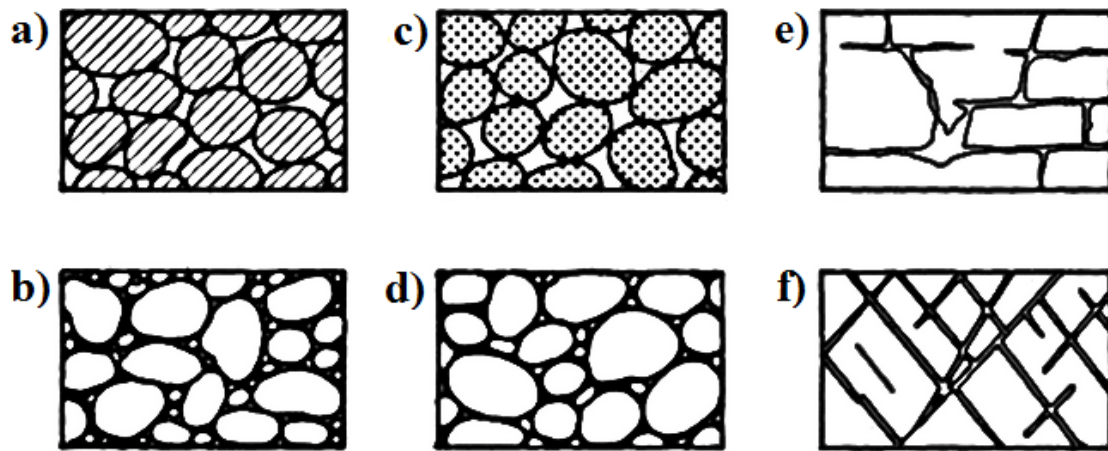


Figura 2.3 - Diagrama mostrando vários tipos de interstícios de rocha; a) Depósito sedimentar bem classificado, com porosidade elevada; b) Depósito sedimentar mal classificado, com porosidade baixa; c) Depósito sedimentar bem classificado, consistindo de seixos que são eles próprios porosos, de modo que o depósito como um todo tem uma porosidade muito elevada; d) Depósito sedimentar bem classificado, cuja porosidade foi diminuída pela deposição de material mineral nos interstícios; e) Rocha tornada porosa por solução; f) Rocha tornada porosa por fraturamento. Fonte: BEAR (1972).

Quanto à porosidade, os aquíferos são classificados em função dos três tipos de espaçamentos de vazios como: poroso, fissural e cárstico, conforme pode ser visto na Figura 2.4, (MMA, 2007).

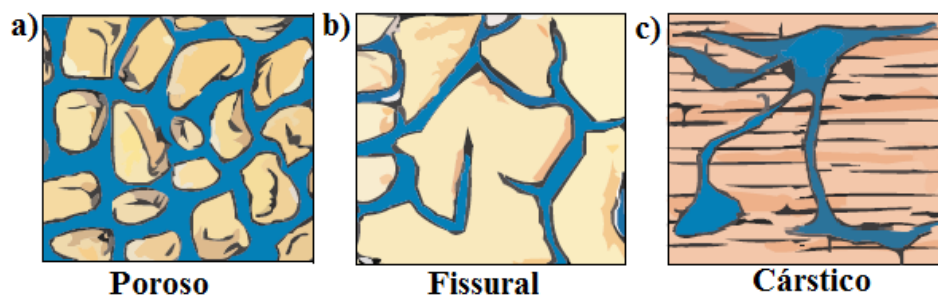


Figura 2.4 - Classificação dos tipos de aquíferos, quanto a porosidade: a) poroso; b) Fissural ou c) Cárstico.

Fonte: MMA (2007)

–**Poroso:** Aquífero com água armazenada nos espaços entre os grãos criados durante a formação da rocha; é o caso das rochas sedimentares. Os aquíferos porosos funcionam como esponjas onde os espaços vazios são ocupados por água.

- Fissural**: Nos aquíferos fissurais formados por rochas ígneas ou metamórficas a água circula pelas fissuras resultantes do fraturamento das rochas relativamente impermeáveis.
- Cárstico**: São os aquíferos formados em rochas carbonáticas, sedimentares, ígneas ou metamórficas. Constituem um tipo peculiar de aquífero fraturado, onde as fraturas, devido à dissolução do carbonato pela água, podem atingir aberturas muito grandes, criando, nestes casos, verdadeiros rios subterrâneos.

Abaixo do nível freático os poros são preenchidos totalmente por água e acima do nível freático por ar e parcialmente por água aderida à superfície dos grãos. De acordo com RADCLIFFE e ŠIMŮNEK (2010) o solo tem seu volume composto por três fases: fase líquida, fase sólida e fase gasosa, conforme se vê na Figura 2.5.

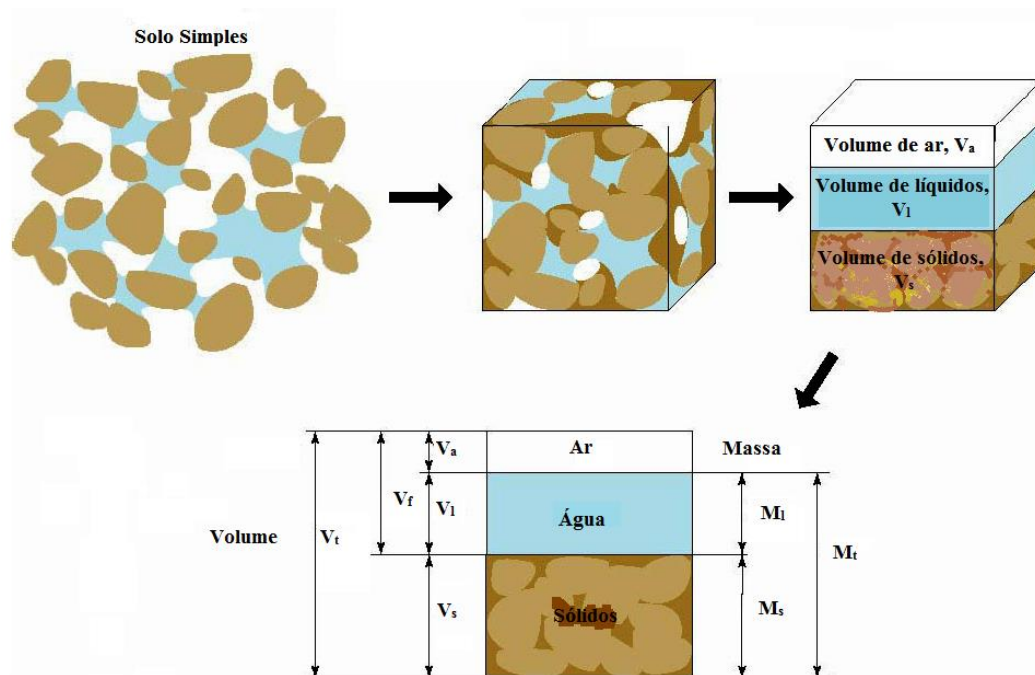


Figura 2.5 - Formação do solo em suas três fase.
Fonte: OR *et al.* (2002).

A porosidade ϕ é o parâmetro físico que mede a relação entre o volume poroso V_p e o volume total V_t de um corpo sólido:

$$\phi = V_p / V_t \quad (2.1)$$

O volume poroso V_p ou volume do fluido V_f é a soma do volume da água ou volume de líquido V_l e o volume de ar V_a :

$$V_p = V_l + V_a \quad (2.2)$$

O volume total V_t da rocha é dado pela soma do volume poroso V_p e volume da parte sólida V_s :

$$V_t = V_a + V_l + V_s \quad (2.3)$$

A porosidade pode também ser classificada em dois tipos: porosidade absoluta e porosidade efetiva:

-Porosidade efetiva P_e : é a percentagem de água de saturação que se liberta, de um material granular, pela ação da gravidade. Pode também ser entendida como a relação entre o volume poroso interconectado e o volume total do meio.

-Porosidade absoluta P_a : considera o volume total dos poros, estejam eles interconectados ou não.

2.1.2 - Produção Específica

A produção específica também é denominada na literatura de rendimento específico ou armazenamento específico, S_y (*Specific yield*) de dimensão $[L^{-1}]$, e representa o espaço vazio que renderá água aos poços sendo eficaz no fornecimento de água. A capacidade de produção de água e a capacidade de retenção de água de materiais rochosos ou de solo são denominadas produção específica e retenção específica. A produção mais a retenção específica de uma rocha ou solo é igual à porosidade da rocha ou do solo. De acordo com JOHNSON (1967) a porosidade efetiva pode ser também denominada de rendimento específico ou produção específica, sendo a razão entre o volume drenado V_d e o volume total da amostra V_t , portanto, $P_e = S_y$ e

$$S_y = V_d / V_t \quad (2.4)$$

De acordo com JÚNIOR (2007) a quantidade de água que o aquífero é capaz de armazenar é diferente da quantidade de água que ele pode fornecer, pois a ação da gravidade é incapaz de retirar de um material toda água da região saturada: uma parcela desta água ficará retida nos interstícios, devido à atração molecular da película que envolve os grãos. Na maioria dos aquíferos não confinados, o rendimento específico varia de 10% a 30%. Em outras palavras, da água mantida por um aquífero, 10 por

cento a 30 por cento pode ser retirada por bombeamento ou outro tipo de descarga NGWA (*NATIONAL GROUND WATER ASSOCIATION*, 2017). Apesar de a porosidade ser um fator importante na infiltração da água no solo, é necessário separá-la do conceito de permeabilidade, pois um solo argiloso pode ser muito poroso, mas ter pouca permeabilidade.

2.1.3 - Permeabilidade

A permeabilidade ou condutividade hidráulica é a propriedade da rocha que permite o escoamento de fluidos através dos poros interconectados, sendo função da porosidade efetiva do meio, da conectividade e forma dos poros. Solos argilosos, por exemplo, apresentam menor permeabilidade do que solos arenosos. Em laboratório, pode-se determinar a permeabilidade indiretamente analisando o tamanho, a forma e a disposição dos grãos que compõem o material ou diretamente observando a taxa de percolação de água através de amostras. No campo, determina-se a permeabilidade através de testes de velocidade da água subterrânea ou por métodos de descarga-poço, ou seja, observando-se as flutuações do lençol freático ou da superfície piezométrica na vizinhança dos poços de descarga (WENZEL, 1942).

DARCY (1856) fez a primeira descrição quantitativa do fluxo através de um meio poroso, que conduziu experimentos em filtração de água através de leitos de areia. Esse mediu o volume de água “q” fluindo por unidade de tempo t através de colunas de areia de comprimento L e área A saturada com água, sob uma diferença de pressão hidrostática ΔP aplicada através dela. Conhecida como lei de Darcy, a proporcionalidade entre a velocidade de escoamento e gradiente hidráulico é dada pelo coeficiente de permeabilidade ou condutividade hidráulica, k [L/T]. Depois de realizar uma série de experimentos, ele desenvolveu a seguinte relação entre as variáveis.

$$q = kA \frac{\Delta P}{L} \quad (2.5)$$

onde k é condutividade hidráulica saturada ou absoluta. Os principais fatores que influenciam no coeficiente de permeabilidade são: granulometria, índice de vazios, composição mineralógica, estrutura, fluido, macroestrutura e a temperatura.

A condutividade hidráulica do material pode ser de três tipos: saturada, efetiva ou relativa:

- **Condutividade saturada:** é denominada assim a condutividade de um material poroso quando este se encontra saturado por um único fluido, ou seja, ocorre em uma única fase.
- **Condutividade efetiva:** é a medida da transmissão de um fluido quando uma ou mais fases adicionais estão presentes. A condutividade associada a cada fluido pode ser denominada:

k_g - condutividade efetiva de gás

k_o - condutividade efetiva de óleo

k_a - condutividade efetiva de água

A soma das condutividades efetivas é sempre menor ou igual a condutividade saturada.

$$k_g + k_o + k_a \leq k$$

- **Condutividade relativa:** é a razão entre a condutividade efetiva para cada fase a uma determinada saturação e a condutividade absoluta.

$k_{r,g} = k_g/k$ - condutividade relativa do gás

$k_{r,o} = k_o/k$ - condutividade relativa do óleo

$k_{r,a} = k_a/k$ - condutividade relativa da água

A Lei de Darcy que rege o escoamento da água nos solos saturados é, portanto, representada pela seguinte equação:

$$V = -k \frac{\Delta h}{\Delta \eta} \quad (2.6)$$

em que:

V é a velocidade da água através do meio poroso;

Δh é a variação de carga piezométrica;

$\Delta \eta$ é a variação de comprimento na direção do fluxo e

$\Delta h/\Delta \eta$ a perda de carga unitária.

2.1.4 - Coeficiente de Armazenamento

De acordo com SAYRE (1955) o coeficiente adimensional de armazenamento de um aquífero S (*Storativity*) é o volume de água liberado ou que entra em estoque por unidade de superfície do aquífero com a mudança unitária da pressão normal à superfície. Segundo JÚNIOR (2007) o coeficiente de armazenamento expressa a capacidade de armazenamento útil de um aquífero, por unidade de área horizontal. O autor descreve-o como o volume de água disponível resultante de um declive unitário na superfície piezométrica sobre uma unidade horizontal de área de seção cruzada com valores médios típicos no intervalo em:

- aquíferos livres:..... 0.01 - 0.35;
- aquíferos artesianos:..... 7×10^{-5} - 5×10^{-3} ;
- aquíferos confinados:..... 10^{-3} - 10^{-5} .

Em aquíferos não confinados o coeficiente de armazenamento e o rendimento específico são iguais. A Tabela 2.1 mostra a relação entre porosidade, produção específica e condutividade hidráulica para os diversos tipos de solo, desde o mais argiloso até o solo mais granulado.

Tabela 2.1 - Valores médios de algumas propriedades ligadas às funções de armazenamento e condução dos aquíferos.

Materiais	Porosidade (%)	Produção específica S_y (%)	Condutividade k (m/dia)
Argila	45	3	0.04
Areia	25	25	35
Pedregulho	25	22	200
Pedregulho e areia	20	16	80
Arenito	15	8	30
Calcário denso	5	2	0.04
Quartzito, granito	1	0.5	0.004

Fonte: JUNIOR (2007)

De acordo com JURY e HORTON (2004) a granulometria dos materiais recebe classificação distinta pelo Departamento de Agricultura dos Estados Unidos USDA (*United State Department of Agriculture*) e a Sociedade Internacional de Ciência do Solo ISSS (*International Soil Science Society*) conforme mostra a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Sistema de classificação do tamanho da partícula entre USDA e ISSS.

	USDA	ISSS
2.0	Areia muito grossa	Areia grossa
1.0	Areia grossa	
0.5	Areia média	
0.2	Areia fina	
0.1	Areia muito fina	Areia Fina
0.05		
0.02	Silte	Silte
0.002	Argila	Argila

Fonte: JURY e HORTON (2004).

2.1.5 - Transmissividade

A transmissividade T [L^2/T] de um aquífero, é a taxa volumétrica de fluxo através de uma seção de espessura B , dada pelo produto entre a condutividade hidráulica, k , e a espessura B da camada do material, como segue.

$$T = kB \quad (2.7)$$

Os valores típicos do coeficiente de transmissividade são entre $[10^{-4}, 1.5 \times 10^{-1}]$ m^2/s .

2.1.6 - Taxas de Bombeamento

Segundo a NGWS (2011) quando um poço é bombeado, a água puxada para dentro dele deixa para trás uma área desidratada, denominada cone de influência ou cone de depressão. O bombeamento de um poço em um aquífero não confinado causa a desidratação real do material dentro do cone de influência. A desidratação ocorre por drenagem de gravidade simples em direção ao ponto mais baixo no ápice do cone, no caso o poço. Quando o bombeamento cessa, o cone enche-se gradualmente de água pela ação da gravidade.

A primeira água a ser bombeada pelo poço é derivada dos poros na vizinhança do poço. À medida que o bombeamento continua, o cone aumenta até interceptar uma

fonte de recarga (reposição) que produza toda a água exigida pela bomba. Nos aquíferos não confinados o cone de influência expande-se inicialmente a taxas que variam entre menos de 100 metros e, em alguns casos, mais de 1 km por dia, (NGWS, 2011).

Com base na lei de Darcy, as taxas de bombeamento são as parcelas que contribuem para a vazão total do poço de bombeamento. HUANG *et al.* (2014) diz que a vazão do bombeamento de um poço sobre um aquífero é dada pela soma das parcelas que compõem o volume total bombeado, que são: depleção do rio, liberação de armazenamento, gotejamento do aquífero subjacente e a drenagem por gravidade. Os autores então definem cada uma destas parcelas como segue:

-Taxa de Depleção do Rio: A taxa de depleção ou esgotamento do rio SDR (*Stream Depletion Rate*) é definida como a razão de água infiltrada do rio (lago, córrego etc...) pela quantidade total de água produzida por um poço de bombeamento. SDR é o fluxo no leito dos rios adjacentes aos aquíferos. Segundo HUANG *et al.* (2014), enquanto a depleção é nula a infiltração ainda não aconteceu e o bombeamento ainda não afetou a corrente. A taxa de esgotamento começa a aumentar com o tempo quando o cone de influência provocado pelo bombeamento atinge o rio. Em alguns casos, em vez de interceptar um lago ou córrego, o cone de influência atinge nascentes que podem deixar de fluir. A regra geral é que o cone continuará a crescer até que intercepte área de base suficiente para satisfazer as demandas do poço bombeado às taxas de recarga de água subterrânea (NGWA, 2011). Segundo HUANG *et al.* (2014), em estado estacionário, se a taxa de drenagem é constante durante o período de bombeamento, SDR aumenta de zero até um valor que poderia ser igual ou menor que a unidade.

-Taxa Liberação de Armazenamento: A taxa liberação de armazenamento de um aquífero SRR (*Storage Release Rate*) é o volume de água liberada do aquífero para o volume total do bombeamento. Segundo NGWA (2011) um poço penetra completamente o aquífero que descarrega a uma taxa constante Q , a água é então libertada do armazenamento em função da compactação do material aquífero, expansão da água e drenagem por gravidade na superfície livre.

-Taxa de Gotejamento: Quando ocorre de um aquífero semiconfinado está sobreposto por outro aquífero, separados por um aquitardo de condutividade diferente dos dois aquíferos, ocorre aí um fluxo de água entre os dois, que pode acontecer do aquífero

sobrejacente para o aquífero subjacente ou vice-versa. Este fluxo de água é denominado taxa de gotejamento LR (*Leakage Rate*). O gotejamento em aquíferos através da camada permeável ou semipermeável é provocada pela diminuição da pressão e do nível do lençol freático do aquífero adjacente.

-Taxa Drenagem por Gravidade: Quando o aquífero é livre ou não confinado, ocorre neste a drenagem por gravidade GDR (*Gravity Drainage Rate*), da superfície para o interior do aquífero, induzida pela redução da pressão do aquífero e consequentemente da redução do nível freático. Se a distribuição inicial da pressão é constante a drenagem gravimétrica inicial é zero, após o início do bombeamento GDR começa a aumentar até um valor máximo, que depende das condições hidrológicas do aquífero, e em seguida tende novamente a zero após a exaustão da água na superfície do aquífero.

2.2 - REVISÃO DA LITERATURA

THEIS (1941) obteve a primeira solução para o problema de esgotamento de córregos, considerando um poço de vazão constante em um aquífero semi-infinito. O modelo por ele proposto considera o aquífero homogêneo, limitado na parte superior por uma superfície livre e na parte inferior por um aquíclode. Este tipo de aquífero é conhecido como "aquífero Theis". GLOVER e BALMER (1954) propuseram uma solução para o mesmo problema escrita em termos de uma função erro complementar e a solução de Theis passou a ser chamada solução de Glover-Balmer. HANTUSH (1965) buscou tornar o problema de Theis um pouco mais geral e realístico, alinhando a extremidade do fluxo a um aquícardo semipermeável de comprimento semi-infinito. HUNT (1999) obteve uma solução para o problema bidimensional de um fluxo parcialmente penetrante de comprimento infinito em um aquífero homogêneo de Theis. BUTLER *et al.* (2001) obtiveram uma solução para o esgotamento em um aquífero de dimensões semi-infinitas, provocada por um poço vertical de penetração superficial adjacente a um córrego de extensão lateral limitada, ou seja, o córrego e o aquífero ambos têm larguras finitas. Estes pesquisadores dividiram o domínio em duas regiões diferentes, contendo um córrego entre elas. Uma equação governante para cada uma das regiões foi determinada, acopladas através das continuidades de pressão e fluxo nas interfaces entre a zona intermediária e zonas laterais.

A maioria dos trabalhos hoje desenvolvidos é de domínio semi-infinito e suas soluções são comumente obtidas por transformada de Fourier, transformada de Laplace

ou pela combinação destas duas técnicas, que transformando o domínio do tempo e do espaço resulta num sistema algébrico que na maioria dos casos necessita de inversão numérica. Problemas de multicamadas, ou aquíferos heterogêneos ainda são bastante escassos. Contudo alguns pesquisadores incluíram no seu domínio a hipótese da heterogeneidade do solo através de camadas com propriedades distintas, como por exemplo, BUTLER *et al.* (2007), HUNT (2009) e WARD e LOUGH (2011).

SUN e ZHAN (2007) modelaram o problema bidimensional de um poço vertical totalmente penetrante (FPVW) situado entre dois rios paralelos, simulando o efeito de leito do rio como um contorno de baixa-permeabilidade, analisando como estes leitos afetam a taxa de esgotamento do rio, obtendo a solução para este problema por Transformada de Laplace. Similarmente INTARAPRASONG e ZHAN (2007) aplicaram transformada de Fourier na obtenção da solução deste problema em estado estacionário bidimensional.

HUANG *et al.* (2014) estenderam o problema do poço vertical a um problema tridimensional, a fim de descrever o fluxo de águas subterrâneas induzido por um poço vertical totalmente penetrante em aquíferos situados entre dois rios. Uma equação geral foi adotada unificando as condições de contorno propostas por NEUMAN (1972) e YEH *et al.* (2010) a fim de representar a condição de contorno na superfície do aquífero, que se aplica aos modelos: aquífero confinado, aquífero não confinado e ao aquífero com vazamento. Estes adotaram a condição de não fluxo no fundo do aquífero, definidos por uma condição de contorno do segundo tipo.

Condições de contornos de segundo tipo descrevem aquíferos confinados, enquanto que aquíferos gotejantes ou com vazamentos são representados por condições de contorno de terceiro tipo. Na direção perpendicular às correntes, foi utilizada uma condição tipo Robin, conforme SUN e ZHAN (2007), para modelar as paredes paralelas de baixa-permeabilidade do leito do rio. Na direção paralela às correntes foi aplicada uma condição de não fluxo em pontos distantes do poço. A solução proposta por HUANG *et al.* (2014) para a solução do problema do poço vertical é dada por transformada de Laplace e as inversões para o domínio do tempo são obtidas analiticamente para o caso confinado e utilizando a aproximação de Padé na obtenção da solução dos casos com vazamento e não confinados.

Os trabalhos citados acima consideraram em seus modelos a vazão de bombeamento constante. Visando tornar o modelo mais realístico alguns autores consideraram a condição da taxa de bombeamento do poço variável, tais como

JENKINS (1968), LATINOPOULOS (1985), SINGH (2005), SINGH e SWAMEE (2009), INTARAPRASONG e ZHAN (2009).

LATINOPOULOS (1985) apresentou uma solução analítica para o escoamento bidimensional de água subterrânea em aquíferos retangulares sob a influência de um poço com taxa de bombeamento variando periodicamente. O autor utilizou dois tipos de funções periódicas para definir o bombeamento variável, definidas separadamente em cada intervalo de tempo por funções seccionalmente contínuas. SINGH (2005) representou a variação da vazão de bombeamento por uma função trigonométrica, simula um termo fonte de sucção quando a vazão é positiva ou um termo de injeção quando a vazão é negativa da função variando no tempo e uma combinação exponencial, que simula o decaimento da vazão do poço. SINGH e SWAMEE (2009) obtiveram resultado para o fluxo de depleção provocado por um poço de vazão sazonal, aproximando a equação periódica da vazão por uma série de Fourier.

INTARAPRASONG e ZHAN (2009) modelaram um aquífero retangular próximo a um rio de corrente variável, sendo drenado por um poço vertical totalmente penetrante, de vazão variando no tempo. Os autores utilizaram funções trigonométricas pra definir a variação da corrente do rio, simulando os efeitos da maré durante o processo de rebaixamento do aquífero analisando a influência da variação da corrente na taxa de depleção do rio.

YEH e CHANG (2013) apresentaram alguns modelos de hidráulica de poços, bem como suas condições iniciais e de contorno para coordenadas retangulares e cilíndricas, descrevendo os tipos de aquíferos empregados. Esses descrevem como condição inicial do problema tridimensional em coordenadas retangulares uma função que varia nas três direções x , y e z , bem como condições de contornos variando no tempo. Fazendo uma breve revisão da literatura, os autores fazem uma breve descrição das principais técnicas analíticas, híbridas e numéricas que tem abordado estes problemas.

O modelo que simula o problema do rebaixamento de aquíferos utilizando poços posicionados horizontalmente foi abordado pelos pesquisadores HANTUSH e PAPADOPOULOS (1962), ZHAN *et al.* (2001), JOSHI (2003), ZHAN e PARK (2003), SUN e ZHAN (2006), MOHAMED e RUSHTON (2006), HAITJEMA *et al.* (2010) e HUANG *et al.* (2011, 2012b e 2015).

ZHAN *et al.* (2001) resolveram o problema de fronteira do fluxo de água subterrânea para o poço horizontal em um aquífero confinado. O método por eles

proposto foi o primeiro a considerar uma fonte de bombeamento e depois integrar a solução sobre o termo fonte ao longo do eixo do poço. Com base nessa abordagem, desenvolveram uma solução analítica para descrever o fluxo de água subterrânea induzido por poços horizontais em um aquífero confinado. Eles apresentaram uma solução analítica para retirada induzida por um poço horizontal em aquíferos confinados e compararam as diferenças entre o poço horizontal e o poço vertical. ZHAN e ZLOTNIK (2002) propuseram uma solução semianalítica por transformada de Laplace com inversão numérica para investigar o rebaixamento por poços inclinados em um aquífero não confinado avaliando a inclinação do aquífero em relação à posição dos rios. ZHAN e PARK (2003) e SUN e ZHAN (2006) propuseram uma solução para o problema do aquífero gotejante.

TSOU, *et al.* (2010) avaliaram a distribuição da pressão e as taxas de depleção num aquífero confinado entre dois rios paralelos provocadas por um poço horizontal, variando a orientação, a distância entre os coletores e o rio, a profundidade e o comprimento dos coletores. Estes obtiveram a solução por Transformada de Fourier para os problemas transiente e estacionário separadamente. Verificaram as taxas de depleção variando a inclinação do poço em relação às correntes, admitindo um ângulo $\Theta=0$ e 90° no modelo proposto e verificaram que a orientação perpendicular, $\Theta=0$, do poço e a redução da distância entre ele e o rio influenciam diretamente no aumento das taxas de depleção.

LEE *et al.* (2012) desenvolveram uma solução por elementos finitos com elementos de triângulo para avaliar as taxas de esgotamento do rio Nakdong na Coréia do Sul por um RCW. Recentemente, HUANG *et al.* (2012a) propuseram uma solução semianalítica e analítica associadas aos RCWs. Além disso, RUSHTON e BRASSINGTON (2013a) estenderam o estudo de MOHAMED e RUSHTON (2006) melhorando a fórmula de Darcy-Weisbach para descrever a perda friccional da pressão dentro de um poço horizontal. As distribuições espaciais do fluxo previsto ao longo do poço revelaram que o fluxo na extremidade de bombeamento é 4 vezes a magnitude da que está na extremidade distante. Posteriormente, RUSHTON e BRASSINGTON (2013b) aplicaram o mesmo modelo para um experimento de campo na Costa Seton, noroeste da Inglaterra.

Atualmente, as soluções analíticas existentes associadas ao fluxo para um RCW em aquíferos não confinados envolvem cálculos trabalhosos (HUANG *et al.*, 2012b) e geralmente os resultados previstos são aproximações de HANTUSH e

PAPADOPOULOS (1962). Os resultados obtidos por HUANG *et al.* (2012b) envolvem a integração numérica tripla na previsão da pressão hidráulica e uma integral quádrupla na previsão de SDR. O integrando é expresso em termos de uma série infinita expandida por raízes de equações não lineares. As variáveis de integração estão relacionadas a essas raízes. A aplicação de sua solução é, portanto, limitada àqueles que estão familiarizados com os métodos numéricos. Além disso, a precisão da solução de HANTUSH e PAPADOPOULOS (1962) é limitada a algumas partes do período de bombeamento, isto é, dá previsões precisas do rebaixamento em tempos curtos e longos, mas divergentes em tempos médios (HUANG *et al.* 2015).

Recentemente HUANG *et al.* (2015) propuseram uma solução analítica para problemas de rebaixamento de poços RCWs entre rios paralelos num aquífero não confinado para uma taxa constante de vazão do poço. A solução da pressão para o poço coletor foi obtida aplicando os métodos de transformada integral finita e transformada de Laplace. O processo de inversão da transformada de Laplace foi obtido utilizando o teorema dos resíduos. A pressão para o RCW foi obtida integrando a solução ponto-coletor ao longo das laterais do RCW e depois dividindo o resultado da integração pela soma dos comprimentos das laterais, conforme ZHAN *et al.* (2001).

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA E METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

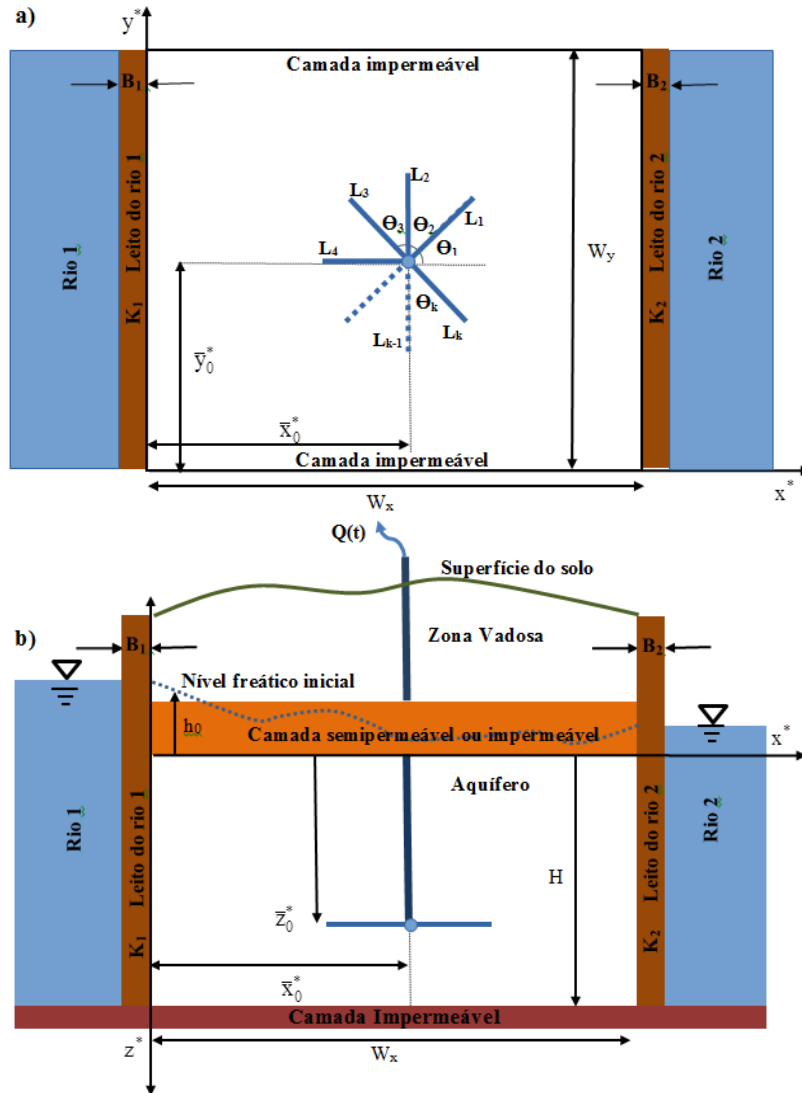


Figura 3.1 - Esquema da distribuição horizontal de um RCW de vazão variável num aquífero situado entre dois rios paralelos, com nível freático inicial variável: a) posição horizontal do poço; b) corte transversal.

O modelo matemático 3D simula o nível do lençol freático em um aquífero situado entre dois rios paralelos de largura desprezível, com profundidade H e nível freático inicial variável no espaço, sendo drenado por um poço com taxa de drenagem variando no tempo $Q^*(t)$. Os rios próximos ao poço são parcialmente isolados pelos seus leitos (*Streambeds*), com condutividades hidráulicas e espessuras denotadas por

(K_1, B_1) e (K_2, B_2) , respectivamente, como proposto por SUN e ZHAN (2007) e INTARAPRASONG e ZHAN (2007).

O domínio do aquífero está definido no intervalo $0 \leq x^* \leq W_x$; $0 \leq y^* \leq W_y$, e $-H \leq z^* \leq 0$. O RCW é constituído por uma ensecadeira composta por vários coletores laterais de comprimento L_k , orientados nas direções dos ângulos Θ_k , onde $k=1, 2, 3, \dots, N$, em que N é o número de laterais do coletor, como mostrado na Figura 3.1. O poço está localizado horizontalmente no ponto $(\bar{x}_0^*, \bar{y}_0^*)$, Fig. 3.1(a), e as laterais circundantes do RCW estão à profundidade $z^* = -\bar{z}_0^*$, como mostrado a Fig. 3.1(b), indicando a posição vertical do RCW.

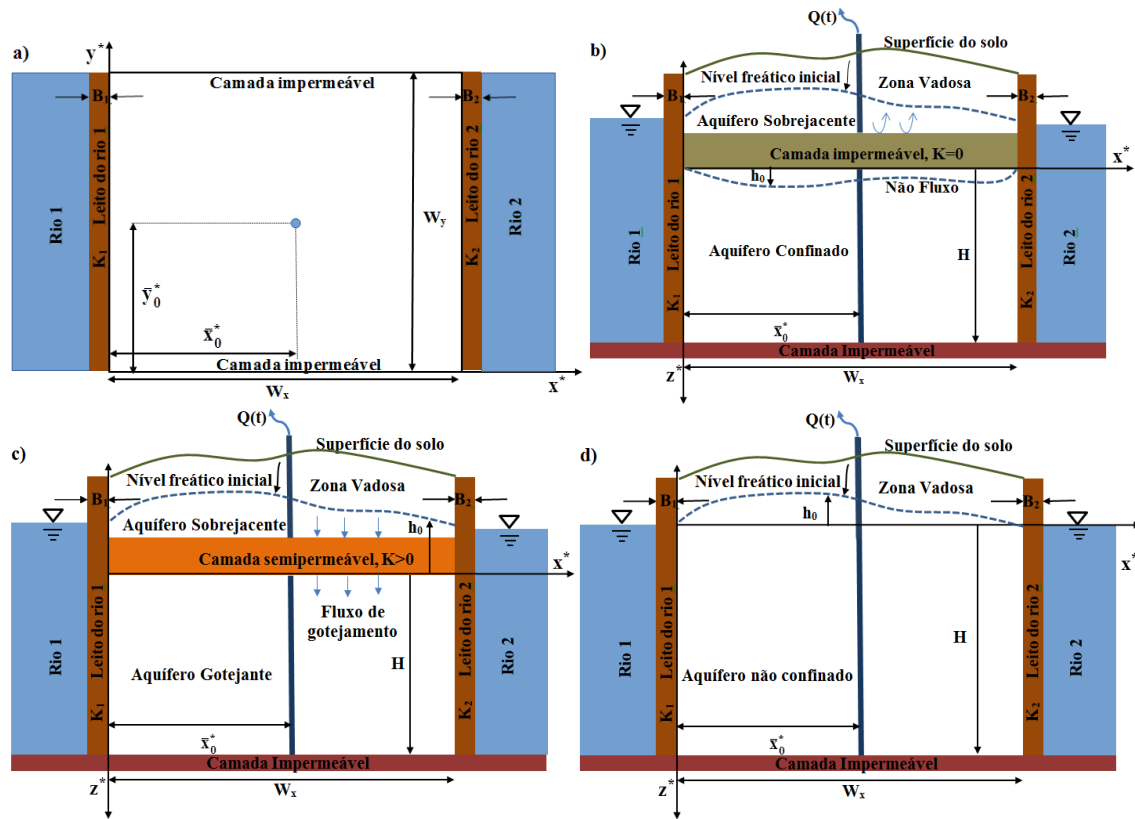


Figura 3.2 - Figura esquemática de um aquífero com nível freático inicial variável entre dois rios paralelos drenado por um FVPW de vazão variável: a) localização horizontal do poço; b) esquema do aquífero confinado; c) aquífero gotejante e d) aquífero não confinado.

A Figura 3.2 mostra o esquema da disposição espacial do poço vertical totalmente penetrante e a existência ou não de camadas semipermeáveis entre os aquíferos. Na superfície, apresentamos uma condição de contorno que defini três tipos distintos de aquíferos: confinado, Fig. 3.2(b), com vazamento, Fig. 3.2(c) ou não confinado, Fig. 3.2(d), dependendo da condutividade K' do aquitardo de largura B entre

os aquíferos e do seu rendimento específico S_y . Quando a condutividade K' é muito baixa, o aquífero torna-se então um aquícluído e o aquífero fica portanto confinado.

Portanto, é proposto um modelo matemático descrevendo o fluxo tridimensional em direção a um sumidouro num aquífero, situado no ponto $(\bar{x}_0^*, \bar{y}_0^*)$, que descreve a distribuição da pressão hidráulica tridimensional transiente $h^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$ expressa como.

$$K_x \frac{\partial^2 h^*}{\partial x^{*2}} + K_y \frac{\partial^2 h^*}{\partial y^{*2}} + K_z \frac{\partial^2 h^*}{\partial z^{*2}} = S_s \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + Q^*(t^*) P^*(x^*, y^*, z^*) \quad \begin{cases} 0 < x^* < W_x \\ 0 < y^* < W_y \\ -H < z^* < 0 \\ 0 < t^* \end{cases} \quad (3.1)$$

em que $P^*(x^*, y^*, z^*)$ é a função que aponta a localização do termo fonte e $Q^*(t^*)$ é a função que determina o fluxo variável do termo fonte, como do tipo

$$Q^*(t^*) = Q_0 f(\omega^* t^*) \quad (3.2)$$

onde ω^* é a frequência angular da variação do bombeamento no tempo, S_s é o armazenamento específico, K_x , K_y e K_z são as condutividades hidráulicas nas direções x^* , y^* e z^* , respectivamente e t^* é o tempo de bombeamento.

A condição inicial do problema proposto é conforme BEAR (1979) uma equação que varie em função do espaço, nas três direções:

$$h^*(x^*, y^*, z^*, 0) = h_0(x^*, y^*, z^*) \quad (3.3)$$

Uma condição de contorno tipo Robin contabiliza a interação entres os rios através de leitos de baixa permeabilidade e o aquífero, descrita a seguir:

$$\frac{\partial h^*}{\partial x^*} - \frac{K_1}{K_x B_1} h^* = 0 \quad \text{em } x^* = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial h^*}{\partial x^*} + \frac{K_2}{K_x B_2} h^* = 0 \quad \text{em } x^* = W_x \quad (3.5)$$

Condições de contorno tipo Neumann representando a condição de não fluxo na direção de y paralela as correntes.

$$\frac{\partial h^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em } y^* = 0; \quad \frac{\partial h^*}{\partial y^*} = 0 \quad \text{em } y^* = W_y \quad (3.6a,b)$$

De acordo com YEH e CHANG (2013), a equação da superfície livre que representa a condição do limite superior dos aquíferos não confinados, homogêneos e

isotrópicos foi proposta pela primeira vez por BOULTON (1954) e posteriormente estendida para meios anisotrópicos por BEAR (1972) descrita como abaixo.

$$K_x \left(\frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right)^2 + K_y \left(\frac{\partial h^*}{\partial y^*} \right)^2 - K_z \frac{\partial h^*}{\partial z^*} = S_y \frac{\partial h^*}{\partial t^*} \quad \text{em } z^* = h^* \quad (3.7)$$

BOULTON (1954), a fim de propor solução analítica para o problema sujeito à condição proposta por ele admite os seguintes pressupostos: (1) os gradientes da pressão h são pequenos e, portanto, suas potências são desprezíveis e (2) para o caso em que a alteração da pressão ocorra na posição inicial do lençol freático, a equação da superfície livre é aplicada de forma simplificada, negligenciando os termos quadrados. NYHOLM *et al.* (2002) afirmaram que se o declínio no lençol freático é menor que 10% da espessura inicial do aquífero, a espessura do aquífero saturado pode ser considerado constante (e.g., $|h| < 0.1H$). Portanto, negligenciando os termos de segunda ordem e substituindo $z^* = h^*$ por $z^* = 0$, a Equação (3.7) fica reduzida a,

$$K_z \frac{\partial h^*}{\partial z^*} + S_y \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \quad \text{em } z^* = 0 \quad (3.8)$$

Segundo MILLHAM e HOWES (1995) e CHEN e JIAO (1999) a fuga através do aquitardo entre dois aquíferos adjacentes acontece no topo do aquífero gotejante e o lençol freático no aquífero não confinado superior pode ser considerado constante devido ao seu efeito de armazenamento. Sob tal condição, a condição de contorno superior pode ser expressa como:

$$K_z \frac{\partial h^*}{\partial z^*} + \frac{K'}{B} h^* = 0 \quad \text{em } z^* = 0 \quad (3.9)$$

Combinando as Equações (3.8) e (3.9) HUANG *et al.* (2012b) generalizam a condição de contorno no topo que modela os três tipos distintos de aquífero: confinado, gotejante e não confinado, expressa conforme a seguir

$$K_z \frac{\partial h^*}{\partial z^*} + \frac{K'}{B} h^* + S_y \frac{\partial h^*}{\partial t^*} = 0 \quad \text{em } z^* = 0 \quad (3.10)$$

em que S_y é o rendimento específico de aquíferos não confinados, K' é a condutividade hidráulica vertical do aquitardo de espessura B . A equação geral (3.10) simula um aquífero gotejante se o rendimento específico $S_y = 0$, contendo um aquitardo de largura B com condutividade $K' > 0$ entre o aquífero e um aquífero sobrejacente. Modela também um aquífero confinado se a condutividade do aquitardo é muito baixa, ou seja, $K' \rightarrow 0$. Assim, o mesmo passa a ser um aquíclode ou uma camada impermeável, passando a

uma condição de não fluxo e rendimento específico S_y nulo. Finalmente, fazendo o rendimento específico $S_y > 0$ e $K' = 0$, a equação modela um aquífero livre ou não confinado, desprezando a existência do aquitardo entre os aquíferos adjacentes, tornando-os apenas um único aquífero.

A condição de contorno no fundo do aquífero também é dada por uma condição de não fluxo, portanto, de segundo tipo,

$$\frac{\partial h^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{em } z^* = -H \quad (3.11)$$

Para a adimensionalização da Eq. (3.1) foram utilizados os seguintes grupos adimensionais:

$$\begin{aligned} h &= \frac{K_x H}{Q_0} h^*; \quad h_0 = \frac{K_x H}{Q_0} h_0^*; \quad t = \frac{K_x}{S_s x_0^{*2}} t^*; \quad \sigma = \frac{S_y}{S_s H} \text{ ou } \frac{S_y}{S}; \quad w_x = \frac{W_x}{x_0^*}; \quad w_y = \frac{W_y}{x_0^*}; \\ x &= \frac{x^*}{x_0^*}; \quad y = \frac{y^*}{x_0^*}; \quad z = \frac{z^*}{H}; \quad \bar{x}_0 = \frac{\bar{x}_0^*}{x_0^*}; \quad \bar{y}_0 = \frac{\bar{y}_0^*}{x_0^*}; \quad \bar{z}_0 = \frac{\bar{z}_0^*}{H}; \quad \omega = \frac{S_s x_0^{*2}}{K_x} \omega^*; \\ k_y &= \frac{K_y}{K_x}; \quad k_z = \frac{K_z x_0^{*2}}{B K_x}; \quad k_1 = \frac{K_1 x_0^*}{B_1 K_x}; \quad k_2 = \frac{K_2 x_0^*}{B_2 K_x}; \quad k' = \frac{K' H}{B K_z}. \end{aligned} \quad (3.12a,s)$$

onde (x_0^*, y_0^*, z_0^*) são coordenadas retangulares da posição do centro do termo fonte e sua adimensionalização é $(x_0^*/x_0^*, y_0^*/x_0^*, z_0^*/H) = (1, y_0, z_0)$. Substituindo (3.12a,s) nas Equações (3.1)-(3.11) obtém-se a seguinte equação adimensional com suas respectivas condições de contornos e inicial:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial h}{\partial t} + Q(t)P(x,y,z) \quad \begin{cases} 0 < x < w_x \\ 0 < y < w_y \\ -1 < z < 0 \\ 0 < t \end{cases} \quad (3.13)$$

$$h(x,y,z,0) = h_0(x,y,z) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial h(0,y,z,t)}{\partial x} - k_1 h(0,y,z,t) = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial h(w_x,y,z,t)}{\partial x} + k_2 h(w_x,y,z,t) = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial h(x,0,z,t)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial h(x,w_y,z,t)}{\partial y} = 0 \quad (3.17a,b)$$

$$\frac{\partial h(x,y,0,t)}{\partial z} + k' h(x,y,0,t) + \frac{\sigma}{k_z} \frac{\partial h(x,y,0,t)}{\partial t} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial h(x,y,-1,t)}{\partial z} = 0 \quad (3.19)$$

onde a equação que determina a vazão de bombeamento $Q(t)$ é dada como

$$Q(t) = \frac{Q^*(t^*)}{Q_0}$$

A Eq. (3.18), modela os três diferentes tipos de aquífero:

- Aquífero confinado: $k'=0$ e $\sigma=0$.

$$\frac{\partial h(x,y,0,t)}{\partial z} = 0 \quad (3.20)$$

- Aquífero gotejante ou com vazamento: $\sigma=0$.

$$\frac{\partial h(x,y,0,t)}{\partial z} + k'h(x,y,0,t) = 0 \quad (3.21)$$

- Aquífero freático, livre ou não confinado: $k'=0$.

$$\frac{\partial h(x,y,0,t)}{\partial z} + \frac{\sigma}{k_z} \frac{\partial h(x,y,0,t)}{\partial t} = 0 \quad (3.22)$$

3.2 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) é um método híbrido ou semianalítico, com base na Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT), que é uma extensão do método da separação de variáveis. A CITT possui relativa flexibilidade no processo de transformação integral bem como na sua inversão. Esta técnica foi desenvolvida e descrita por MIKHAILOV e ÖZISIK (1984), visando obter soluções analíticas unificadas para a transferência de calor e problemas de difusão linear de massa e posteriormente estendida para incluir problemas não lineares de transferência de calor e fluxo de fluido por COTTA (1993), o que deu origem a Técnica da Transformada Integral Generalizada. A GITT é uma das principais ferramentas híbridas utilizadas na obtenção de soluções aproximadas de problemas matemáticos que partem de um modelo físico, como por exemplo, problemas de condução de calor hiperbólica e de Mecânica dos Fluidos. Por este motivo, são necessários estudos mais aprofundados sobre sua aplicabilidade em diversas vertentes, buscando enriquecer ainda mais o seu universo de aplicação, como por exemplo, para problemas de dispersão advecção em meios porosos e em rebaixamento de lençóis freáticos, como é a proposta deste trabalho.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada consiste na transformação da equação diferencial parcial que modela a situação-problema em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas, que para ter solução deve ser truncado em uma ordem suficientemente grande, dependendo do erro requerido e da não linearidade da equação. Feito isto, utiliza-se uma fórmula de inversão apropriada para obter-se o potencial original.

Além do fácil controle e estimativa de erro, outro aspecto notável desse método é a extensão direta para situações multidimensionais, com apenas um moderado aumento do esforço computacional. Sua natureza híbrida é responsável por esse comportamento, uma vez que a parte analítica do procedimento de solução é empregada sobre todas as variáveis, exceto uma, e a tarefa numérica fica então reduzida à integração de um sistema diferencial ordinário transformado.

ÖZISIK e MURRAY (1974) foram pioneiros na utilização da GITT, que consistia em tratar coeficientes de contorno variáveis. Muitas ideias foram surgindo com o objetivo de estender esse procedimento para problemas mais complexos. Segundo COTTA (1993) a GITT abrange problemas das seguintes classes:

- Problemas envolvendo equações com coeficientes variáveis;
- Problemas envolvendo condições de contorno com coeficientes variáveis;
- Problemas com fronteiras móveis;
- Problemas em que a complexidade está associada ao problema auxiliar;
- Problemas não lineares.

Em síntese, a aplicação da GITT envolve uma sequência de procedimentos que pode ser sistematizada nas seguintes etapas:

- 1- Escolher um problema auxiliar de autovalor, que detém o máximo de informações do problema original relativo à geometria e aos operadores;
- 2- Desenvolver a fórmula de transformada e sua fórmula de inversão;
- 3- Transformar a equação diferencial parcial original, através do uso de operadores apropriados, em um sistema de EDOs infinito e não linear, que pode ou não ser acoplado;
- 4- Truncar e resolver o sistema de EDOs, segundo a precisão preestabelecida;
- 5- Construir os potenciais originais, através do uso das fórmulas de inversão.

A seguir, apresentam-se os fundamentos teóricos relativos à GITT.

3.2.1 Técnica da Transformada Integral Generalizada

Segundo COTTA (1993), de maneira geral, a metodologia de aplicação da GITT é descrita sobre um problema difusivo-convectivo linear, multidimensional, transiente e com termo fontes linear, e condição de contorno não homogênea, definido em uma região V da superfície de contorno Γ :

$$w(\underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\underline{x}) \nabla T(\underline{x}, t)] - u(\underline{x}) \nabla T(\underline{x}, t) - d(\underline{x}) T(\underline{x}, t) + P(\underline{x}, t), \quad \{\underline{x} \in V, t > 0\} \quad (3.23)$$

com $w(\underline{x}) > 0$ e condições inicial e de contorno dadas por:

$$T(\underline{x}, 0) = f(\underline{x}), \quad \{\underline{x} \in V\} \quad (3.24)$$

$$a(\underline{x}) T(\underline{x}, t) + b(\underline{x}) K(\underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x}, t)}{\partial \eta} = \zeta(\underline{x}, t), \quad \{\underline{x} \in \Gamma, t > 0\} \quad (3.25)$$

em que η é a componente normal à superfície Γ e $K(\underline{x}) > 0$.

Quando o coeficiente do termo convectivo $u(\underline{x})$ é nulo a Eq. (3.23) é puramente difusiva, diferente disso este termo não pode ser transformado utilizando a técnica de transformação integral clássica. Para estabelecer o par transformada-inversa, o potencial $T(\underline{x}, t)$ é escrito em termos de uma base ortogonal de autofunções obtidas a partir do seguinte problema auxiliar de autovalor:

$$\nabla \cdot K(\underline{x}) \nabla \Psi_i(\underline{x}) + [\mu_i^2 w(\underline{x}) - d(\underline{x})] \Psi_i(\underline{x}) = 0, \quad \{\underline{x} \in V\} \quad (3.26)$$

$$a(\underline{x}) \Psi_i(\underline{x}) + b(\underline{x}) K(\underline{x}) \frac{d\Psi_i(\underline{x})}{d\eta} = 0, \quad \{\underline{x} \in \Gamma\} \quad (3.27)$$

Problemas representados pelas Eqs. (3.26)-(3.27) são conhecidos como problemas de Sturm-Liouville, onde as autofunções $\Psi_i(\underline{x})$ e os autovalores μ_i^2 correspondentes podem ser conhecidos através de soluções puramente analíticas ou pelo método de contagem de sinal desenvolvidos por MIKHAILOV e VULCHANOV (1983). Portanto, a partir da solução do problema (3.26) define-se a fórmula de transformação e sua fórmula de inversão como segue:

$$\bar{T}_i(t) = \int_{\Omega} w(\underline{x}) \tilde{\Psi}_i(\underline{x}) T(\underline{x}, t) d\Omega, \quad \text{Transformada} \quad (3.28)$$

$$T(\underline{x},t)=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{\Psi}_i(\underline{x})\bar{T}_i(t) \quad \text{Inversa} \quad (3.29)$$

em que

$$\tilde{\Psi}_i(\underline{x})=\frac{\Psi_i(\underline{x})}{\sqrt{N_i}} \quad (3.30)$$

e sua fórmula de normalização é dada pela integral

$$N_i=\int_V w(\underline{x})\tilde{\Psi}_i^2(\underline{x})dV, \quad i=1,2,3,..., \quad (3.31)$$

Agora, operando a Eq. (3.23) com o operador integral $\int_V \tilde{\Psi}_i(\underline{x})dV$, obtém-se

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt}+\int_V \tilde{\Psi}_i(\underline{x})[u(\underline{x}).\nabla T(\underline{x},t)]dV+\mu_i^2\bar{T}_i(t)=\bar{g}_i(t), \quad i=1,2,3,... \quad (3.32)$$

em que

$$\bar{g}_i(t)=\int_V \tilde{\Psi}_i(\underline{x})P(\underline{x},t)dV+\int_{\Gamma} K(\underline{x})\left[\tilde{\Psi}_i(\underline{x})\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial \eta}-T(\underline{x},t)\frac{d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{d\eta}\right]d\Gamma \quad (3.33)$$

Para o cálculo da integral

$$\int_{\Gamma} K(\underline{x})\left[\tilde{\Psi}_i(\underline{x})\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial \eta}-T(\underline{x},t)\frac{d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{d\eta}\right]d\Gamma$$

é suficiente multiplicar a Equação (3.25) por $\tilde{\Psi}_i(\underline{x})$ e (3.27) por $T(\underline{x},t)$. Após isso, subtrai-se uma da outra obtendo,

$$K(\underline{x})\left[\tilde{\Psi}_i(\underline{x})\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial \eta}-T(\underline{x},t)\frac{d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{d\eta}\right]=\frac{\zeta(\underline{x},t)\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{b(\underline{x})} \quad (3.34)$$

Para condições de contorno de primeiro tipo, ou seja, $b(\underline{x})=0$, basta fazer uso da fórmula (3.27) o que leva a

$$K(\underline{x})\left[\tilde{\Psi}_i(\underline{x})\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial \eta}-T(\underline{x},t)\frac{d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{d\eta}\right]=-\frac{\zeta(\underline{x},t)K(\underline{x})}{a(\underline{x})}\frac{d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{d\eta} \quad (3.35)$$

ou a sua combinação

$$K(\underline{x})\left[\tilde{\Psi}_i(\underline{x})\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial \eta}-T(\underline{x},t)\frac{d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{d\eta}\right]=\zeta(\underline{x},t)\frac{[\tilde{\Psi}_i(\underline{x})-K(\underline{x})d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})/d\eta]}{a(\underline{x})+b(\underline{x})} \quad (3.36)$$

portanto

$$\int_{\Gamma} K(\underline{x})\left[\tilde{\Psi}_i(\underline{x})\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial \eta}-T(\underline{x},t)\frac{d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{d\eta}\right]d\Gamma=\int_{\Gamma} \zeta(\underline{x},t)\frac{[\tilde{\Psi}_i(\underline{x})-K(\underline{x})d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})/d\eta]}{a(\underline{x})+b(\underline{x})}d\Gamma$$

o que significa que para problemas com condições de contorno homogêneas, ou seja, $\zeta(\underline{x},t)=0$,

$$K(\underline{x}) \left[\tilde{\Psi}_i(\underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial \eta} - T(\underline{x},t) \frac{d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{d\eta} \right] = 0 \quad (3.37)$$

$$\int_{\Gamma} K(\underline{x}) \left[\tilde{\Psi}_i(\underline{x}) \frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial \eta} - T(\underline{x},t) \frac{d\tilde{\Psi}_i(\underline{x})}{d\eta} \right] d\Gamma = 0 \quad (3.38)$$

e o termo $\bar{g}_i(t)$ fica reduzido a

$$\bar{g}_i(t) = \int_V \tilde{\Psi}_i(\underline{x}) P(\underline{x},t) dV \quad (3.39)$$

Fazendo uso da fórmula de inversão, Eq. (3.29), o termo não transformável da Equação (3.32) fica reduzido a,

$$\int_V \tilde{\Psi}_i(\underline{x}) [u(\underline{x}) \cdot \nabla T(\underline{x},t)] dV = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^* \bar{T}_j(t) \quad (3.40)$$

sendo

$$a_{ij}^* = \int_V \tilde{\Psi}_i(\underline{x}) [u(\underline{x}) \cdot \nabla \tilde{\Psi}_j(\underline{x})] dV \quad (3.41)$$

e a Eq. (3.32) fica, portanto, reduzida ao seguinte sistema infinito de EDOs acopladas conforme a seguir:

$$\frac{d\bar{T}_i(t)}{dt} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \bar{T}_j(t) = \bar{g}_i(t), \quad i=1,2,3,\dots \quad (3.42)$$

enquanto

$$b_{ij} = a_{ij}^* + \delta_{ij} \mu_i^2 = \begin{bmatrix} a_{11}^* + \mu_1^2 & a_{12}^* & a_{13}^* & \dots & a_{1N}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* + \mu_2^2 & a_{23}^* & & a_{2N}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* + \mu_3^2 & & a_{3N}^* \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1}^* & a_{N2}^* & a_{N3}^* & \dots & a_{NN}^* + \mu_N^2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (3.44)$$

A solução da Eq. (3.42) depende da condição inicial definida para o problema. Para isso é suficiente transformar também a condição inicial original, Eq. (3.24), usando o operador integral com a função peso $\int_V w(\underline{x}) \tilde{\Psi}_i(\underline{x}) dV$, resultando em

$$\bar{T}_i(0) = \bar{f}_i = \int_V w(\underline{x}) \tilde{\Psi}_i(\underline{x}) f(\underline{x}) dV \quad (3.45)$$

A Equação (3.42) representa um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, acoplado e linear para os potenciais transformados $\bar{T}_i(t)$. Para obtenção da solução numérica do sistema, a expansão do potencial $T(\underline{x}, t)$ é truncada para uma dada ordem N suficientemente alta a fim de garantir a acurácia desejada. Após o cálculo dos potenciais transformados $\bar{T}_i(t)$, aplica-se a fórmula de inversão para a reconstrução do potencial original $T(\underline{x}, t)$ que é a base de cálculo dos diversos parâmetros físicos de interesse do problema. Na sua forma matricial, o sistema truncado de ordem N é reescrito como

$$y'(t) + A(t)y(t) = g(t), \quad \{t > 0\} \quad (3.46)$$

$$y(0) = f, \quad \{t = 0\} \quad (3.47)$$

para

$$y(t) = \{\bar{T}_1(t), \bar{T}_2(t), \bar{T}_3(t), \dots, \bar{T}_N(t)\}^T \quad (3.48)$$

$$A(t) = \{b_{ij}(t)\}^T \quad (3.49)$$

$$g(t) = \{\bar{g}_1(t), \bar{g}_2(t), \bar{g}_3(t), \dots, \bar{g}_N(t)\}^T \quad (3.50)$$

$$f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \dots, \bar{f}_N\}^T \quad (3.51)$$

Na literatura existem vários métodos de solução para problemas de valor inicial conforme descritos pela Eq. (3.46). Em particular, o integrador numérico DIVPAG da Biblioteca IMSL (IMSL/Library, 1994), desenvolvido a partir do método de Gear e/ou Adams-Mouton, tem demonstrado ser uma ferramenta computacional poderosa para a obtenção de resultados numéricos de sistemas *stiff* com esta estrutura.

3.3 SOLUÇÃO DA EDP POR TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Na aplicação do Método de Transformação Integral (COTTA, 1990, 1993, 1994, 1998; PÉREZ GUERRERO e COTTA, 1995, 1996; COTTA e MIKHAILOV, 1997, 2006; PÉREZ GUERRERO *et al.*, 2000; SANTOS *et al.*, 2001; CASTELLÕES *et al.*, 2010; MONTEIRO *et al.* 2010; SPHAIER *et al.* 2011; COTTA *et al.* 2013 e 2016) para resolver o problema dado pelas Eqs. (3.13) são aplicados os passos prescritos na Seção 3.1. A fim de minimizar os efeitos do termo fonte existente na equação geral, a solução por transformadas integrais inicia com a escolha de um filtro pseudo-estacionário como do tipo a seguir:

$$h(x,y,z,t)=h_h(x,y,z,t)+h_f(x,y,z,t) \quad (3.52)$$

A escolha deste filtro homogeniza a Equação (3.13), contudo faz com que surja uma nova equação diferencial parcial tridimensional tendo o tempo “t” como parâmetro. Substituindo a Eq. (3.52) na Eq. (3.13) obtém-se dois problemas distintos: um problema pseudo-estacionário, denominado de problema filtro pseudo-estacionário $h_f(x,y,z,t)$ e um problema transiente da pressão homogênea $h_h(x,y,z,t)$, como segue:

- Problema filtro:

$$\frac{\partial^2 h_f}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h_f}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h_f}{\partial z^2} = Q(t)P(x,y,z) \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial h_f(0,y,z;t)}{\partial x} - k_1 h_f(0,y,z;t) = 0 \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial h_f(w_x,y,z;t)}{\partial x} + k_2 h_f(w_x,y,z;t) = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial h_f(x,0,z;t)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h_f(x,w_y,z;t)}{\partial y} = 0 \quad (3.56a,b)$$

$$\frac{\partial h_f(x,y,0;t)}{\partial z} + k' h_f(x,y,0;t) = -\frac{\sigma}{k_z} \frac{\partial h_f(x,y,0;t)}{\partial t} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial h_f(x,y,-1;t)}{\partial z} = 0 \quad (3.58)$$

- Problema homogêneo:

$$\frac{\partial h_H}{\partial t} = \frac{\partial^2 h_H}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h_H}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h_H}{\partial z^2} - \frac{\partial h_f}{\partial t} \quad (3.59)$$

$$h_H(x,y,z,0) = h_0(x,y,z) - h_f(x,y,z;0) \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial h_H(0,y,z,t)}{\partial x} - k_1 h_H(0,y,z,t) = 0 \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial h_H(w_x, y, z, t)}{\partial x} + k_2 h_H(w_x, y, z, t) = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial h_H(x, 0, z, t)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h_H(x, w_y, z, t)}{\partial y} = 0 \quad (3.63a, b)$$

$$\frac{\partial h_H(x, y, 0, t)}{\partial z} + k' h_H(x, y, 0, t) = -\frac{\sigma}{k_z} \frac{\partial h_H(x, y, 0, t)}{\partial t} \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial h_H(x, y, -1, t)}{\partial z} = 0 \quad (3.65)$$

Com objetivo de reduzir o custo computacional será aplicada à solução dos problemas filtro e homogêneo das Seções 3.3.1 e 3.3.2 seguintes um esquema de ordenamento dos autovalores α_m , β_p e δ_r reduzindo-os a um único autovalor μ_i e os autovalores α_n e β_q serão reduzidos por reordenamento bidimensional ao autovalor λ_j . O reordenamento de autovalores reduz os índices m,p,r a um único índice i e n,q ao índice j selecionando-os do menor para o maior.

Este procedimento é baseado no princípio de que a convergência deste tipo de série depende principalmente dos termos de menor valor positivo, em função do comportamento exponencial do termo dependente do tempo (COTTA e MIKHAILOV, 1997). Por este motivo a ordem de escolha destes autovalores é do menor para o maior, ou seja, escolhem-se sempre as somas quadradas de menor valor absoluto, descartando as combinações de somas que se repetem. A maior contribuição deste procedimento é reduzir os somatórios múltiplos resultante da transformação a um somatório simples em função de um único índice. Um algoritmo para obter autovalores ordenados foi desenvolvido por MIKHAILOV e COTTA (1996) para a solução de problemas de calor e fluxos de fluido multidimensionais. COTTA e MIKHAILOV (1997) descrevem este processo aplicado a problemas de transferência de calor utilizando computação simbólica, implementado no software Wolfram Mathematica, a fim de obter estes autovalores ordenados.

3.3.1 - Solução do Problema Filtro

Conforme ÖZISIK (1993), COTTA (1993) e COTTA e MIKHAILOV (1997), com base na técnica de separação de variáveis, a metodologia de solução do problema

filtro é dada através de um problema de autovalor apropriadamente escolhido da Eq.(3.53), de forma que este possua solução analítica, como segue:

$$\frac{\partial^2 \phi_j(x,y)}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi_j(x,y)}{\partial y^2} + \lambda_j^2 \phi_j(x,y) = 0 \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial \phi_j(0,y)}{\partial x} - k_1 \phi_j(0,y) = 0 \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \phi_j(w_x,y)}{\partial x} + k_2 \phi_j(w_x,y) = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \phi_j(x,0)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \phi_j(x,w_y)}{\partial y} = 0 \quad (3.69a,b)$$

em que $\phi_j(x,y) = X_n(x)Y_q(y)$ é o produto das autofunções nas direções x e y respectivamente em que $\lambda_j^2 = \alpha_n^2 + \beta_q^2$ em que $n,q \rightarrow j$ são obtidos por reordenamento bidimensional dos autovalor nas direções x e y . Por separação de variáveis, da Eq.(3.66), obtém-se dois problemas auxiliares do tipo Sturm-Liouville, conforme consta descrição e solução na Tabela 3.1, fazendo $m=n$ e $p=q$.

A definição de um par transformada e a fórmula de inversão apropriada é dada:

$$\tilde{Z}_j(z;t) = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \phi_j(x,y) h_f(x,y,z;t) dy dx \quad , \text{ Transformada} \quad (3.70)$$

$$h_f(x,y,z;t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(x,y)}{N_j} \tilde{Z}_j(z;t) \quad , \text{ Inversa} \quad (3.71)$$

em que $N_j = N_n N_q$.

Transformando a EDP, Eq. (3.53) e suas condições de contorno, Eqs. (3.57) e (3.58)

com o operador $\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \phi_j(x,y) \text{ ————— } dy dx$

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \phi_j \frac{\partial^2 h_f}{\partial x^2} dy dx + k_y \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \phi_j \frac{\partial^2 h_f}{\partial y^2} dy dx + k_z \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \phi_j \frac{\partial^2 h_f}{\partial z^2} dy dx = Q(t) \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \phi_j(x,y) P(x,y,z) dy dx$$

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \phi_j(x,y) \left(\frac{\partial h_f(x,y,0;t)}{\partial z} + k' h_f(x,y,0;t) \right) dy dx = - \frac{\sigma}{k_z} \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \phi_j(x,y) \frac{\partial h_f(x,y,0;t)}{\partial t} dy dx$$

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \phi_j(x,y) \frac{\partial h_f(x,y,-1;t)}{\partial z} dy dx = 0$$

resultando num sistema de EDOs transformado e suas condições de contorno como segue:

$$k_z \frac{d^2 \tilde{\tilde{Z}}_j(z;t)}{dz^2} - \lambda_j^2 \tilde{\tilde{Z}}_j(z;t) = \tilde{\tilde{P}}_j(z;t) , \quad (3.72)$$

$$\frac{d \tilde{\tilde{Z}}_j(0;t)}{dz} + k' \tilde{\tilde{Z}}_j(0;t) = - \frac{\sigma}{k_z} \frac{d \tilde{\tilde{Z}}_j(0;t)}{dt} , \quad (3.73)$$

$$\frac{d \tilde{\tilde{Z}}_j(-1;t)}{dz} = 0 \quad (3.74)$$

O problema descrito pelas Eqs. (3.72)-(3.74) possui solução analítica que depende da função $P(x,y,z)$ adotada no modelo. Neste trabalho, o modelo matemático que descreve a drenagem do aquífero utilizando um poço vertical totalmente penetrante ou horizontalmente posicionado foi baseado nos modelos propostos por ZHAN *et al.* (2001), KOLLET e ZLOTNIK (2003), HUANG *et al.* (2014) e HUANG *et al.* (2012a e 2015). A equação modela um poço coletor radial RCW posicionado horizontalmente ou um poço vertical totalmente penetrante dependendo do termo fonte proposto. A solução desta equação será então desenvolvida separadamente nas Seções 3.3.1.1 e 3.3.1.2 para os casos especiais em que:

$$P^*(x^*, y^*, z^*) = \begin{cases} \frac{1}{H} \delta(x^* - \bar{x}_0^*) \delta(y^* - \bar{y}_0^*) & , \text{se poço vertical} \\ \delta(x^* - \bar{x}_0^*) \delta(y^* - \bar{y}_0^*) \delta(z^* + \bar{z}_0^*) & , \text{se poço horizontal} \end{cases}$$

em que δ é a função delta de Dirac, que adimensionalizada resulta em

$$P(x,y,z) = \begin{cases} \delta(x - \bar{x}_0) \delta(y - \bar{y}_0) & , \text{se poço vertical} \\ \delta(x - \bar{x}_0) \delta(y - \bar{y}_0) \delta(z + \bar{z}_0) & , \text{se poço horizontal} \end{cases}$$

portanto

$$\tilde{\tilde{P}}_j(z;t) = \begin{cases} Q(t) \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} X_j(x) Y_j(y) \delta(x - \bar{x}_0) \delta(y - \bar{y}_0) dy dx & , \text{se poço vertical} \\ Q(t) \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} X_j(x) Y_j(y) \delta(x - \bar{x}_0) \delta(y - \bar{y}_0) \delta(z + \bar{z}_0) dy dx & , \text{se poço horizontal} \end{cases}$$

ou seja

$$\tilde{\tilde{P}}_j(z;t) = \begin{cases} \tilde{\tilde{P}}_{j, \text{Vertical}} = Q(t) \tilde{\tilde{G}}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0) & , \text{se poço vertical} \\ \tilde{\tilde{P}}_{j, \text{Horizontal}} = Q(t) \tilde{\tilde{G}}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \delta(z + \bar{z}_0) & , \text{se poço horizontal} \end{cases} \quad (3.75)$$

que neste caso

$$\tilde{\tilde{G}}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = X_j(\bar{x}_0) Y_j(\bar{y}_0) \quad (3.76)$$

para simplificar a escrita são adotados

$$X_j = X_n(\alpha_j, x) \text{ e } Y_j = Y_q(\beta_j, y) ; \alpha_j = \alpha_{n(j)} \text{ e } \beta_j = \beta_{q(j)}$$

Tabela 3.1 - Problemas de autovalor nas direções x, y e z.

Direção X	
Problema de autovalor	$\frac{d^2 X_m}{dx^2} + \alpha_m^2 X_m(x) = 0$
Condições de Contorno	$\frac{dX_m(0)}{dx} - k_1 X_m(0) = 0; \quad \frac{dX_m(w_x)}{dx} + k_2 X_m(w_x) = 0$
Auto-quantidades	$X_m(x) = \alpha_m \cos(\alpha_m x) + k_1 \sin(\alpha_m x)$ $(\alpha_m^2 - k_1 k_2) \tan(\alpha_m w_x) = \alpha_m (k_1 + k_2), \quad m=1,2,3,\dots$ $\int_0^{w_x} X_m(x) X_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ N_m, & \text{se } m = n \end{cases}$ $N_m = \int_0^{w_x} X_m^2(x) dx = \frac{\alpha_m^2 + k_1}{2} \left(w_x + \frac{k_2}{\alpha_m^2 + k_2} \right) + \frac{k_1}{2}$
Direção Y	
Problema de autovalor	$\frac{d^2 Y_p}{dy^2} + \beta_p^2 Y_p(y) = 0$
Condições de Contorno	$\frac{dY_p(0)}{dy} = 0; \quad \frac{dY_p(w_y)}{dy} = 0$
Auto-quantidades	$Y_p(y) = \cos(\beta_p y / k_y^{1/2})$ $\beta_p = (p-1)\pi / w_y, \quad p=1,2,3,\dots$ $\int_0^{w_y} Y_p(y) Y_q(y) dy = \begin{cases} 0, & \text{se } p \neq q \\ N_p, & \text{se } p = q \end{cases}$ $N_p = \int_0^{w_y} Y_p^2(y) dy = \begin{cases} w_y, & \text{se } p=1 \\ w_y / 2, & \text{se } p>1 \end{cases}$
Direção Z	
Problema de autovalor	$\frac{d^2 Z_r}{dz^2} + \frac{\delta_r^2}{k_z} Z_r(z) = 0$
Condições de Contorno	$\frac{dZ_r(0)}{dz} + [k' - \frac{\sigma \delta_r^2}{k_z}] Z_r(0) = 0; \quad \frac{dZ_r(-1)}{dz} = 0;$
Auto-quantidades	$Z_r(z) = \cos(\delta_r (z+1) / k_z^{1/2})$ $\tan(\delta_r / k_z^{1/2}) = \sqrt{k_z} [k' - \frac{\sigma \delta_r^2}{k_z}] / \delta_r, \quad r=1,2,3,\dots$ $\int_0^1 Z_r(z) Z_s(z) dz + \sigma Z_r^2(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } r \neq s \\ N_r, & \text{se } r = s \end{cases}$ $N_r = \int_0^1 Z_r^2(z) dz + \sigma Z_r^2(0) = \begin{cases} 1 + \sigma, & \text{se } r=1 \\ \frac{1}{4} \left[2 + \frac{\sqrt{k_z}}{\delta_r} \sin(2\delta_r / k_z^{1/2}) \right] + \sigma \cos^2(\delta_r / k_z^{1/2}), & \text{se } r>1 \end{cases}$

3.2.1.1- Solução da EDO transformada integral- Poço Vertical

Para o modelo do poço vertical $\tilde{\tilde{P}}_j(z;t) = Q(t)\tilde{\tilde{G}}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \tilde{\tilde{P}}_{j, \text{Vertical}}$ dependente apenas do parâmetro “t”. Por este motivo o sistema não homogêneo de EDOs possui solução analítica pelo método dos coeficientes a determinar ou por variação dos parâmetros quando $\sigma=0$ e $k' \neq 0$, BOYCE e DIPRIMA (2000), BRONSON e COSTA (2009), como a seguir:

$$\tilde{\tilde{Z}}_{v,j}(z;t) = \frac{Q(t)\tilde{\tilde{G}}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0)}{\lambda_j^2} \left(\frac{k' \cosh(\varphi_j z)}{\varphi_j \sinh(\varphi_j) + k' \cosh(\varphi_j)} - 1 \right) \quad (3.77)$$

Por outro lado, se $\sigma \neq 0$ e $k' = 0$ a solução é obtida utilizando rotina DSolve do Wolfram Mathematica dada como a seguir

$$\tilde{\tilde{Z}}_{v,j}(z;t) = \frac{Q(t)\tilde{\tilde{G}}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0) e^{-(1+z)\varphi_j} \left[\left(e^{z\varphi_j} - 1 \right) \left(e^{(2+z)\varphi_j} - 1 \right) \sigma Q'(t) - \lambda_j \sqrt{k_z} e^{z\varphi_j} \left(e^{2\varphi_j} - 1 \right) \right]}{2\lambda_j^2 \left[\sigma \cosh(\varphi_j) Q'(t) + \lambda_j \sqrt{k_z} \sinh(\varphi_j) \right]} \quad (3.78)$$

em que

$$\varphi_j = \frac{\lambda_j}{\sqrt{k_z}} = \sqrt{\frac{\alpha_j^2 + \beta_j^2}{k_z}}$$

Fazendo uso da fórmula de inversão, Eq. (3.71), a solução do problema filtro $h_f(x,y,z;t)$ para poços verticais poderá ser rescrita da seguinte forma:

$$h_{f, \text{Vertical}}(x,y,z;t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j(x)Y_j(y)}{N_j} \tilde{\tilde{Z}}_{v,j}(z;t) \quad (3.79)$$

onde $\tilde{\tilde{Z}}_{v,j}(z;t)$ é obtido da Eq. (3.77) se $\sigma=0$ e $k' \neq 0$ ou (3.78) se $\sigma \neq 0$ e $k' = 0$.

3.2.1.2- Solução da EDO transformada Integral- Poço horizontal

Para poços coletores, a parte não homogênea da EDO, Eqs. (3.72)-(3.75), dependente também da variável z , $\tilde{\tilde{P}}_j(z;t) = Q(t)\tilde{\tilde{G}}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0)\delta(z+\bar{z}_0) = \tilde{\tilde{P}}_{j, \text{Horizontal}}$. Por este motivo sua solução analítica não é trivial e é portanto obtida através da rotina DSolve do Wolfram Mathematica, conforme a seguir:

- Se $\sigma=0$ e $k' \neq 0$:

$$\tilde{\tilde{Z}}_{H,j}(z;t) = - \frac{\tilde{\tilde{G}}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0) Q(t) e^{-(z+\bar{z}_0)\varphi_j}}{2\sqrt{k_z} \lambda_j \xi_j} \left\{ \left(1 + e^{2(z+\bar{z}_0)\varphi_j} \right) \varpi_j - \left(e^{2(z+\bar{z}_0)\varphi_j} - 1 \right) \xi_j \theta(z+\bar{z}_0) \right\} \quad (3.80)$$

- Se $\sigma \neq 0$ e $k' = 0$:

$$\tilde{\tilde{Z}}_{H,j}(z;t) = -\frac{\tilde{\tilde{G}}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0)Q(t)}{\sqrt{k_z}\lambda_j} \left\{ \chi_j(z;t) - \theta(z+\bar{z}_0) \sinh[(z+\bar{z}_0)\varphi_j] \right\} \quad (3.81)$$

em que:

$$\begin{aligned} \chi_j(z;t) &= \frac{\cosh[(z+1)\varphi_j] \left(\sqrt{k_z}\lambda_j \cosh(\bar{z}_0\varphi_j) + \sigma Q'(t) \sinh(\bar{z}_0\varphi_j) \right)}{\sigma \cosh(\varphi_j) Q'(t) + \sqrt{k_z}\lambda_j \sinh(\varphi_j)} \\ \varpi_j &= \lambda_j - k' \sqrt{k_z} + e^{2\bar{z}_0\varphi_j} (k' \sqrt{k_z} + \lambda_j) \\ \xi_j &= k' \sqrt{k_z} + e^{2\varphi_j} (k' \sqrt{k_z} + \lambda_j) - \lambda_j \end{aligned}$$

A função $\theta(z+\bar{z}_0)$ é denominada função de Heaviside Theta ou passo Heaviside, definida como abaixo.

$$\theta(z+\bar{z}_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } z+\bar{z}_0 < 0 \\ 1, & \text{se } z+\bar{z}_0 > 0 \end{cases}$$

Note que a função Heaviside Theta não é definida em $z+\bar{z}_0=0$, por este motivo, a solução apresentada converge para valores de $z \rightarrow -\bar{z}_0$.

Segundo HUANG *et al.* (2015), as laterais do RCW são representadas por um somidouro de linhas compostas por uma série de coletores de pontos adjacentes. As posições dos sumidouros são expressas em função dos ângulos θ_k entre os coletores na posição $(x_0 + \xi \cos \theta_k, y_0 + \xi \sin \theta_k, z_0)$ em que $(x_0, y_0, z_0) = (1, y_0^*/x_0^*, z_0^*/H)$ é o centro do RCW, ξ é uma variável que defini as diferentes direções dos coletores e $k=1,2,3,\dots,N$, sendo N o número de coletores. A pressão filtro $h_f(x,y,z;t)$ pode assim ser obtida fazendo $\bar{x}_0 = 1 + \xi \cos \theta_k$, $\bar{y}_0 = y_0 + \xi \sin \theta_k$ e $\bar{z}_0 = z_0$ nas Eqs. (3.80)-(3.81) e integrando a equação sobre a variável ξ , no intervalo $[0, L_k]$. Segundo HUANG *te al.* (2012a), a solução para descrever as distribuições das pressões induzidas por um poço de coletor radial com vários laterais é obtida integrando a solução ponto-coletor, as Eqs. (3.71) e (3.80)-(3.81), ao longo de todas as laterais e dividindo pela soma dos comprimentos dos coletores. Essa integração baseia-se no pressuposto de que a intensidade de descarga, definida como $Q(t)/(L_1+L_2+L_3+\dots+L_N)$, é igual em todos as laterais. O resultado é, portanto, expresso como.

$$h_{f,Horizontal}(x,y,z;t) = \left(\sum_{k=1}^N L_k \right)^{-1} \int_0^{L_k} h_f(x,y,z;t) d\xi \quad (3.82)$$

em que $L_k = L_k^*/x_0^*$ é o comprimento adimensional da lateral do coletor.

Na verdade, o processo de integração de equação (3.82) consiste unicamente na integração das Eqs. (3.80)-(3.81), especificamente o termo $\tilde{G}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, definido na Eq.(3.76), substituindo $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ por $(1+\xi\cos\theta_k, y_0+\xi\sin\theta_k)$, ou seja,

$$G_{j,k} = \int_0^{L_k} \tilde{G}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0) d\xi \quad (3.83)$$

em que a integral acima é dada como segue

$$\int_0^{L_k} \tilde{G}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0) d\xi = \int_0^{L_k} X_j(1+\xi\cos\theta_k) Y_j(y_0+\xi\sin\theta_k) d\xi$$

cuja solução é:

$$\int_0^{L_k} \tilde{G}_j(\bar{x}_0, \bar{y}_0) d\xi = \begin{cases} G_{j,k,1}, & \text{se } \beta_j = 0 \text{ e } \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2} \\ G_{j,k,2}, & \text{se } \beta_j \neq 0 \text{ e } \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2} \\ G_{j,k,3}, & \text{se } \beta_j \neq 0 \text{ e } \theta_k \neq \frac{(2k-1)\pi}{2} \end{cases} \quad (3.84)$$

em que:

$$G_{j,k,1} = X_j(1)L_k;$$

$$G_{j,k,2} = \frac{\sqrt{k_y} X_j(1) \left\{ \sin(y_0 \gamma_j) - \sin[\gamma_j y_0 - \gamma_j \cos(k\pi) L_k] \right\}}{\cos(\alpha_j) \beta_j} e$$

$$\begin{aligned} G_{j,k,3} = & 2\cos(\alpha_j) \left\{ \left(k_1 k_y \alpha_j \cos(y_0 \gamma_j) \cos(\theta_k) + \sqrt{k_y} \alpha_j \beta_j \sin(y_0 \gamma_j) \sin(\theta_k) \right) - \right. \\ & \sqrt{k_y} \left[2\sqrt{k_y} \alpha_j^2 \cos(\theta_k) \left(\cos(y_0 \gamma_j) \sin(\alpha_j) - \cos[(y_0 + \sin(\theta_k) L_k) \gamma_j] \sin(\Omega_{j,k}) \right) + \right. \\ & 2\beta_j \left(\alpha_j \cos(\Omega_{j,k}) \sin[(y_0 + \sin(\theta_k) L_k) \gamma_j] \right) \sin(\theta_k) - k_1 \sin(\alpha_j) \sin(y_0 \gamma_j) + \\ & k_1 \cos[\alpha_j + y_0 \gamma_j + (\alpha_j \cos(\theta_k) + \gamma_j \sin(\theta_k)) L_k] \left(\sqrt{k_y} \alpha_j \cos(\theta_k) - \beta_j \sin(\theta_k) \right) + \\ & \left. \left. k_1 \cos[\alpha_j - y_0 \gamma_j + (\alpha_j \cos(\theta_k) - \gamma_j \sin(\theta_k)) L_k] \left(\sqrt{k_y} \alpha_j \cos(\theta_k) + \beta_j \sin(\theta_k) \right) \right] \right\} / \\ & (2k_y \alpha_j^2 \cos(\theta_k)^2 - 2\beta_j^2 \sin(\theta_k)^2) \end{aligned}$$

sendo

$$\gamma_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{k_y}} \text{ e } \Omega_{j,k} = \alpha_j (1 + \cos(\theta_k) L_k)$$

portanto, fazendo uso da fórmula de inversão, Eq. (3.71), no caso dos poços coletores o cálculo da pressão filtro pode ser obtido através da equação a seguir.

$$h_{f,Horizontal}(x,y,z;t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j(x)Y_j(y)}{N_j} \tilde{Z}_{H,av,j}(z;t) \quad (3.85)$$

em que

$$\tilde{Z}_{H,av,j}(z;t) = \left(\sum_{k=1}^N L_k \right)^{-1} \int_0^{L_k} \tilde{Z}_{H,j}(z;t) d\xi,$$

e as Eqs. (3.80) e (3.81) são então reescritas conforme a seguir:

- Se $\sigma=0$ e $k' \neq 0$:

$$\tilde{Z}_{H,av,j}(z;t) = - \frac{G_{j,k} Q(t) e^{-(z+\bar{z}_0)\varphi_j}}{\sum_{k=1}^N L_k 2\sqrt{k_z} \lambda_j \xi_j} \left\{ \left(1 + e^{2(z+\bar{z}_0)\varphi_j} \right) \varpi_j - \left(e^{2(z+\bar{z}_0)\varphi_j} - 1 \right) \xi_j \theta(z+\bar{z}_0) \right\} \quad (3.86)$$

- Se $\sigma \neq 0$ e $k' = 0$:

$$\tilde{Z}_{H,j}(z;t) = - \frac{G_{j,k} Q(t)}{\sum_{k=1}^N L_k \sqrt{k_z} \lambda_j} \left\{ \chi_j(z;t) - \theta(z+\bar{z}_0) \sinh[(z+\bar{z}_0)\varphi_j] \right\} \quad (3.87)$$

em qualquer uma das duas equações se pode obter a solução do caso confinado, fazendo $k' = 0$ em (3.86) ou $\sigma = 0$ em (3.87). O mesmo é válido para as Equações (3.77) e (3.78).

3.3.2 - Solução do Problema Homogêneo

A solução do problema homogêneo 3-D obedece à mesma metodologia aplicada na solução do problema filtro. Como tal, será determinado um problema de autovalor tridimensional do tipo Sturm-Liouville conforme a seguir:

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} + \mu_i^2 \Psi_i(x,y,z) = 0 \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(0,y,z)}{\partial x} - k_1 \Psi_i(0,y,z) = 0 \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(w_x,y,z)}{\partial x} + k_2 \Psi_i(w_x,y,z) = 0 \quad (3.90)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(x,0,z)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \Psi_i(x,w_y,z)}{\partial y} = 0 \quad (3.91a,b)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(x,y,0)}{\partial z} + (k' - \frac{\sigma}{k_z} \delta_r^2) \Psi_i(x,y,0) = 0 \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial \Psi_i(x,y,-1)}{\partial z} = 0 \quad (3.93)$$

sendo $\Psi_i(x,y,z) = X_m(x)Y_p(y)Z_r(z)$ o produto das autofunções nas direções x, y e z em que $m, p, r \rightarrow i$ e $\mu_i^2 = \alpha_m^2 + \beta_p^2 + \delta_r^2$ é a soma dos quadrados dos respectivos autovalores a cada autofunção. Utilizando a técnica de separação de variáveis, substituindo $X_m(x)Y_p(y)Z_r(z)$ nas Eqs. (3.88)-(3.93), obtém-se três problemas auxiliares de autovalor do tipo Sturm-Liouville, com solução dada na Tabela 3.1.

De acordo com MIKHAILOV e ÖZISIK (1985) um núcleo de transformação e sua fórmula de inversão apropriados a este tipo de problema que atenda as condições de ortogonalidade das autofunções na direção z pode ser dada como:

$$\bar{h}_i(t) = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i h_H dz dy dx + \sigma \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \Psi_i \big|_{z=0} h_H \big|_{z=0} dy dx \quad \text{Transformada} \quad (3.94)$$

$$h_H(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Psi_i(x,y,z)}{N_i} \bar{h}_i(t) \quad \text{Inversa} \quad (3.95)$$

em que:

$$N_i = N_m N_p N_r$$

Transformando a Eq. (3.59) com o operador integral $\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x,y,z) \text{_____} dz dy dx$

$$\begin{aligned} \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i \frac{\partial h_H}{\partial t} dz dy dx &= \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i \frac{\partial^2 h_H}{\partial x^2} dz dy dx + k_y \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i \frac{\partial^2 h_H}{\partial y^2} dz dy dx + \\ &k_z \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i \frac{\partial^2 h_H}{\partial z^2} dz dy dx - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i \frac{\partial h_f}{\partial t} dz dy dx \end{aligned}$$

obtendo

$$\frac{d\bar{h}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{h}_i(t) = \sigma(\alpha_i^2 + \beta_i^2) \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \Psi_i(x,y,0) h_H(x,y,0,t) dy dx + \bar{g}_i(t) \quad (3.96)$$

em que

$$\bar{g}_i(t) = - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x,y,z) \frac{\partial h_f(x,y,z;t)}{\partial t} dz dy dx$$

desenvolvido com mais detalhes no Apêndice B.

Como a pressão homogênea em $z=0$, $h_H(x,y,0,t)$, na Equação (3.96) não pode ser transformado, esta será substituída pela sua fórmula de inversão, Eq. (3.96), substituindo o índice i pelo índice $\hat{i}$.

$$h_H(x,y,0,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Psi_i(x,y,0)}{N_i} \bar{h}_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(x)Y_i(y)Z_i(0)}{N_{\hat{i}}} \bar{h}_{\hat{i}}(t)$$

que substituído na integral dupla obtém-se o seguinte sistema transformado infinito acoplado de EDOs, conforme adiante

$$\frac{d\bar{h}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{h}_i(t) = \bar{A}_i(t) + \bar{g}_i(t) \quad (3.97)$$

em que

$$\bar{A}_i(t) = \sigma(\alpha_i^2 + \beta_i^2) \sum_{\hat{i}=1}^{\infty} A_{i,\hat{i}} \bar{h}_{\hat{i}}(t)$$

sendo

$$A_{i,\hat{i}} = \delta_{n(i)n(\hat{i})} \delta_{p(i)p(\hat{i})} Z_{\hat{i}}(0) \frac{Z_{\hat{i}}(0)}{N_{r(\hat{i})}}$$

e $\delta_{i,\hat{i}}$ são funções Deltas de Kronecker dadas como segue:

$$\delta_{n(i)n(\hat{i})} = \frac{1}{N_{n(i)}} \int_0^{w_x} X_i(x) X_{\hat{i}}(x) dx = \begin{cases} 0 & , i \neq \hat{i} \\ 1 & , i = \hat{i} \end{cases}$$

$$\delta_{p(i)p(\hat{i})} = \frac{1}{N_{p(i)}} \int_0^{w_y} Y_i(y) Y_{\hat{i}}(y) dy = \begin{cases} 0 & , i \neq \hat{i} \\ 1 & , i = \hat{i} \end{cases}$$

A solução da Eq. (3.97) depende da sua condição inicial, que é obtida através da transformação integral da condição inicial original, Eq. (3.60), desenvolvido com mais detalhes no Apêndice A.

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x,y,z) h_H(x,y,z,0) dz dy dx = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x,y,z) h_0(x,y,z) dz dy dx -$$

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x,y,z) h_f(x,y,z,0) dz dy dx$$

Com isso, fica então definido o sistema infinito de EDOs sujeito a suas condições iniciais.

$$\frac{d\bar{h}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{h}_i(t) = \bar{A}_i(t) + \bar{g}_i(t) \quad (3.98)$$

$$\bar{h}_i(0) = f_i \quad (3.99)$$

em que

$$f_i = F_i - \int_{-1}^0 Z_i(z) \tilde{\tilde{Z}}_i(z;0) dz - \sigma Z_i(0) \tilde{\tilde{Z}}_i(0;0) \quad (3.100)$$

e

$$F_i = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x,y,z) h_0(x,y,z) dz dy dx + \sigma \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \Psi_i(x,y,0) h_0(x,y,0) dy dx$$

A função $\tilde{\tilde{Z}}_i(z;t)$ existente na Eq. (3.100) será obtida da solução do problema filtro, Eq. (3.72)-(3.74), descrita na Seção 3.3.1 para os índices ordenados tridimensionalmente. A fim de simplificar a escrita adotamos:

$$\alpha_i = \alpha_{m(i)}, \beta_i = \beta_{p(i)}, \delta_i = \delta_{r(i)}, X_i = X_m(\alpha_i, x), Y_i = Y_p(\beta_i, y), Z_i = Z_r(\delta_i, z) \text{ e } \tilde{\tilde{Z}}_i = \tilde{\tilde{Z}}_{m(i)p(i)}$$

As Eqs. (3.98) e (3.99) consiste num sistema infinito de equações diferenciais ordinárias lineares, acoplado para os potenciais transformados $\bar{h}_i(t)$. Na solução deste sistema infinito de EDOs, o somatório é truncado para uma dada ordem NT suficientemente alta, a fim de garantir a acurácia satisfatória na análise dos casos. Na literatura existem vários métodos de solução para problemas rígidos de valor inicial conforme descritos pelo sistema de EDOs acima. Em particular, o integrador numérico DIVPAG da Biblioteca IMSL (IMSL/Library, 1994), desenvolvido a partir do método de Gear e/ou Adans-Mouton, tem demonstrado ser uma ferramenta computacional poderosa para a obtenção de resultados numéricos de sistemas *stiff* com esta estrutura ou utilizando a rotina NDSolve do Wolfram Mathematica (WOLFRAM, 1991). A técnica aqui empregada possui critérios para análise de convergência das séries envolvidas muito simples e fáceis de serem controlados, pois dependem apenas do número de termos atribuídos aos autovalores a serem considerados em cada direção. Após o cálculo dos potenciais transformados utiliza-se a fórmula de inversão, Eq. (3.95), para a reconstrução do potencial original, que é a base de cálculo dos diversos parâmetros físicos de interesse do problema.

É importante observar que nos casos em que $\sigma=0 \rightarrow \bar{A}_i(t)=0$ e a solução do sistema de EDOs poderá ser obtida analiticamente, conforme a seguir.

$$\bar{h}_i(t) = f_i \exp(-\mu_i^2 t) + \int_0^t \bar{g}_i(t') \exp[\mu_i^2 (t'-t)] dt' \quad (3.101)$$

Obviamente, se $Q(t)$ é constante $\bar{g}_i(t)=0$, portanto, neste caso a integral da Eq. (3.101) acima é nula e a solução analítica exata do problema homogêneo quando $\sigma=0$ e $Q(t)$ é constante será do tipo,

$$\bar{h}_i(t) = f_i \exp(-\mu_i^2 t) \quad (3.102)$$

Substituindo a Eq. (3.101) na fórmula de inversão, Eq. (3.95), obtém-se a solução do problema homogêneo quando $\sigma=0$ e $Q(t)$ variável, como segue:

$$h_H(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(x)Y_i(y)Z_i(z)}{N_i} (f_i \exp(-\mu_i^2 t) + \int_0^t \bar{g}_i(t') \exp[\mu_i^2 (t'-t)] dt') \quad (3.103)$$

Soluções deste tipo são obtidas por Transformada Integral Clássica (ÖZISIK, 1993). A Eq. (3.103) recupera analiticamente as soluções dos casos em que $\sigma=0$, contudo se $\sigma \neq 0$ a solução desse problema requer maior custo computacional para a solução numérica do sistema transformado. Isso configura a característica híbrida da solução por GITT (COTTA, 1993). Para este trabalho foi desenvolvido um código no software Wolfram Mathematica para a solução do sistema linear acoplado de EDOs quando este não possuir solução analítica. Logo, das Equações (3.71) e (3.95) em (3.52) podemos reescrever a equação geral da distribuição da pressão num aquífero como a seguir:

$$h(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(x)Y_i(y)Z_i(z)}{N_i} \bar{h}_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j(x)Y_j(y)}{N_j} \tilde{\tilde{Z}}_j(z;t) \quad (3.104)$$

Na Eq. (3.104), a função $\tilde{\tilde{Z}}_j(z;t)$ é obtida das Eqs. (3.77)-(3.78) para os poços verticais ou das Eqs. (3.86)-(3.87) para poços coletores RCWs. O potencial transformado $\bar{h}_i$ contido na equação é obtido da solução das Eqs. (3.98)-(3.99) se $\sigma \neq 0$, que por sua vez depende das Eqs. (3.86)-(3.87) ou (3.77)-(3.78) na determinação da condição inicial transformada f_i dependente de $\tilde{\tilde{Z}}_j(z;t) \rightarrow \tilde{\tilde{Z}}_i(z;t)$, ou seja, no cálculo de f_i , $\tilde{\tilde{Z}}_j(z;t)$ é calculado nos autovalores α_i e β_i obtidos por reordenamento tridimensional.

3.3.3 - Cálculo das Taxas de Bombeamento

As taxas envolvidas no bombeamento de um lençol freático podem ser obtidas integrando no volume a Eq. (3.13), conforme a seguir:

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial t} dz dy dx = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dz dy dx + k_y \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dz dy dx + k_z \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dz dy dx -$$

$$Q(t) \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \delta(\eta_0) dz dy dx$$

em que

$$\delta(\eta_0) = \begin{cases} \delta(x-\bar{x}_0)\delta(y-\bar{y}_0) & , \text{se poço vertical} \\ \delta(x-\bar{x}_0)\delta(y-\bar{y}_0)\delta(z-\bar{z}_0) & , \text{se poço horizontal} \end{cases}$$

as integrais do lado direito acima são

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial t} dz dy dx = \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=w_x} dz dy + k_y \int_0^{w_x} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{y=0}^{y=w_y} dz dx + k_z \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=-1}^{z=0} dy dx - Q(t)$$

que satisfazendo as condições de contornos estabelecidas pelas Eqs. (3.15)-(3.19) fica reduzida a

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial t} dz dy dx = \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=w_x} dz dy - \int_0^{w_x} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} dz dy + k_z \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0} dy dx - Q(t)$$

ou

$$- \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} dz dy + \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=w_x} dz dy + k_z \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0} dy dx - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial t} dz dy dx = Q(t) \quad (3.105)$$

SDR é o fluxo no leito dos rios adjacentes aos aquíferos e podem ser calculados através das duas primeiras parcelas da soma acima. SDR₁ e SDR₂ são os fluxos nos dois leitos do rio 1 e rio 2, respectivamente, separados a uma distância adimensional w_x . Portanto, as taxas de depleção dos rios 1 e 2 podem ser dados pelas integrais.

$$SDR_1(t) = - \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h(x,y,z,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} dz dy \quad (3.106)$$

$$SDR_2(t) = \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h(x,y,z,t)}{\partial x} \Big|_{x=w_x} dz dy \quad (3.107)$$

A taxa de liberação de armazenamento SRR de um aquífero variando no tempo é definida pela integral tripla.

$$SRR(t) = - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h(x,y,z,t)}{\partial t} dz dy dx \quad (3.108)$$

No caso de aquíferos gotejantes a taxa de gotejamento através de uma camada permeável, de comprimento B e condutividade K' é provocada pelo bombeamento e diminuição do nível do lençol freático adjacente e pode ser definida conforme a seguir:

$$LR(t) = k_z \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{\partial h(x,y,z,t)}{\partial z} \Big|_{z=0} dy dx \quad (3.109)$$

com isso conclui-se que para aquíferos gotejantes

$$SDR_1(t) + SDR_2(t) + LR(t) + SRR(t) = Q(t) \quad (3.110)$$

em aquíferos livres $k'=0$, portanto, da Eq. (3.22) obtém-se

$$k_z \frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\sigma \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad (3.111)$$

Substituindo a igualdade (3.111) na integral (33) obtém-se

$$-\int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} dz dy + \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=w_x} dz dy - \sigma \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{z=0} dy dx - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{\partial h}{\partial t} dz dy dx = Q(t) \quad (3.112)$$

O fato de o aquífero não ser confinado, provoca neste uma taxa de drenagem por gravidade GDR, da superfície para o interior do aquífero, induzida pela diminuição do lençol freático por conta do bombeamento, definida pela integral dupla:

$$GDR(t) = -\sigma \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{\partial h(x,y,z,t)}{\partial t} \Big|_{z=0} dy dx \quad (3.113)$$

com isso, conclui-se que para aquíferos livres

$$SDR_1(t) + SDR_2(t) + GDR(t) + SRR(t) = Q(t) \quad (3.114)$$

Não havendo fluxo para dentro do aquífero do rio 2, ou seja, quando $k_2=0$, naturalmente $SDR_2=0$ para todos os casos e

$$SDR_1(t) + LR(t) + SRR(t) = Q(t) \text{ ou } SDR_1(t) + GDR(t) + SRR(t) = Q(t) \quad (3.115)$$

De acordo com HUANG *et al.* (2014), se a taxa de bombeamento é constante a soma das parcelas que contribuem para o bombeamento do poço é igual a um. Contudo, conforme conclui as Eqs. (3.110) e (3.114), para taxas de bombeamento variáveis a soma das parcelas que contribuem para o bombeamento é igual a própria vazão de bombeamento. Em aquíferos gotejantes este bombeamento recebe a contribuição da taxa de gotejamento do aquífero adjacente, LR, Eq. (3.109), enquanto em aquíferos não confinados esta contribuição é dada pela taxa de drenagem por gravidade GDR, Eq. (3.113).

Substituindo a pressão $h(x, y, z, t)$ em (3.106), (3.107), (3.108), (3.109) e (3.113) pela Eq. (3.104) obtém-se:

$$SDR_1(t) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i D_i}{N_i} \frac{dX_i(0)}{dx} \bar{h}_i(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j \tilde{D}_j(t)}{N_j} \frac{dX_j(0)}{dx} \quad (3.116)$$

$$SDR_2(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i D_i}{N_i} \frac{dX_i(w_x)}{dx} \bar{h}_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C_j \tilde{D}_j(t)}{N_j} \frac{dX_j(w_x)}{dx} \quad (3.117)$$

$$SRR(t) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i C_i D_i}{N_i} \frac{d\bar{h}_i(t)}{dt} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j C_j}{N_j} \frac{d\tilde{D}_j(t)}{dt} \quad (3.118)$$

$$LR(t) = k_z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i C_i}{N_i} \frac{dZ_i(0)}{dz} \bar{h}_i(t) + k_z \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j C_j}{N_j} \frac{d\tilde{Z}_j(0;t)}{dz} \quad (3.119)$$

$$GDR(t) = -\sigma \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i C_i Z_i(0)}{N_i} \frac{d\bar{h}_i(t)}{dt} - \sigma \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j C_j}{N_j} \frac{d\tilde{Z}_j(0;t)}{dt} \quad (3.120)$$

em que:

$$\begin{aligned} B_i &= \int_0^{w_x} X_i(x) dx; & \therefore & B_j = \int_0^{w_x} X_j(x) dx; \\ C_i &= \int_0^{w_y} Y_i(y) dy; & \therefore & C_j = \int_0^{w_y} Y_j(y) dy \text{ e} \\ D_i &= \int_{-1}^0 Z_i(z) dz; & \therefore & \tilde{D}_j(t) = \int_{-1}^0 \tilde{Z}_j(z;t) dz \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção serão apresentados os principais resultados obtidos neste trabalho e discutidas algumas de suas particularidades. Conforme descrito em detalhes na Seção 3.2, a solução geral para o problema da distribuição da pressão hidráulica no rebaixamento de aquíferos homogêneos e anisotrópicos, drenado por um poço com vazão de bombeamento variável é apresentada pela Eq. (3.104). Soluções distintas para os problemas vertical e horizontal são descritas separadamente na Seção 3.3.1 e apresentadas suas respectivas soluções do problema transformado, Eqs. (3.72)-(3.74), dependendo do tipo de poço e do tipo de aquífero. Aplicando a metodologia proposta, são apresentadas as soluções para os problemas do poço vertical, Eqs. (3.77)-(3.78), e horizontal, Eqs. (3.86)-(3.87).

Tabela 4.1-Parâmetros de entrada dimensionais e adimensionais-Poço vertical e horizontal.

Parâmetros dimensionais			
Notação	Vertical	Horizontal	
K _x , K _y , K _z	1, 1, 0.1	1, 1, 0.0025	
S _y , S _s	0.1, 10 ⁻⁵	0.2, 10 ⁻⁵	
W _x , W _y , H	500, 500, 20	800, 800, 20	
T, S	20, 2x10 ⁻⁴	20, 2x10 ⁻⁴	
K', B	0.01, 1	0.0, 1	
K ₁ , B ₁	1, 1	0.05, 1	
K ₂ , B ₂	0, 1	0.05, 1	
$\bar{x}_0^*$, $\bar{y}_0^*$, $\bar{z}_0^*$	50, 250, -	-	
x_0^* , y_0^* , z_0^* ,	-	400, 400, 10	
L _k [*]	-	200	
Q ₀	100	100	
Parâmetros adimensionais			
Notação	Vertical	Horizontal	Adimensionalização
σ	500	100	S _y /S _s H ou Sy/S
k _y , k _z	1, 0.625	1, 1	K _y /K _x , K _z x ₀ ^{*2} /K _x H ²
k'	5	5	K' H/B K _z
k ₁ , k ₂	50, 0	20, 20	K ₁ x ₀ [*] /B ₁ K _x , K ₂ x ₀ [*] /B ₂ K _x
w _x , w _y	10,10	2, 2	W _x /x ₀ [*] , W _y /x ₀ [*] ,
$\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$	1, 5	-	$\bar{x}_0^*/x_0^*$, $\bar{y}_0^*/x_0^*$
x ₀ , y ₀	-	1, 1	x ₀ [*] /x ₀ [*] , y ₀ [*] /x ₀ [*]
L _k	-	0.5	L _k [*] /x ₀ [*]

Para ambos os modelos, a solução do problema homogêneo, Eq. (3.59)-(3.65) é dada pela Eq. (3.104) e da solução do sistema transformado de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99). A fim de verificar a solução para os casos do poço vertical ou horizontal comprados à literatura, foram utilizados os parâmetros de entrada conforme proposto por HUANG *et al.* (2014 e 2016), descrito na Tab. 4.1, com vazão de bombeamento constante $Q^*(t^*)=Q_0$ e condição inicial igual a zero, $h_0(x, y, z)=0$. Em seguida serão propostos dois modelos para a equação da vazão variável no tempo e uma condição inicial variando no espaço, onde discutiremos seus resultados e posteriormente procederemos com uma análise de convergência.

4.1 RESULTADOS- POÇO VERTICAL

Nesta seção calcularemos SDR_1 , GDR ou LR e SRR num aquífero não confinado, confinado ou gotejante de largura $W_x=W_y=500$ m e profundidade $H=20$ m, entre dois córregos, que este está sendo drenado por um poço vertical, com vazão de bombeamento constante $Q^*(t^*) = Q_0=100$ m³/dia. De acordo com a Tabela 4.1 os parâmetros hidráulicos do aquífero homogêneo e anisotrópico são: $K_x=K_y=1$ e $K_z=0.1$ m/dia, $S_y=0.1$ e $S_s=10^{-5}$ m⁻¹. A condutividade hidráulica do aquífero é $K'=0.01$ e sua largura é $B=1$ m. As larguras dos leitos dos rios 1 e 2 são $B_1=1$ e $B_2=1$ m e suas condutividades hidráulicas são $K_1=K_2=0.1$ m/dia, respectivamente. O poço está localizado no ponto $(x_0^*, y_0^*)=(50, 250)$, ou seja, em $x_0^*=50$ m e $y_0^*=250$ m.

A Figura 4.1 descreve SDR_1 , em aquíferos confinados, $k'=0$ e $\sigma=0$, gotejantes, $k' \neq 0$, e não confinados, $\sigma \neq 0$, respectivamente, obtidos através da Eq. (3.116) e da Eq. (3.77) se $\sigma=0$, (3.78) se $k'=0$ e no caso confinado utilizou-se a Eq. (3.77) com $k'=0$. Note que, para os casos confinado e gotejante, o potencial transformado $\bar{h}_1$, contido nessa equação, é obtido da Eq. (3.102) por CITT. Enquanto para o aquífero não confinado este mesmo potencial é obtido por GITT da solução do sistema de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99).

Como se pode observar, os resultados obtidos neste trabalho mostram boa concordância entre as soluções apresentadas, comparadas às soluções encontradas na literatura, destacando o fato de que a solução é obtida analiticamente para os casos confinado e gotejante, ou seja, se $\sigma=0$. Por outro lado, o cálculo das taxas requeridas no caso do aquífero livre depende da solução do sistema transformado de EDOs variando

no tempo. A solução do sistema de EDOs foi então obtida de maneira aproximada, através do código desenvolvido neste trabalho utilizando a rotina NDSolve do software de computação simbólica Wolfram Mathematica.

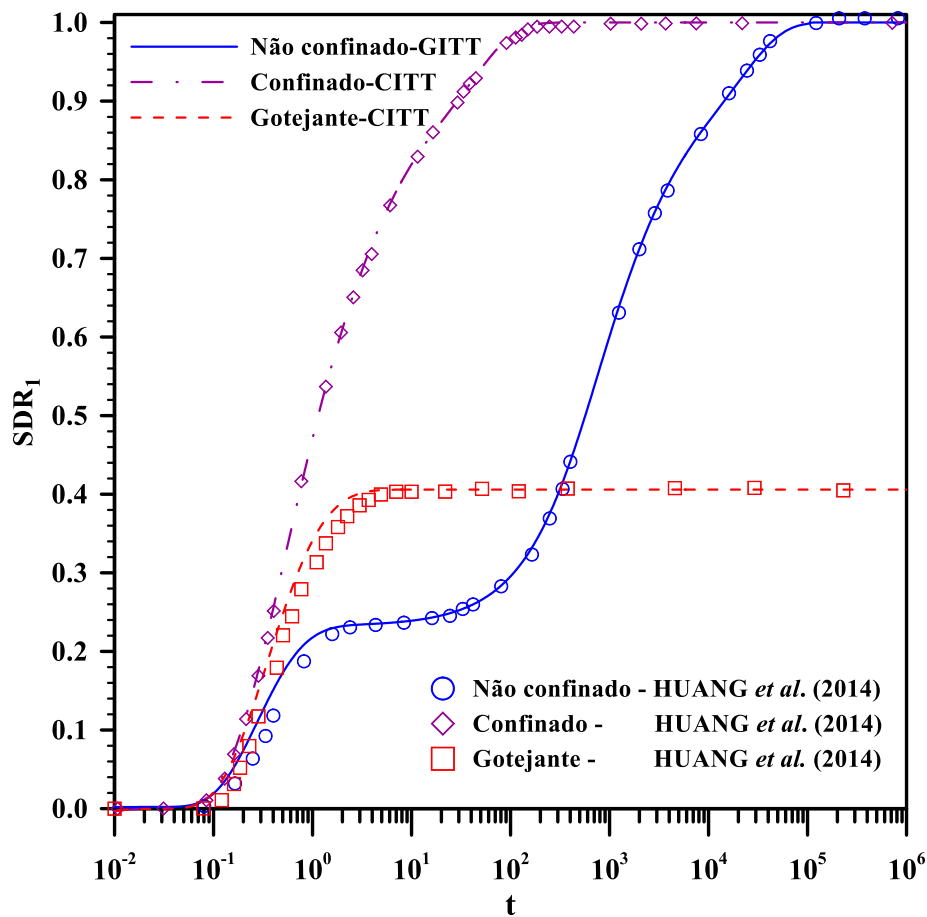


Figura 4.1 - SDR_1 de aquíferos confinados, gotejantes e não confinados, obtidos das Eqs. (3.116), (3.77)-(3.78) e da solução do sistema de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99) e da Eq. (3.102) nos casos confinado e gotejante.

A Figura 4.2 mostra as taxas SDR_1 , SRR e GDR fazendo $k'=0$ e $\sigma \neq 0$, ou seja, de aquíferos livres, Eq. (3.78), comparadas a solução de HUANG *et al.* (2014), obtida a taxa de depleção do rio1, SDR_1 , da Eq. (3.116), a taxa de liberação de armazenamento, SRR , da Eq. (3.118), a taxa de drenagem gravimétrica, GDR , da Eq. (3.120) e da solução do sistema de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99). Este resultado tem a finalidade de verificar a solução proposta em detrimento de outras abordagens anteriores e ainda de validá-la no caso mais complexo aqui estudado. Nesta Figura nota-se que existe certa concordância entre as soluções e que a solução proposta é capaz de reproduzir resultados satisfatórios acerca desse tipo de problema. Acredita-se que a diferença significativa no cálculo da SDR no início do bombeamento seja um problema paramétrico, pelo fato de

que se existe concordância entre as SRRs e GDRs, e portanto para que se atenda a Eq. (3.114), as SDRs precisariam concordar.

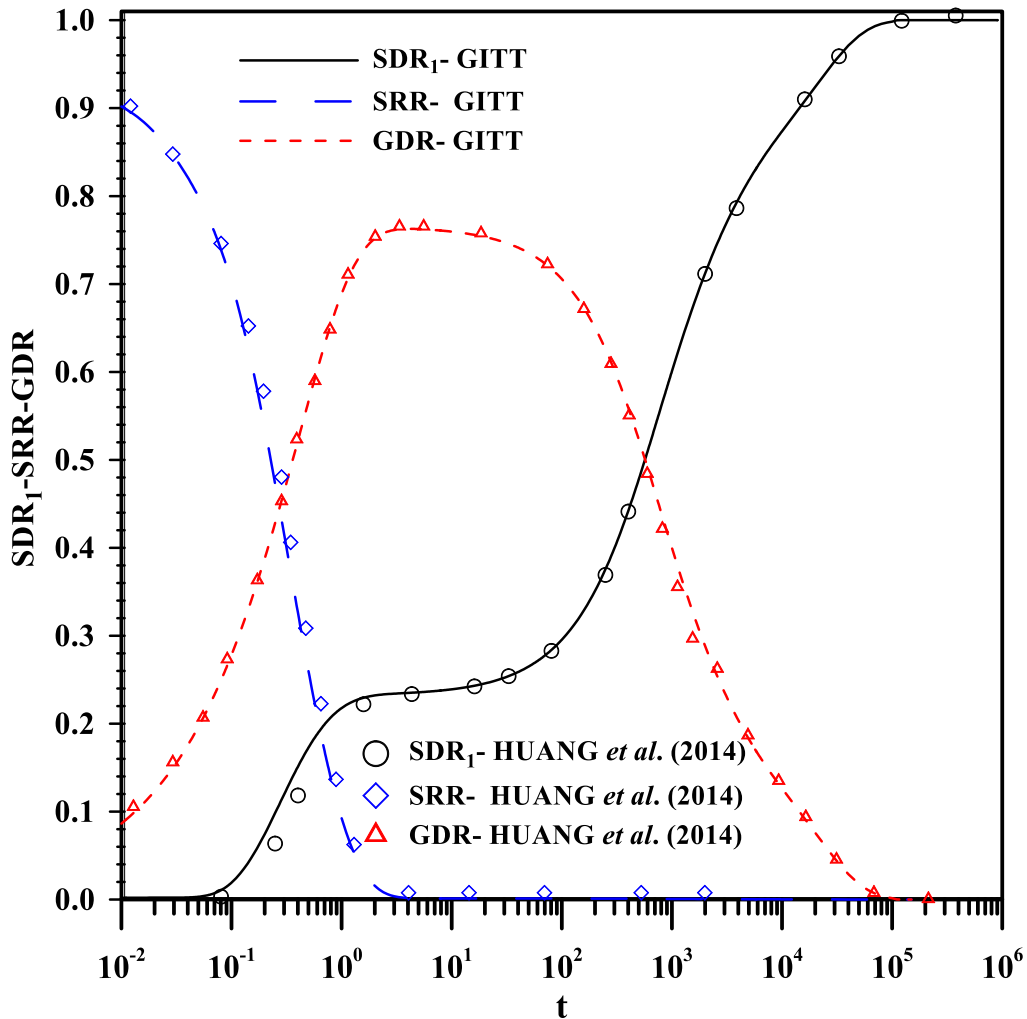


Figura 4.2 - SDR_1 , SRR e GDR de aquíferos não confinados, obtidos através das Eqs. (3.116), (3.118) e (3.120) e da solução do sistema de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99).

A Figura 4.3 mostra o efeito da variação das distâncias entre os rios 1 e 2, refletindo sobre as taxas SDR_1 e SDR_2 variando no tempo, fazendo o fluxo no rio 2 diferente de zero, ou seja, quando $k_2 \neq 0$, onde pode-se notar as SDRs afetadas em função da distância entre o poço e os rios. Esta figura foi obtida através das Eqs. (3.116) e (3.117), da solução do sistema transformado de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99) e da Eq. (3.78). Na Figura 4.3 nota-se que a SDR_1 é igual a SDR_2 quando o poço está posicionado, exatamente ao centro, entre os rios, ou seja, em $x_0 = w_x/2$ se $k_1 = k_2$. Nota-se também que SDR_2 tende a zero quando aumentamos a distância entre o poço e os rios, ou $w_x \rightarrow \infty$. Nesta mesma Figura nota-se que $SDR_2 \rightarrow 0$ quando $w_x > 100$ ou $W_x > 5000$ m,

ou seja, o aumento da distância entre os rios e o poço acima de 2500 m permite negligenciar o SDR_2 para dentro do aquífero em detrimento do esforço computacional para reproduzir valores tão próximos de zero. Ou ainda, para aquíferos muito extensos, em que a distância entre os rios e o poço seja maior que 5 km, é suficiente um modelo matemático com condição de contorno do segundo tipo ou de não fluxo, com pouco prejuízo para o cálculo das SDRs, fazendo $k_1 = k_2 = 0$.

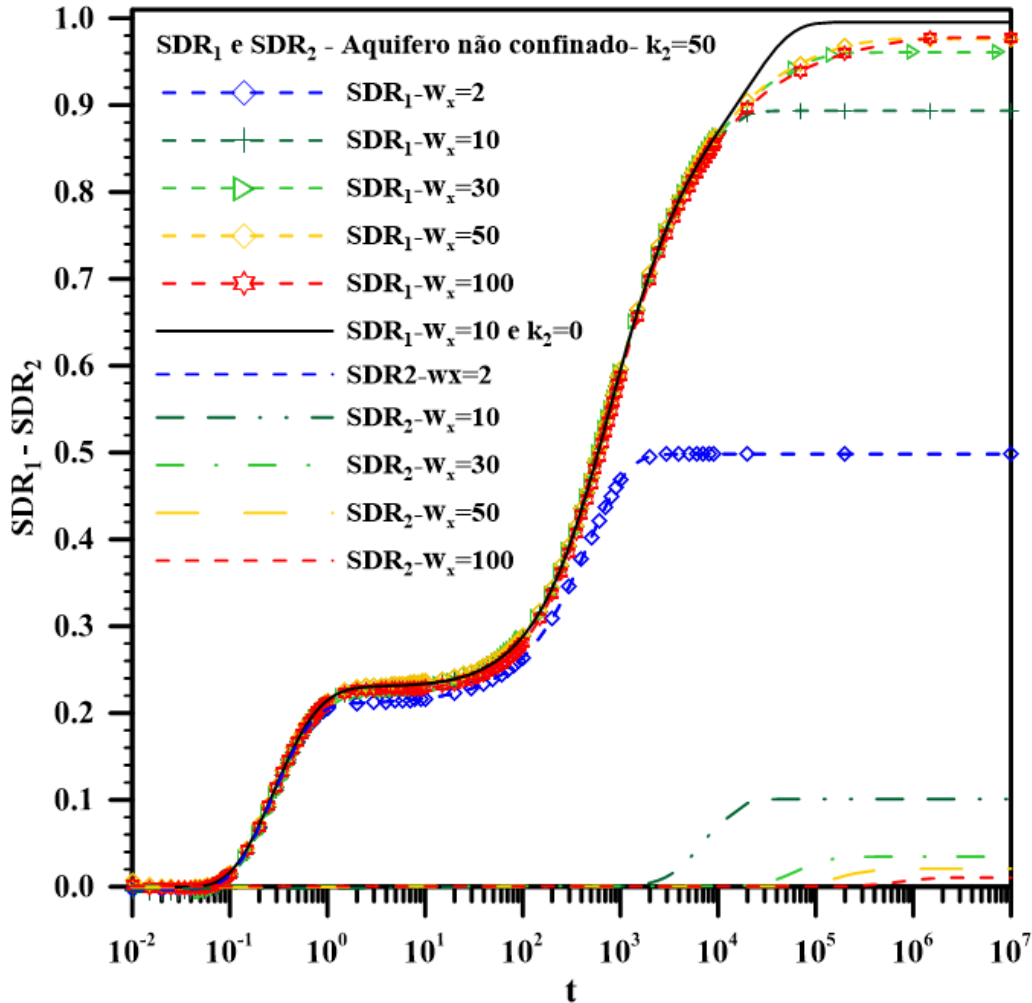


Figura 4.3 - Distribuição temporal de SDR_1 e SDR_2 de aquífero não confinado para $k_1 = k_2 = 50$, variando a distância entre os rios w_x .

Obtidos pelas Eqs. (3.104) e (3.78), a Figura 4.4 mostra a distribuição bidimensional da pressão hidráulica em dois diferentes tempos: Fig. 4.4(a), $t=10^3$ e Fig. 4.4(b); $t=10^5$, para $k_1 = k_2 = 50$. Nestas figuras observa-se o comportamento do cone de depressão na região próxima ao poço, variando no plano XY em $z=0$. Nela também

podemos verificar como o cone de rebaixamento toca o leito do rio e como a anisotropia do solo afeta o cone deformando-o.

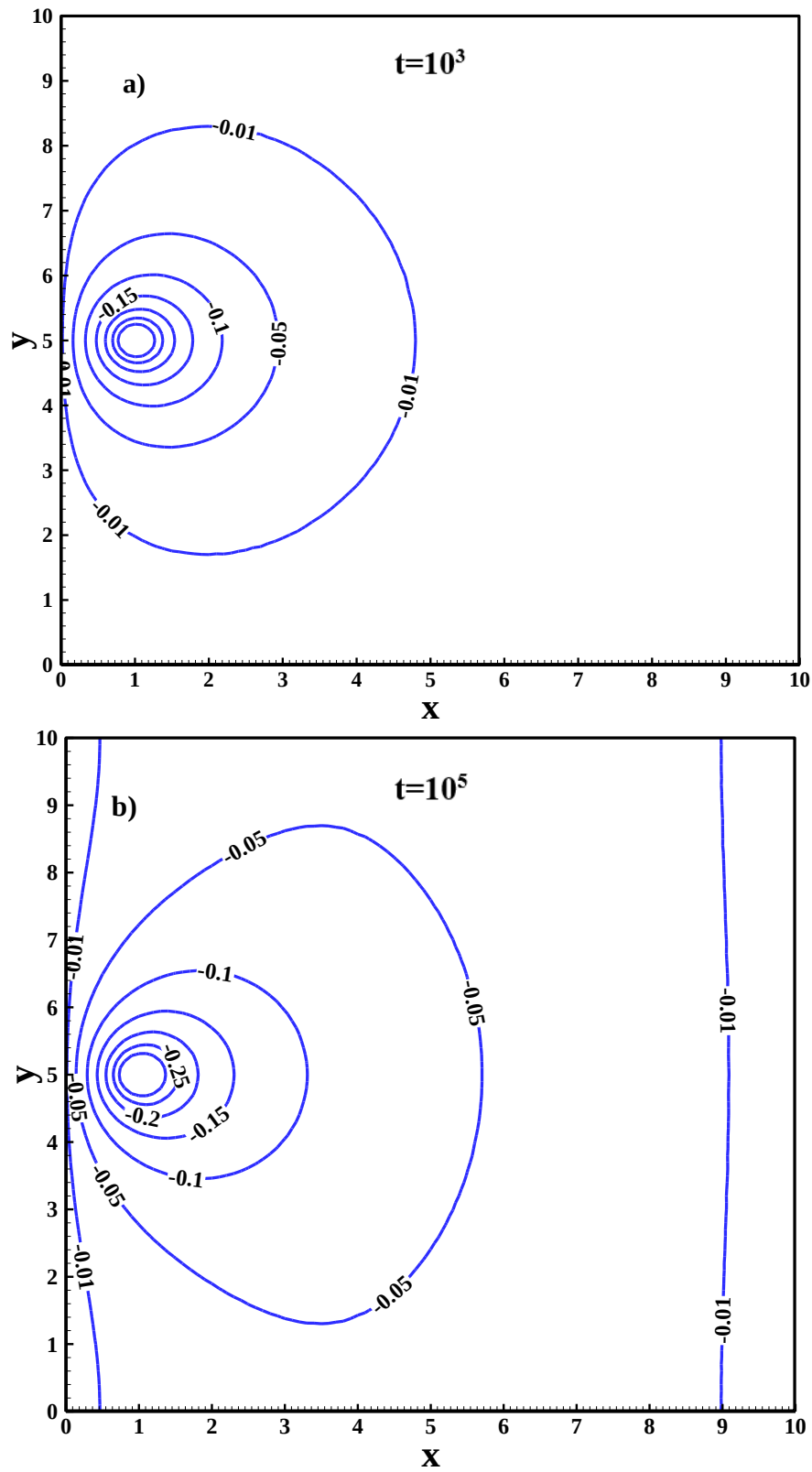


Figura 4.4 - Distribuição espaciais da pressão adimensional preditas pela presente solução em $z=0$ para $k_1 = k_2 = 50$, $w_x = 10$ em: a) $t=10^3$; b) $t=10^5$.

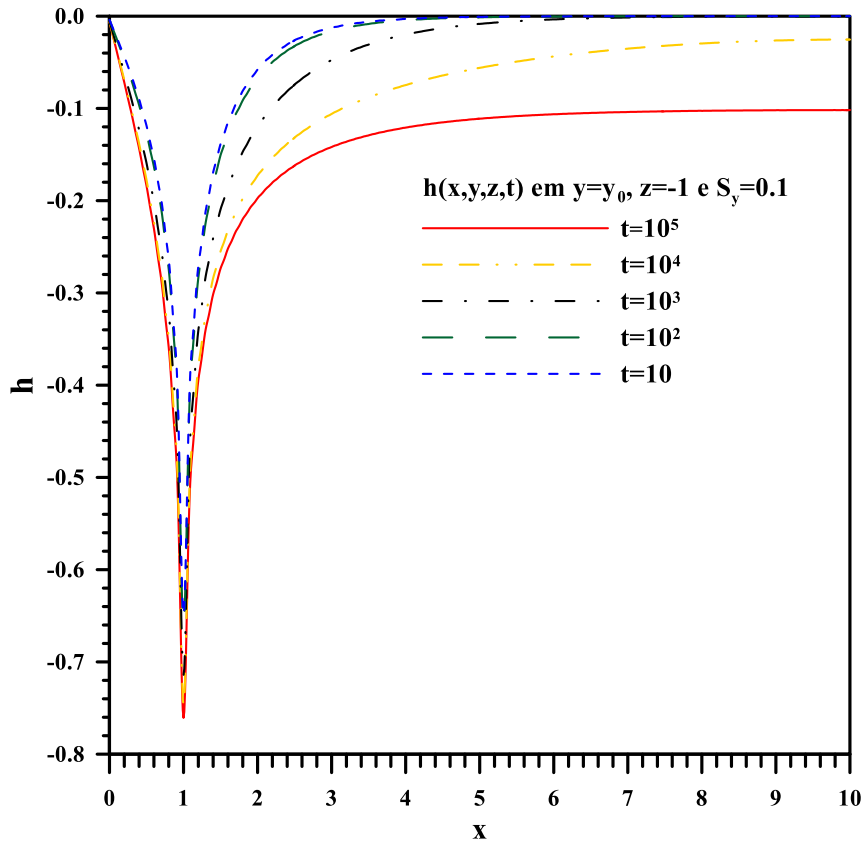


Figura 4.5 - Perfil da distribuição da pressão hidráulica em aquíferos livres para tempos distintos, variando na direção x , obtidos da Eq. (3.104).

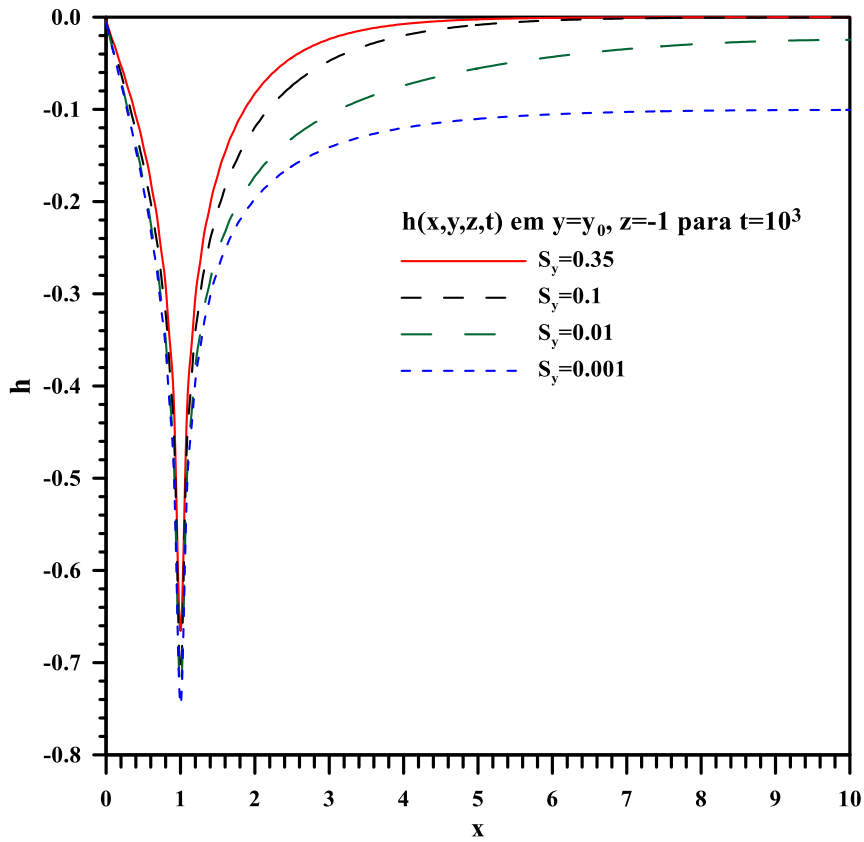


Figura 4.6-Perfil da distribuição da pressão hidráulica em aquíferos livres para produções específicas S_y distintas variando na direção x , obtidos da Eq. (3.104).

A Fig. 4.5 mostra o perfil da variação da pressão na direção x , em y_0 , variando t entre 10 e 10^5 para rendimento específico constante $S_y=0.1$, enquanto a Fig. 4.6 revela o perfil da pressão em y_0 num tempo fixo $t=10^3$, variando apenas o rendimento específico S_y no intervalo $[0.001, 0.35]$. Esta última mostra como a redução da produção específica afeta no cone de influência provocado pelo bombeamento em função da baixa capacidade de recuperação do aquífero. A diminuição do rendimento específico implica no confinamento do aquífero e ainda na diminuição de sua capacidade de recarga. Por este motivo, este parâmetro é importante no estudo da recuperação do lençol freático, conforme HEALY e COOK (2002), que estabeleceram inclusive uma relação em função do rendimento específico do solo para a determinação da capacidade de recarga do aquífero. JOHNSON (1967) estuda o rendimento específico de diversos tipos de solo, tabelando-os em percentual, do material mais argiloso até o cascalho mais granulado, caracterizando-os num intervalo $[0-0.35]$, onde fica caracterizado o rendimento específico do solo argiloso numa faixa $[0-0.05]$, com valor médio 0.02 . Visando estudar a influência do rendimento específico sobre as taxas SDR, SRR e GDR num aquífero livre, procurou-se variar este parâmetro, principalmente para valores próximos de zero, para assim analisar tanto a resposta do aquífero quanto a solução aqui empregada.

Conforme pode ser visto na Figura 4.2, a taxa de depleção do fluxo atinge o estado estacionário num tempo adimensional $t>10^5$ e na Fig. 4.5 verificamos que a distribuição da pressão também permanece constante a partir deste momento, pois a partir de então o bombeamento do poço terá contribuição apenas das taxas de depleção dos rios SDR_1 e SDR_2 . Em outras palavras, isto significa que dependendo das condições hidrológicas do aquífero, depois de um determinado período de bombeamento, a vazão de água no poço é única e exclusivamente oriunda dos rios que estejam próximos ao poço.

A Figura 4.7 mostra o comportamento de SRR, GDR e de SDR_1 de um aquífero não confinado, variando o rendimento específico do solo S_y no intervalo $[2.5 \times 10^{-5}-0.3]$, comparando a solução com $S_y=0.1$. As curvas desta figura foram obtidas através das Eqs. (3.116), (3.118) e (3.120), da solução do Sistema transformado de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99) e da Eq. (3.78). Com a redução do rendimento específico a contribuição no bombeamento da taxa de liberação de armazenamento do aquífero tende a aumentar, enquanto a taxa de drenagem por gravidade diminui, até a extinção. Nota-se ainda que em função disso, tanto a taxa de liberação de armazenamento quanto a taxa de depleção

do rio ao caso confinado quando $S_y \rightarrow 0$. Do mesmo modo, segundo HUANG *et al.* (2014) no caso de aquíferos gotejantes, se $k' \rightarrow 10^{-4}$ o aquífero igualmente tende ao confinamento.

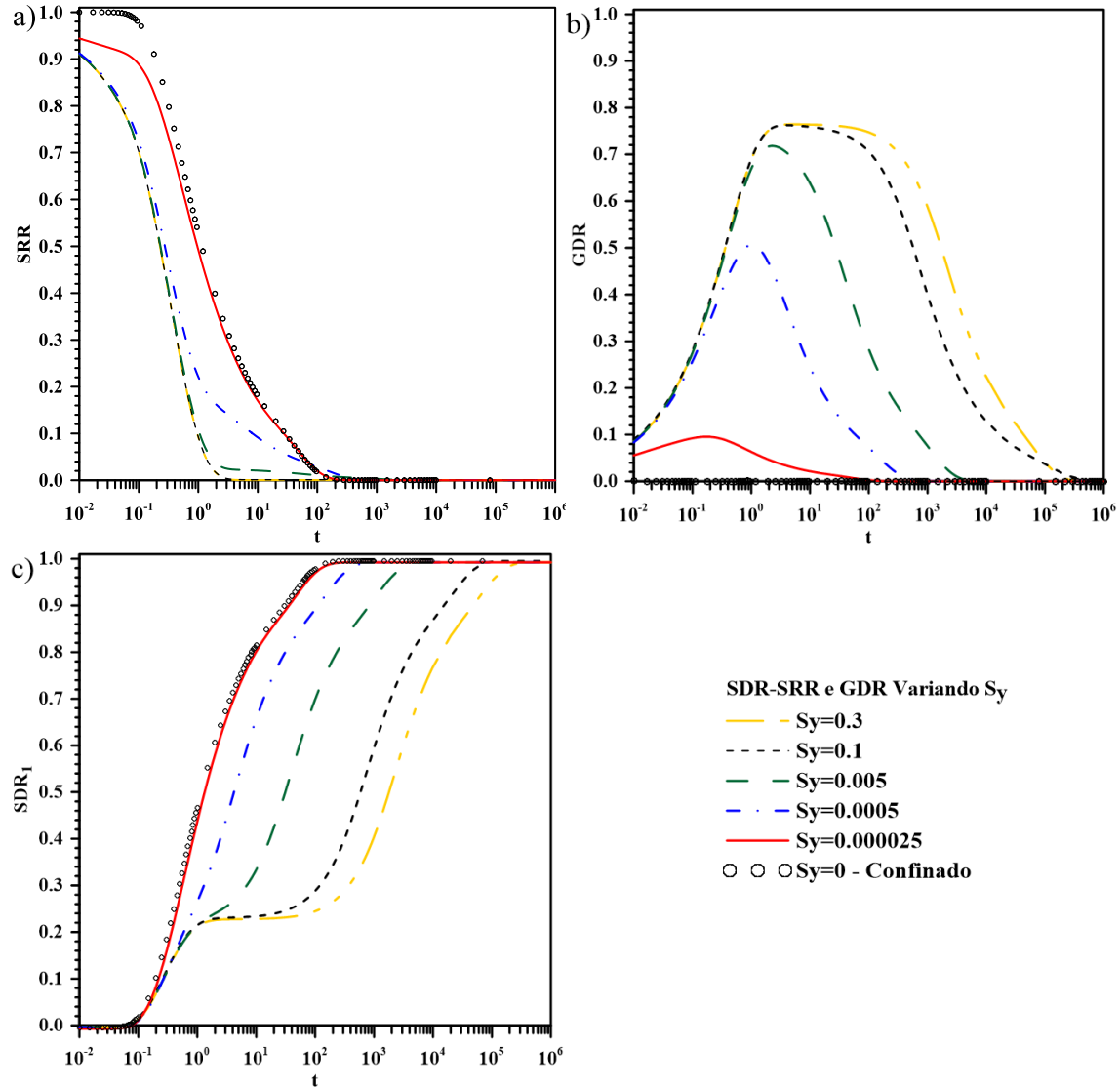


Figura 4.7 - SDR₁, SRR e GDR em aquíferos livres variando o rendimento específico S_y .

Do ponto de vista da técnica aqui empregada, destacamos que a solução proposta é capaz de bem produzir resultados satisfatórios e com boa convergência. Contudo, a diminuição do rendimento específico recai no caso de aquífero gotejante, se $k' \neq 0$, ou até mesmo confinado portanto, suas soluções podem ser obtidas analiticamente, conforme já citado.

4.2 RESULTADOS- POÇO HORIZONTAL

Nesta seção calcularemos a pressão hidráulica h , SDR_1 , GDR e SRR numa região próxima a um coletor RCW, num aquífero não confinado, ou seja, K' , de largura $W_x=W_y=800$ m e profundidade $H=20$ m, entre dois córregos em que este está sendo drenado por um poço vertical, com vazão de bombeamento constante $Q^*(t^*)=Q_0=100$ m³/dia. Com base na Tabela 4.1 os parâmetros hidráulicos do aquífero são dados como: $K_x=K_y=1$, $K_z=0.0025$ e $K'=0$ m/dia, $S_y=0.2$ e $S_s=10^{-5}$ m⁻¹. As larguras dos leitos dos rios 1 e 2 são $B_1=1$ e $B_2=1$ m e suas condutividades hidráulicas são $K_1=K_2=0.1$ m/dia, respectivamente. O poço RCW está localizado no ponto $(x_0^*, y_0^*, z_0^*)=(400,400,10)$, ou seja, na posição horizontal $x_0^*=y_0^*=400$ m a uma profundidade de $z_0^*=10$ m. Os resultados foram obtidos da Eqs. (3.104) e (3.85) fazendo $N=2$ e $L_1^*=L_2^*=200$ m, ou seja, um coletor horizontal de 400 m de comprimento. Os coletores estão orientados nas direções $\Theta_1=\pi/2$ e $\Theta_2=3\pi/2$, ou seja, paralelos às correntes. Os resultados obtidos no cálculo da pressão e das taxas de depleção dos rios 1 e 2, com poços horizontais, estão dispostos nas Figuras 4.8 e 4.9 a seguir.

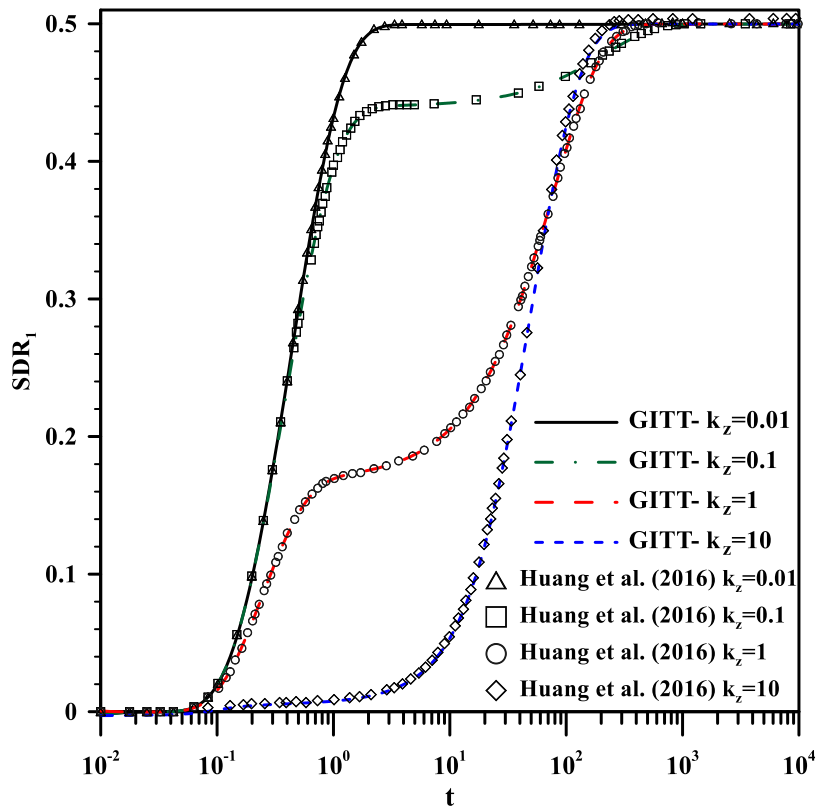


Figura 4.8 - SDR_1 num aquífero não confinado fazendo: $k_z=0.01$, 0.1, 1 e 10, comparados a solução de HUANG *et al.* (2015).

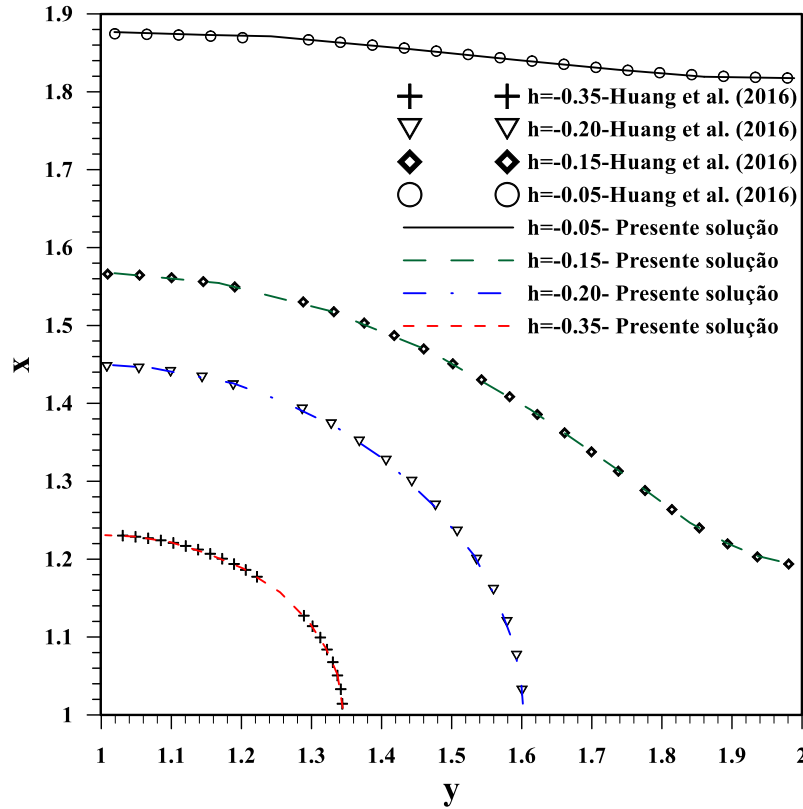


Figura 4.9 - Distribuição bidimensional da pressão hidráulica num aquífero não confinado, próxima a um poço horizontal com $N=2$, $\Theta_1=\pi/2$ e $\Theta_2=3\pi/2$, comparados a solução de HUANG *et al.* (2015) para $\Theta_1=0$ e $\Theta_2=\pi$.

Inicialmente serão mostrados os resultados obtidos através desta solução nas Figura 4.8 e 4.9, a fim de verificar o comportamento desta metodologia comparados aos existentes na literatura. Como se pode ver nestas figuras, a solução por GITT mostra-se com boa acurácia e precisão na obtenção das taxas de esgotamento e no cálculo da distribuição da pressão no caso RCW. Na Fig. 4.8 e conforme verificado por HUANG *et al.* (2015), verifica-se que a condutividade hidráulica na direção z somente influencia as SDRs para valores de $0.01 < k_z < 30$, ou seja, para valores de $k_z < 0.01$ e $k_z > 30$ o fluxo vertical pode ser negligenciado.

A Figura 4.9 obtida pelas das Eqs. (3.104), (3.87) e da solução do sistema transformado de EDOs, Eqs. (3.98)-(3.99), mostra a distribuição bidimensional da pressão hidráulica na região próxima ao poço, onde podemos destacar que a solução proposta reproduz com precisão os resultados obtidos anteriormente por HUANG *et al.* (2015). As isolinhas de pressão próximas ao poço mostram o cone de rebaixamento em função da posição, definindo a própria estrutura do poço e como este atua na sua vizinhança.

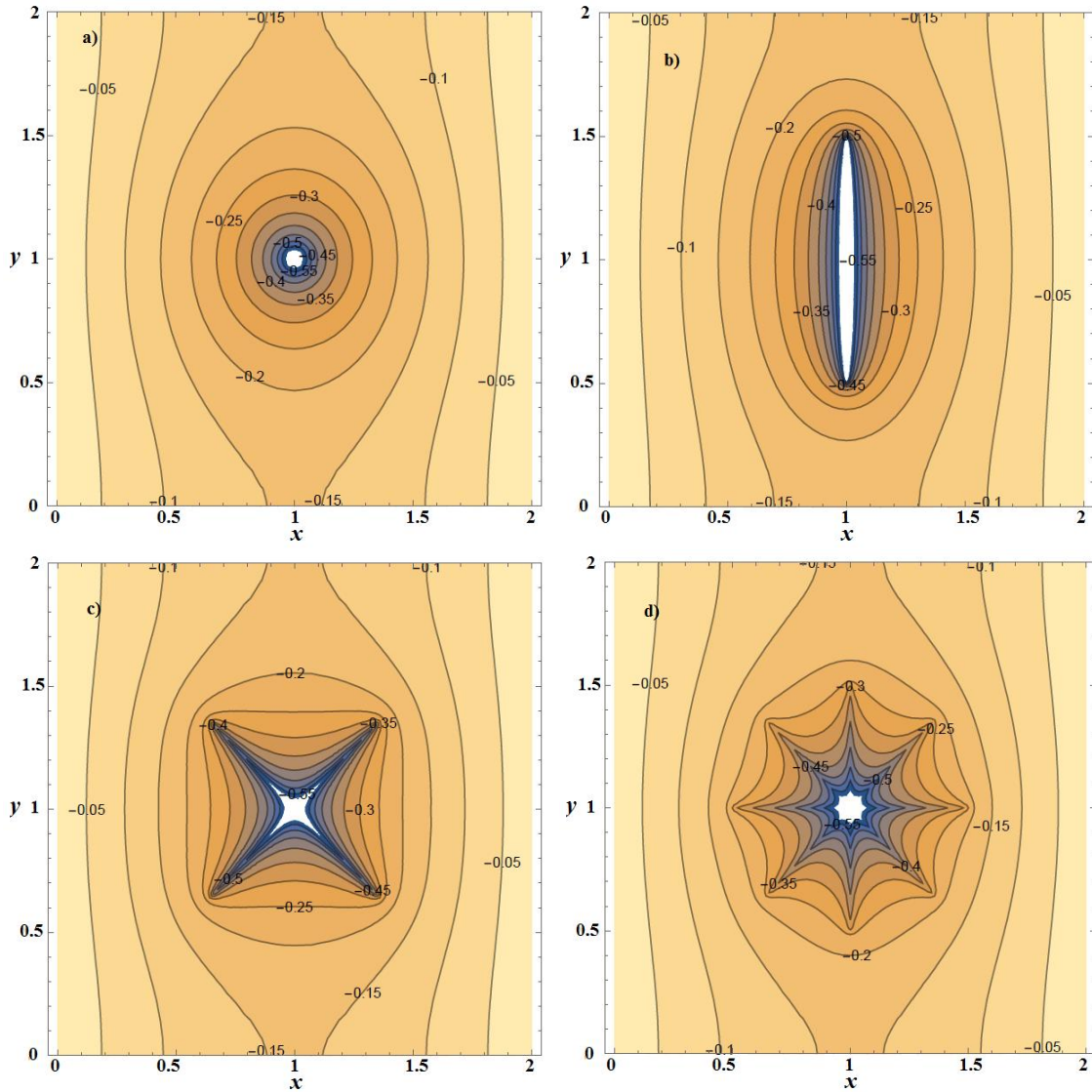


Figura 4.10-Distribuição horizontal da pressão num aquífero livre em $z=0$ e $t=10^7$, predita pela Eq. (3.104): (a) provocada por poço vertical, Eq.(3.78), e provocada por RCW, Eq. (3.87) com: (b) $N=2$; (c) $N=4$ e (d) $N=8$.

A Fig. 4.10(a) mostra a forma do cone de rebaixamento próximo ao poço vertical e as Figuras 4.10(b)-4.10(d) mostram a distribuição da pressão provocada por um poço coletor horizontal de: $N=2$, Fig. 4.10(b), $N=4$, Fig. 4.10(c) e $N=8$, Fig. 4.10(d). Esta figura indica que a solução proposta é capaz de simular diversas situações em que se precise posicionar um poço para o rebaixamento de um aquífero.

A Fig. 4.11 é obtida das Eqs. (3.116) e (3.87) que calculam a taxa de depleção dos rios em um aquífero não confinado provocado por poços coletores radiais RCW variando a orientação dos coletores. A Figura 4.11 permite analisar a influência da orientação do coletor sobre as taxas de depleção dos rios, quanto à orientação em relação à direção das correntes, se paralelo ou horizontalmente posicionado. Para isto,

na Eq. (3.84) faz-se $N=2$ e os ângulos $\Theta_1=\pi/2$ e $\Theta_2=3\pi/2$ para RCW paralelo, e $\Theta_1=0$ e $\Theta_2=\pi$, para RCW perpendicular. Nela nota-se que a orientação do coletor perpendicular à corrente, ou seja, o RCW perpendicular contribui para o aumento das taxas de depleção dos rios.

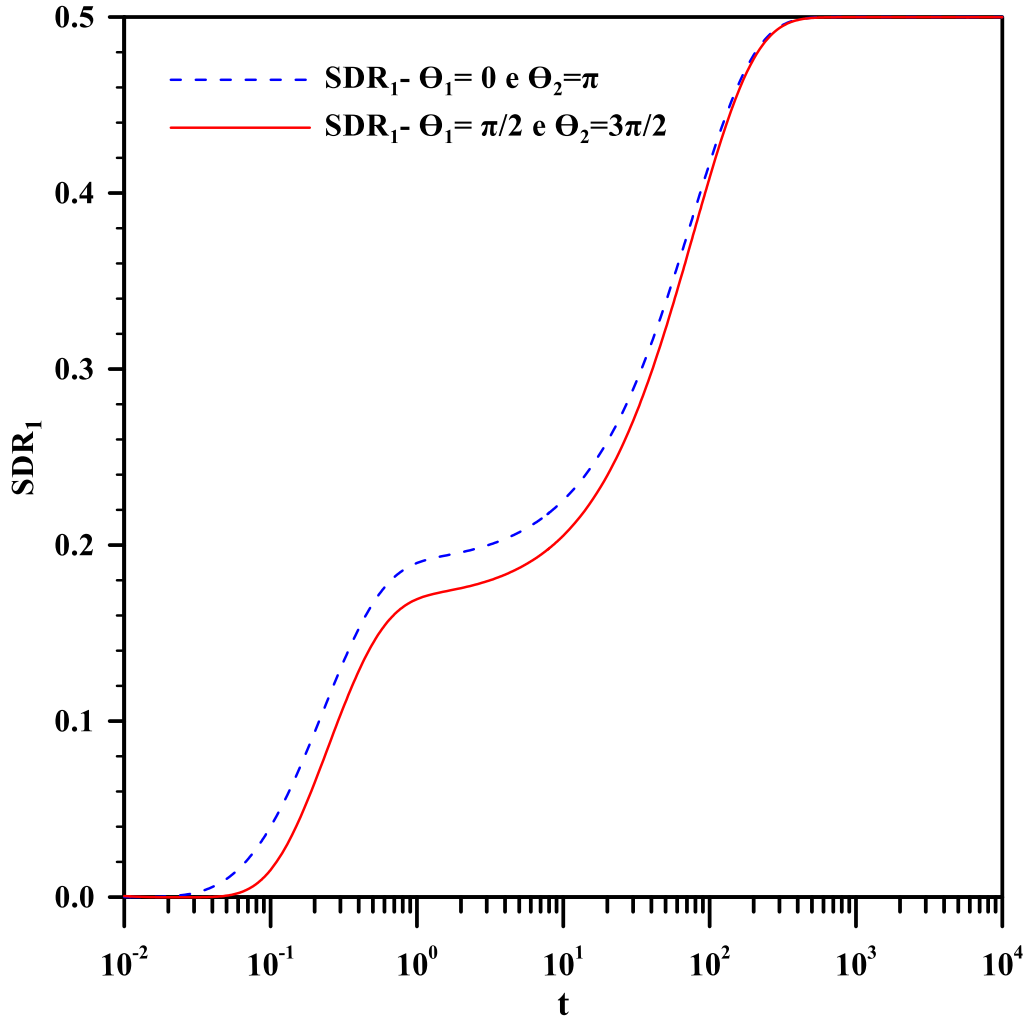


Figura 4.11 - Cálculo de SDR_1 variando no tempo, predita pela Eq. (3.116) de aquífero livre com RCWs paralelos ou perpendiculares aos rios, adotando: $N=2$ e os ângulos $(\Theta_1=\pi/2, \Theta_2=3\pi/2)$ e $(\Theta_1=0, \Theta_2=\pi)$, respectivamente.

A Figura 4.12 é obtida das Eqs. (3.116), (3.118) e (3.120) para calcular as taxas de depleção, drenagem por gravidade e liberação de armazenamento de um aquífero não confinado provocado por coletores radiais RCW variando o número de coletores. Nela verifica-se a influência do aumento no número dos coletores sobre as taxas SDR , SRR e GDR fazendo $N=2, 4$ e 8 , ficando evidente que a variação do número de coletores pouco influencia no aumento da taxa de esgotamento do rio.

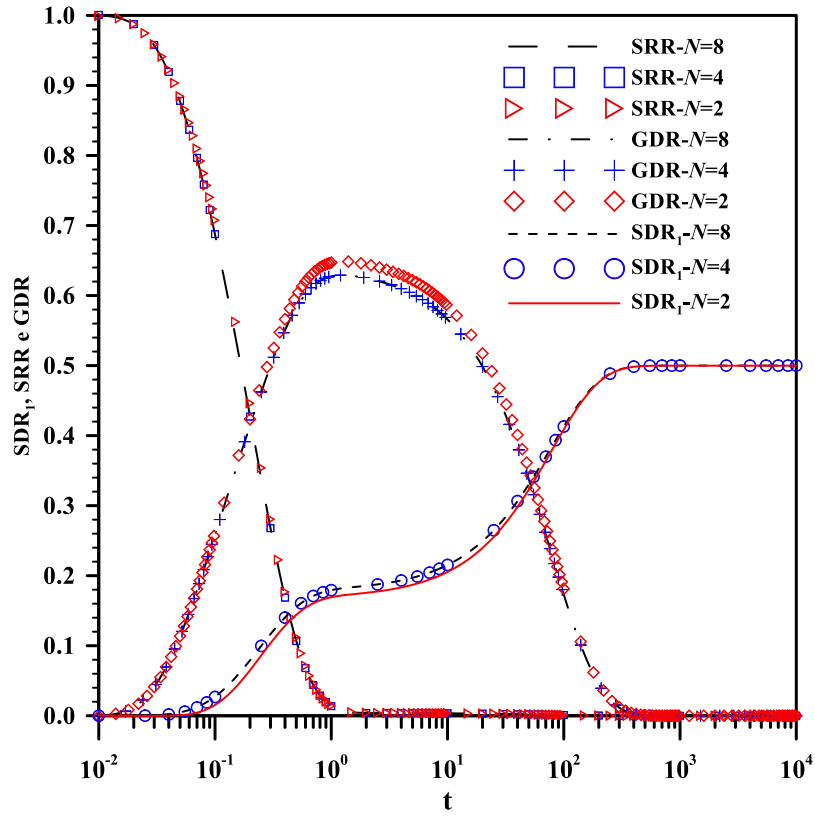


Figura 4.12 - SDR_1 , SRR e GDR provocados por um RCW num aquífero livre formado 2, 4 ou 8 coletores, previstas pelas Eqs. (3.116), (3.118) e (3.120).

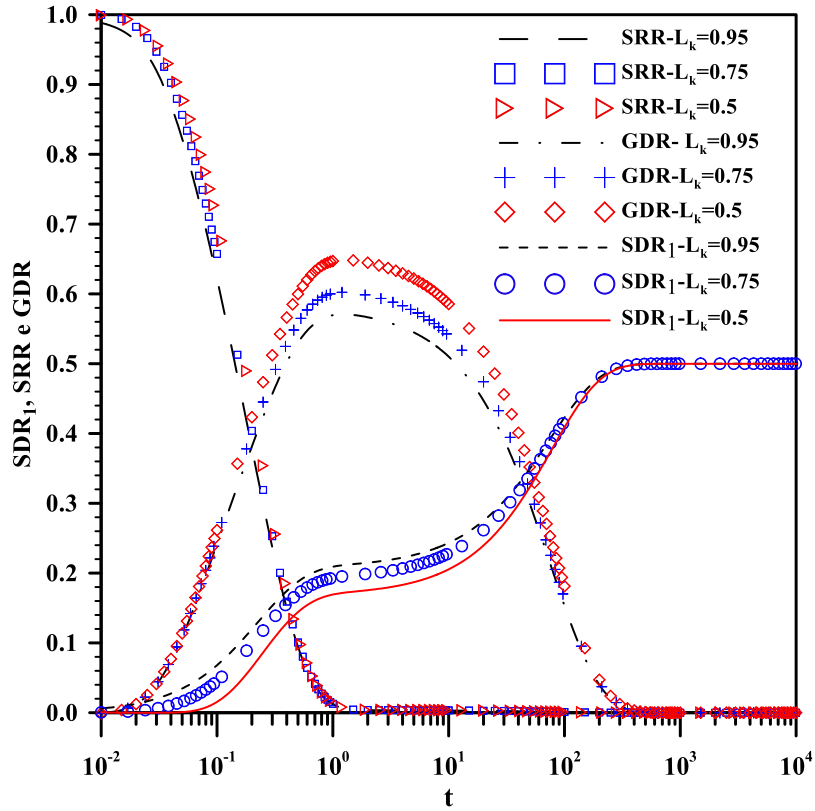


Figura 4.13 - SDR_1 , SRR e GDR provocados por um RCW num aquífero livre variando a comprimento dos seus coletores $L_k=0.5$, 0.57 e 0.95 .

Na Fig. 4.13 verifica-se a influência do aumento do comprimento dos coletores sobre as taxas SDR, SRR e GDR fazendo $L_k=0.5, 0.75$ e 0.95 e $N=8$. Nela observa-se que o aumento do comprimento dos coletores é diretamente proporcional as taxas de depleção.

De acordo com HUANG *et al.* (2011) a profundidade de um coletor horizontal num aquífero influencia diretamente na variação da taxa de esgotamento variando no tempo. A Figura 4.14 mostra como a variação da localização vertical do poço coletor radial incide sobre SDR. Dela conclui-se que SDR é sensível a variação da profundidade do poço horizontal, ou seja, quanto mais profundo o poço maior a taxa de depleção provocada por ele, ou seja, a variação da profundidade do RCW é um fato importante para o aumento ou diminuição das taxas de esgotamento do aquífero, superando parâmetros como comprimento, orientação e até mesmo o número de coletores no RCW, conforme pode ser visto nas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13.

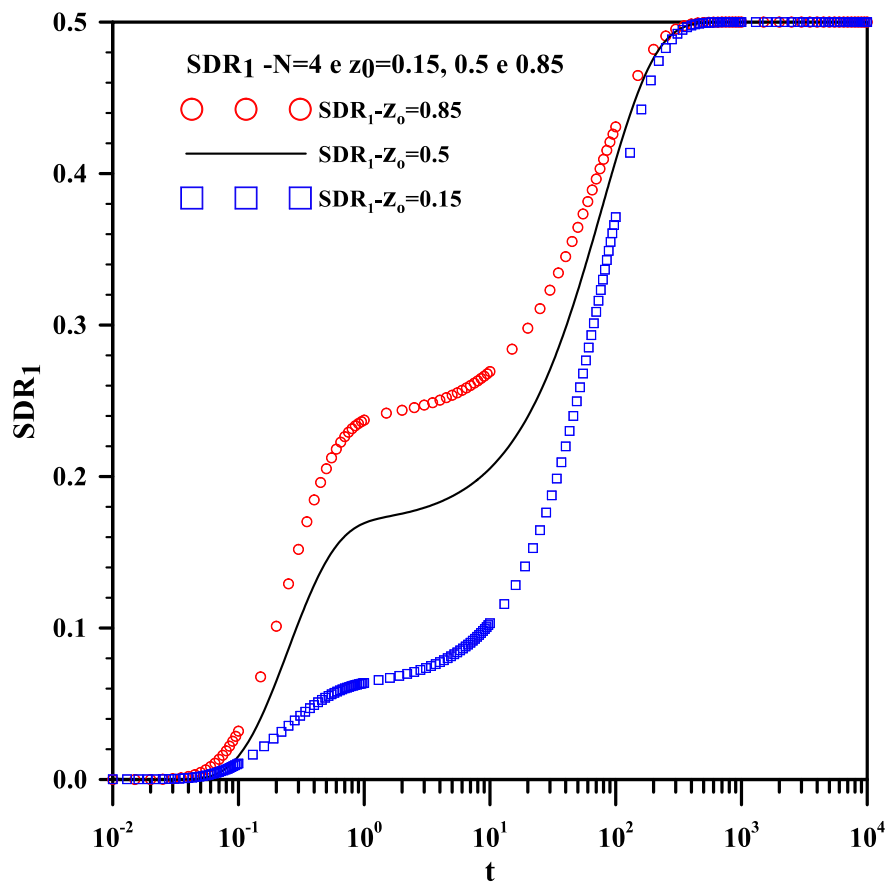


Figura 4.14 - SDR_1 de aquífero livre variando a profundidade do RCW, fazendo $z_0=0.85, 0.5$ e 0.15 .

A Figura 4.15 é obtida das Eqs. (3.116), (3.118), (3.120) e da Eq.(3.78), para o FPVW e Eq. (3.87) para o RCW. Nesta calcula-se as taxas de depleção, drenagem gravimétrica e liberação de armazenamento para os poços verticais e horizontais $SDR_{1,V}$, GDR_V , SRR_V , e $SDR_{1,H}$; GDR_H , SRR_H respectivamente. O índice V indica o poço vertical e o índice H o poço coletor RCW. Na Figura 4.15 verifica-se que entre $t=1$ e 10^2 a taxa de depleção do fluxo em poços verticais é ligeiramente menor que em poços horizontais. No entanto no início do bombeamento a taxa de drenagem por gravidade apresenta um aumento significativo, enquanto a taxa de liberação de armazenamento diminuiu na mesma proporção, a fim de manter o balanço no sistema.

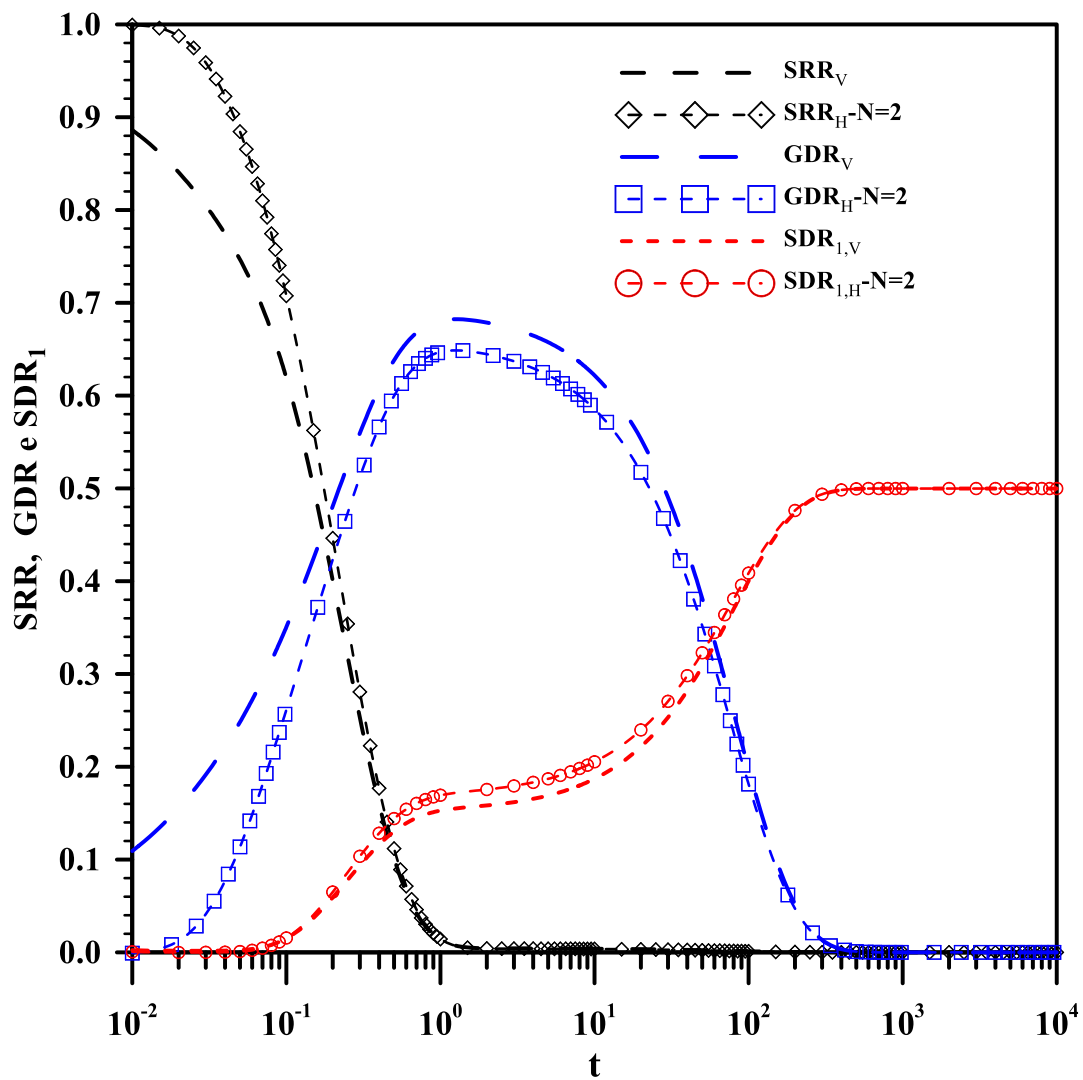


Figura 4.15 - SDR_1 , SRR e GDR provocadas por poço vertical, índice V, e horizontal, índice H, para dois coletores, $N=2$, $L_k=0.5$.

4.3 ESTUDO DA VARIAÇÃO DA TAXA DE BOMBEAMENTO

Procede-se agora com a análise das condições em que a vazão de bombeamento varie em função do tempo. Para isto, adotaremos dois modelos hipotéticos da equação que simule a variação da taxa de bombeamento no tempo, conforme descrito na Tabela 4.2 comparados a condição de vazão constante, $Q^*(t)=Q_0$.

Tabela 4.2 - Modelos hipotéticos de vazão de bombeamento.

Caso	$Q(t)$
Caso 1	$\exp(-\omega_1 t)$
Caso 2	$f_1(\omega_1 t)\theta(t_1-t)+f_2(\omega_2 t)\theta(t-t_2)$

O Caso 1 da Tabela 4.2 simula o decaimento continuo da vazão de bombeamento durante o período de drenagem do aquífero, provocado pela perda natural de eficiência do equipamento; o Caso 2 simula uma atividade em que ocorra uma interrupção de período Δt durante o bombeamento. As funções f_1 e f_2 são definidas de acordo com o tipo de atividade exercida ou do equipamento utilizado. Neste trabalho adotaremos as funções trigonométricas $f_1(\omega_1 t)=\cos(\pi\omega_1 t/2)$ e $f_2(\omega_2 t)=\sin[\omega_2(t-t_2)]$, em que ω_1 e ω_2 são as amplitudes de variação da onda de bombeamento.

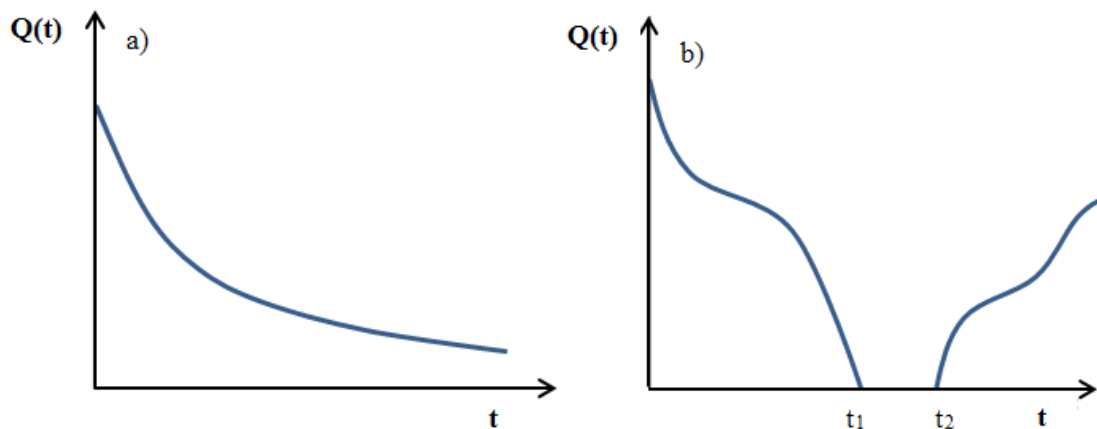


Figura 4.16-Modelos hipotéticos de vazão de bombeamento: (a) Caso 1 e (b) Caso 2.

As derivadas sucessivas da função vazão $Q(t)$ -caso 2 são:

$$Q'(t)=f_1'(\omega_1 t)\theta(t_1-t)+f_2'(\omega_2 t)\theta(t-t_2)-f_1(\omega_1 t)\delta(t_1-t)+f_2(\omega_2 t)\delta(t-t_2) \text{ e}$$

$$Q''(t)=f_1''(\omega_1 t)\theta(t_1-t)+f_2''(\omega_2 t)\theta(t-t_2)-2[f_1'(\omega_1 t)\delta(t_1-t)+f_2'(\omega_2 t)\delta(t-t_2)]-f_1(\omega_1 t)\delta(t_1-t)/(t_1-t)-f_2(\omega_2 t)\delta(t-t_2)/(t-t_2)$$

A Figura 4.16(a) representa um esquema de bombeamento que ocorra na forma de decaimento exponencial, enquanto a Figura 4.16(b) é um modelo esquemático de um bombeamento variável com interrupção de período $t_1 \leq t \leq t_2$ em que $t_2 = t_1 + \Delta t$, onde Δt é o intervalo de parada no bombeamento. Neste trabalho $t_1 = 1/\omega_1$, adotando as amplitudes $\omega_1 = 10^{-3.5}$ e $\omega_2 = 10^{-4.5}$ e intervalo de parada no bombeamento $\Delta t = 0.1$.

Nesta seção estudaremos $SDR_{1,V}$ e $SDR_{1,H}$; GDR_V , GDR_H e SRR_V , SRR_H num aquífero não confinado de larguras $W_x = W_y = 1000$ m e profundidade $H = 20$ m, entre dois córregos, onde este está sendo drenado por um poço vertical e/ou horizontal, com vazão de bombeamento variável, $Q^*(t^*)$, de vazão inicial $Q_0 = 100$ m³/dia. Os parâmetros hidráulicos do aquífero são definidos como: $S_y = 0.2$, $S_s = 10^{-4}$ m⁻¹, $K_x = K_y = 1$ e $K_z = 0.01$ m/dia. As larguras dos leitos dos rios 1 e 2 são $B_1 = 1$ e $B_2 = 1$ m e suas condutividades hidráulicas são $K_1 = 0.1$ e $K_2 = 0$ m/dia, respectivamente. O coletor está localizado no ponto $(x_0^*, y_0^*, z_0^*) = (400, 500, 10)$, enquanto o poço vertical em $(x_0^*, y_0^*) = (400, 500)$. Os resultados foram obtidos das Eqs. (3.104) e (3.85) para $N = 4$ e $L_1^* = L_2^* = L_3^* = L_4^* = 200$ m. Os coletores estão orientados nas direções $\Theta_1 = \pi/4$, $\Theta_2 = 5\pi/4$, $\Theta_3 = 3\pi/4$, $\Theta_4 = 7\pi/4$. Os resultados obtidos no cálculo das taxas de depleção e dos rios 1 e 2 para poços horizontais e verticais estão dispostos nas figuras a seguir.

As Figura 4.17 e 4.18 mostram o comportamento das taxas $SDR_{1,V}$ e $SDR_{1,H}$; GDR_V , GDR_H e SRR_V , SRR_H variando simultaneamente no tempo. De acordo com a Eq.(3.115), a soma destas taxas devem ser igual a vazão de bombeamento $Q(t)$, por este motivo, observa-se comportamentos complementares destas taxas variando no tempo. Ainda de acordo com a Eq. (3.115), nota-se mais nitidamente a igualdade sendo satisfeita a partir de $t > 10^3$, onde a SDR é exatamente igual a $Q(t)$, pelo fato de já se ter esgotado a liberação de armazenamento e a drenagem por gravidade em função da intensidade da vazão de bombeamento. Os resultados mostram como estas taxas sofrem a influência da variação da taxa de bombeamento e como esta variação pode limitar o aumento das SDRs, principalmente em tempos muito longos.

Na Figura 4.17 a vazão de bombeamento é dada pela equação $Q(t) = \exp(-\omega_1 t)$, enquanto na Figura 4.18 a vazão do bombeamento é dado pela equação $Q(t) = \cos(\pi\omega_1 t/2)\theta_{t_1}(t_1 - t) + \sin[\omega_2(t - t_2)]\theta_{t_2}(t - t_2)$.

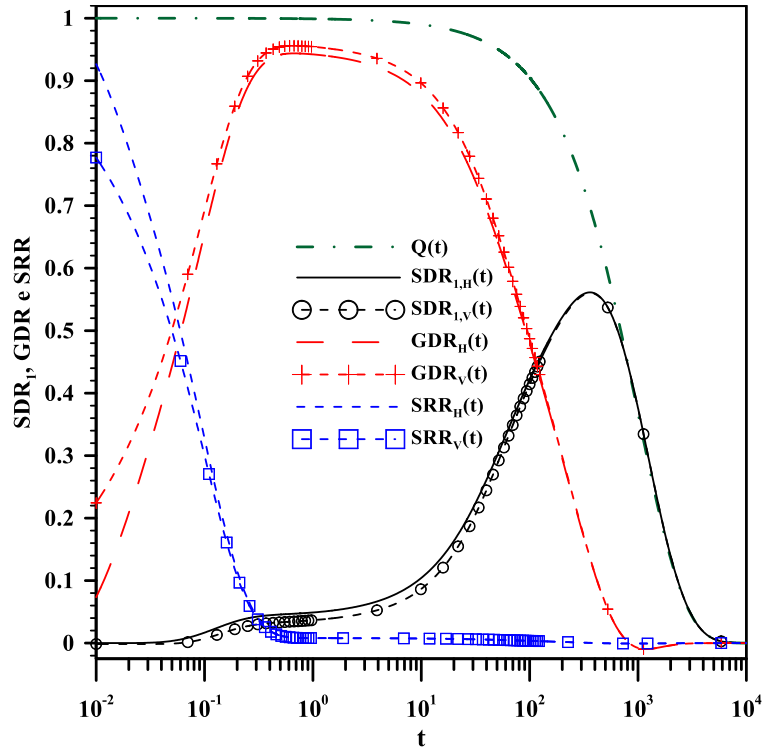


Figura 4.17 - $SDR_{1,V}$ e $SDR_{1,H}$; GDR_V , GDR_H e SRR_V , SRR_H de aquíferos não confinados drenados por poços verticais e horizontais com vazão de bombeamento $Q(t)=\exp(-\omega_1 t)$.

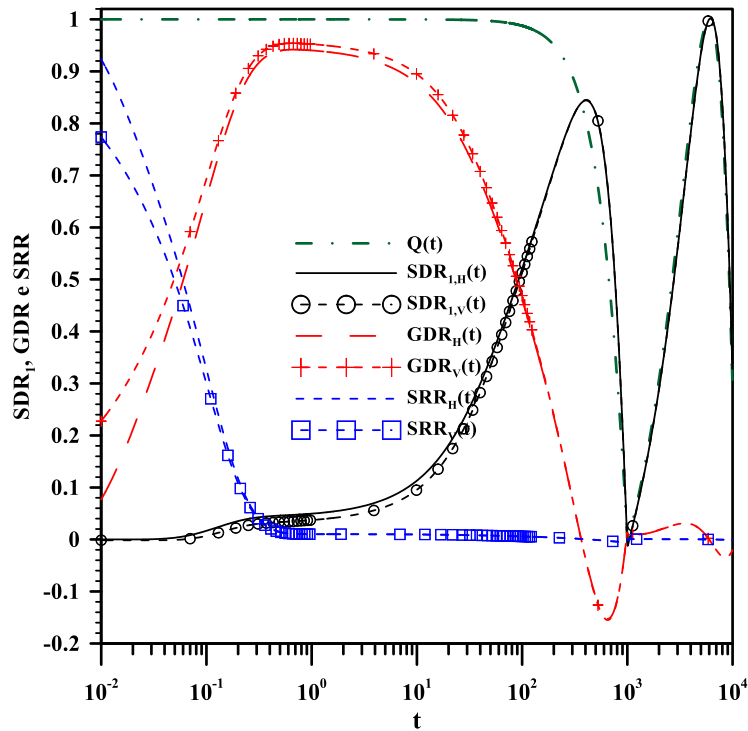


Figura 4.18 - $SDR_{1,V}$ e $SDR_{1,H}$; GDR_V , GDR_H e SRR_V , SRR_H de aquíferos não confinados drenados por poços verticais e horizontais com vazão de bombeamento $Q(t)=\cos(\pi\omega_1 t/2)\theta_{t_1}(t_1-t)+\sin[\omega_2(t-t_2)]\theta_{t_2}(t-t_2)$.

Na Figura 4.18 observa-se que no período de desligamento SDR tende imediatamente a zero, e em seguida é regida pela própria vazão de bombeamento, conforme estabelecida. Isso mostra que após se esgotar SRR, GDR ou LR as taxas de SDRs são variáveis em função da vazão do poço.

A Figura 4.19 mostra a comparação entre os tipos de bombeamento, definidos nos Casos 1 e 2 da Tabela 4.2 comparados ao caso de vazão constante $Q(t)=1$. Nesta Figura notamos que independentemente do tipo de bombeamento adotado as SDRs são iguais no início do processo de drenagem. Portanto, dependendo da amplitude do tempo de vazão estabelecido ω , o modelo de vazão adotado apresenta pouca relevância em simulações de curto prazo, apresentando maior influência depois de um longo tempo de bombeamento.

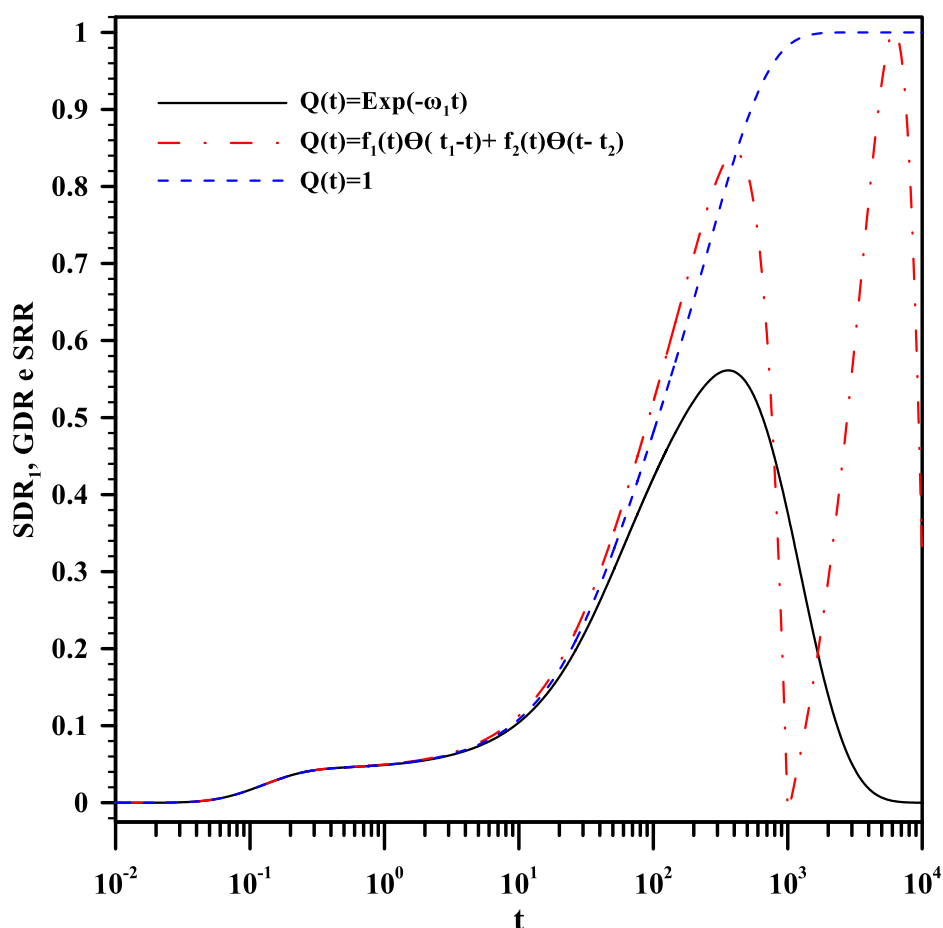


Figura 4.19 - SDR_1 de aquíferos não confinados drenados por poços horizontais com vazão de bombeamento $Q(t)$: 1, $\exp(-\omega t)$ e $\cos(\pi\omega_1 t/2)\theta_{t_1}(t_1-t)+\sin[\omega_2(t-t_2)]\theta_{t_2}(t-t_2)$.

4.4 ESTUDO DA VARIAÇÃO DA CONDIÇÃO INICIAL

De maneira ilustrativa será proposta uma condição inicial h_0 hipotética que represente a pressão inicial variando no espaço, conforme a seguir:

$$h_0(x,y,z)=\varepsilon x(x-w_x)y(y-w_y) \quad (4.1)$$

onde ε é a constante que determina a concavidade da condição inicial. Na Eq. (4.1) se $\varepsilon < 0$ a concavidade de h_0 é voltada para cima, neste caso uma superfície côncava, enquanto se $\varepsilon > 0$ a concavidade de h_0 é voltada para baixo, ou convexa, conforme ilustra a Figura 4.20.

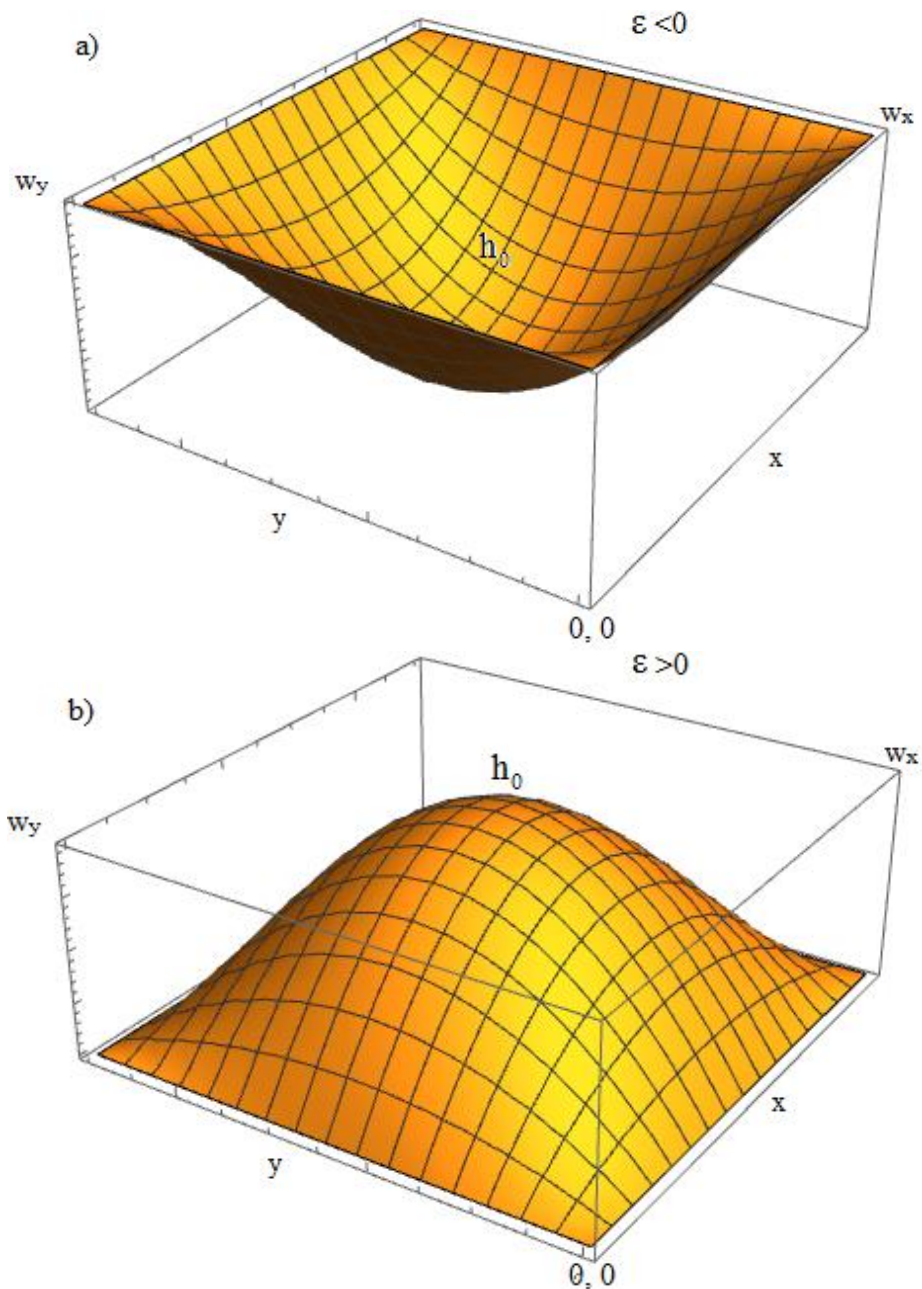


Figura 4.20-Figura esquemática da distribuição da pressão inicial variando no espaço: (a) $\varepsilon < 0$; (b) $\varepsilon > 0$.

Nesta seção será analisado o efeito da condição inicial em um aquífero não confinado sobre SDR_1 , GDR e SRR, provocado poço vertical e/ou horizontal, sujeito aos parâmetros: largura $W_x=W_y=1000$ m e profundidade $H=20$ m, vazão de bombeamento constante $Q^*(t^*)=Q_0=100$ m³/dia, condutividades hidráulicas $K_x=K_y=1$ e $K_z=0.01$ m/dia, $S_y=0.2$ e $S_s=10^{-4}$ m⁻¹. As larguras dos leitos dos Rios 1 e 2 são $B_1=1$ e $B_2=1$ m e suas condutividades hidráulicas são $K_1=0.1$ e $K_2=0$ m/dia, respectivamente. O coletor está localizado no ponto $(x_0^*, y_0^*, z_0^*) = (400, 500, 10)$, formado por 4 coletores, $N=4$ de lados $L_1^*=L_2^*=L_3^*=L_4^*=200$ m. A orientação dos coletores são: $\Theta_1= \pi/4$, $\Theta_2=5\pi/4$, $\Theta_3= 3\pi/4$, $\Theta_4= 7\pi/4$. Os resultados obtidos no cálculo das taxas de depleção e dos rios 1 e 2, para poços horizontais variado ε estão dispostos nas Figuras 4.21 a 4.22 a seguir.

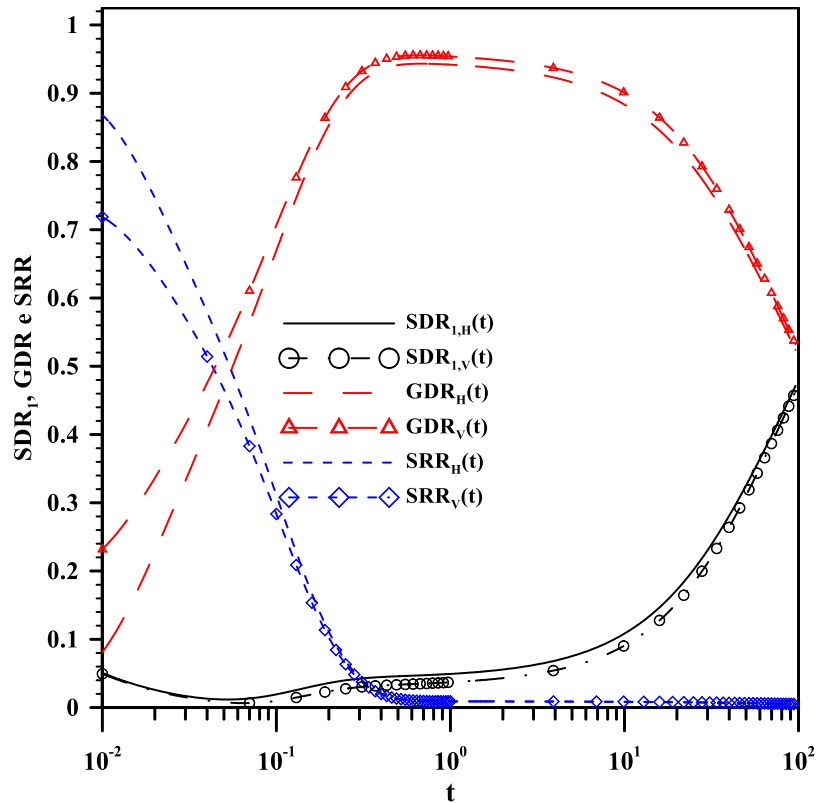


Figura 4.21 - SDR_1 , SRR e GDR de um aquífero não confinado drenado com poço horizontal, $N=4$, com condição inicial diferente de zero para $\varepsilon=-10^{-4}$.

A Figura 4.21 mostra as taxas SDR_1 , SRR e GDR de um aquífero livre sendo bombeado por um poço RCW de 4 coletores de 200 m, comparados ao caso do poço vertical. A condição do aquífero no início do bombeamento é determinado pela Eq. (4.1) com $\varepsilon=-10^{-4}$. Neste caso a concavidade do aquífero está voltada para cima, o que

simula a condição de um aquífero situado inicialmente abaixo no nível da água dos rios. Como esta condição indica que no momento $t=0$ já exista uma região desidratada próxima ao poço antes mesmo do início do bombeamento, nota-se que as taxas de depleção e drenagem por gravidade, SDR e GDR, não iniciam em zero e que consequentemente a taxa de liberação de armazenamento do aquífero, SRR, não seja plena, em função do fluxo de água pré-existente do rio para dentro do aquífero no instante $t=0$.

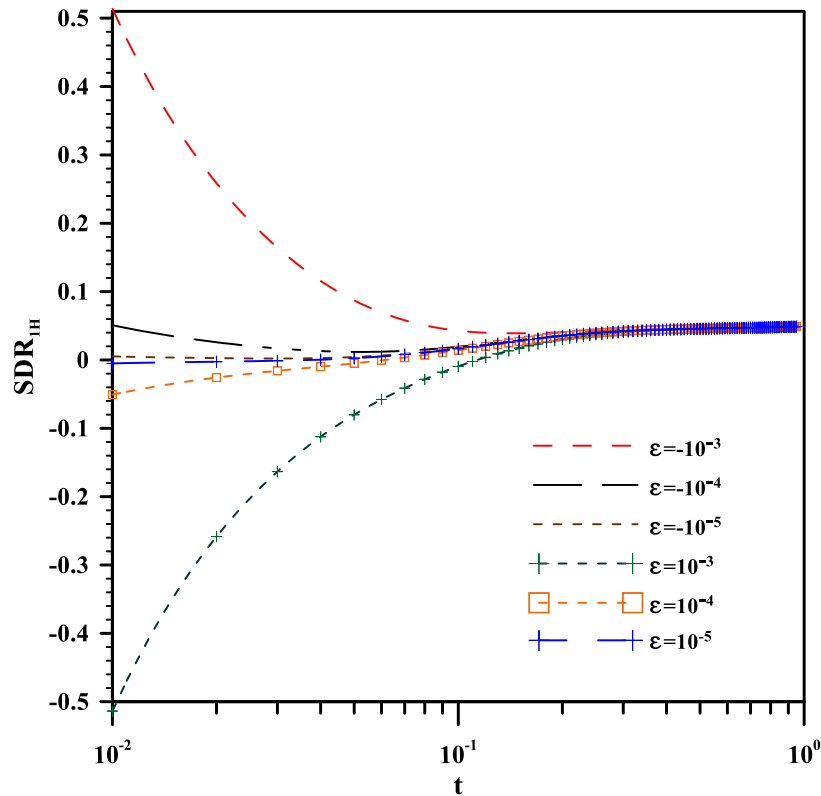


Figura 4.22- SDR_1 de um aquífero não confinado drenado com poço horizontal com condição inicial diferente de zero, variando ϵ no intervalo $[-10^{-3}, 10^{-3}]$.

A Figura 4.22 mostra o efeito da concavidade da condição inicial sobre o comportamento da SDR, quando variamos ϵ no intervalo $[-10^{-3}, 10^{-3}]$. A Figura mostra que quando a concavidade da pressão inicial é voltada para baixo, $\epsilon > 0$, SDR inicia com valores negativos, indicando que o fluxo de água no aquífero está acontecendo no sentido contrário, ou seja, do aquífero para o rio, pelo fato de a pressão no interior do aquífero está maior que a pressão no seu contorno. E se $\epsilon < 0$, como discutido na Figura 4.21, SDR é positiva e maior que zero no instante $t=0$, pelo fato de a pressão no aquífero em $t=0$ ser menor que a pressão no leito do rio, provocando um fluxo de água

do rio para dentro do aquífero, a fim de que o sistema atinja o equilíbrio. Verificamos também que quando $\varepsilon \rightarrow 10^{-5}$ a condição inicial tende a zero, ou seja, $h_0(x,y,z) \rightarrow 0$.

4.5 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

As séries infinitas envolvidas na solução apresentada devem ser truncadas em um número finito de termos NT na soma dos índices “i” e MT na soma do índice “j”. A fim de verificar a convergência da solução proposta, foram realizadas separadamente as convergências da solução do sistema de equações diferenciais ordinárias, Eqs. (3.98)-(3.99), depende do número de termos NTs e da solução do problema filtro em função do número de termos MTs. Os resultados foram obtidos das Eqs. (3.78) e (3.87), com os parâmetros: $W_x=W_y=1000$ m e $H=20$ m; $Q^*(t^*)=Q_0=100$ m³/dia; $K_x=K_y=1$ e $K_z=0.01$ m/dia; $S_y=0.2$ e $S_s=10^{-4}$ m⁻¹; $B_1=1$ m, $B_2=1$ m e $K_1=K_2=0.1$ m/dia; $(x_0^*, y_0^*, z_0^*)=(400,500,10)$; $N=2$ e $L_1=L_2=200$ m; $\Theta_1=\pi/2$ e $\Theta_2=3\pi/2$.

Tabela 4.3-Esquema de ordenamento 2-D e 3-D dos autovalores.

Autovalores			Ordenamento 2D				Ordenamento 3D				
α	β	δ	n	q	j	λ_j	m	p	r	i	μ_i
0.62210	0.00000	0.00000	1	1	1	0.62210	1	1	1	1	0.62210
1.86631	1.25664	3.15427	1	2	2	1.40219	1	2	1	2	1.40219
3.11055	2.51327	9.42902	2	1	3	1.86631	2	1	1	3	1.86631
4.35485	3.76991	15.71051	2	2	4	2.24994	2	2	1	4	2.24994
5.59924	5.02655	21.99297	1	3	5	2.58912	1	3	1	5	2.58912
6.84372	6.28319	28.27575	3	1	6	3.11055	3	1	1	6	3.11055
8.08833	7.53982	34.55868	2	3	7	3.13044	2	3	1	7	3.13044
9.33309	8.79646	40.84168	3	2	8	3.35480	1	1	2	8	3.21503
10.57800	10.05310	47.12474	1	4	9	3.82089	3	2	1	9	3.35480
11.82309	11.30973	53.40782	3	3	10	3.99901	1	2	2	10	3.45190
13.06838	12.56637	59.69093	2	4	11	4.20658	2	1	2	11	3.66504
14.31387	13.82301	65.97405	4	1	12	4.35485	1	4	1	12	3.82089
15.55957	15.07964	72.25718	4	2	13	4.53253	2	2	2	13	3.87449
16.80550	16.33628	78.54033	3	4	14	4.88751	3	3	1	14	3.99901
18.05167	17.59292	84.82347	4	3	15	5.02805	1	3	2	15	4.08081
19.29807	18.84956	91.10663	1	5	16	5.06490	2	4	1	16	4.20658
20.54472	20.10619	97.38978	2	5	17	5.36184	4	1	1	17	4.35485
21.79161	21.36283	103.67294	5	1	18	5.59924	3	1	2	18	4.43001
23.03876	22.61947	109.95611	5	2	19	5.73852	2	3	2	19	4.44399
24.28616	23.87610	116.23927	4	4	20	5.75995	4	2	1	20	4.53253

Para ilustrar, a Tabela 4.3 apresenta o esquema de ordenação 2D e 3D utilizado para reduzir as somas triplas e duplas, respectivamente, para os 20 primeiros

autovalores. Observa-se na Tabela citada que, embora os autovalores μ_i e λ_j sejam obtidos por diferentes esquemas de ordenamento, os autovalores $\alpha_m = \alpha_n$ e $\beta_p = \beta_q$ se $m=n$ e $p=q$, no entanto $\alpha_{m(i)} \neq \alpha_{n(j)}$ e $\beta_{p(i)} \neq \beta_{q(j)}$ para $i \neq j$ (e.g., se $i=j=19$, $m=2$ e $n=5$; portanto, $\alpha_{m(19)} = 1.86631$, e $\alpha_{n(19)} = 6.84372$).

Tabela 4.4 -Convergência de SDR1 de um aquífero não confinado: Filtro -FPVW e RCW

Horizontal-RCW						
t	MT=5000	MT=6000	MT=7000	MT=8000	MT=9000	MT=10000
0.01	-0.0019	0.0021	-0.0016	0.0007	0.0014	0.0002
0.1	0.0074	0.0115	0.0077	0.0100	0.0108	0.0096
1	0.0388	0.0428	0.0391	0.0414	0.0421	0.0409
10	0.0943	0.0984	0.0947	0.0969	0.0977	0.0965
100	0.4733	0.4773	0.4736	0.4759	0.4766	0.4754
t	MT=11000	MT=12000	MT=13000	MT=14000	MT=15000	MT=16000
0.01	0.0002	-0.0010	-0.0009	0.0001	0.0001	0.0001
0.1	0.0095	0.0084	0.0084	0.0095	0.0095	0.0094
1	0.0409	0.0397	0.0398	0.0408	0.0408	0.0408
10	0.0965	0.0953	0.0954	0.0964	0.0964	0.0964
100	0.4754	0.4742	0.4743	0.4754	0.4753	0.4753
t	MT=17000	MT=18000	MT=19000	MT=20000	MT=25000	MT=30000
0.01	0.0008	0.0003	-0.0005	-0.0006	0.0001	-0.0003
0.1	0.0101	0.0097	0.0088	0.0087	0.0094	0.0090
1	0.0415	0.0411	0.0402	0.0401	0.0408	0.0404
10	0.0970	0.0966	0.0958	0.0957	0.0963	0.0960
100	0.4760	0.4756	0.4747	0.4746	0.4753	0.4749
Vertical- FPVW						
t	MT=5000	MT=6000	MT=7000	MT=8000	MT=9000	MT=10000
0.01	-0.0023	0.0018	-0.0020	0.0003	0.0010	-0.0002
0.1	0.0060	0.0101	0.0064	0.0086	0.0094	0.0082
1	0.0347	0.0388	0.0350	0.0373	0.0380	0.0368
10	0.0886	0.0927	0.0889	0.0912	0.0920	0.0908
100	0.4705	0.4746	0.4709	0.4731	0.4739	0.4727
t	MT=11000	MT=12000	MT=13000	MT=14000	MT=15000	MT=16000
0.01	-0.0002	-0.0014	-0.0013	-0.0002	-0.0003	-0.0003
0.1	0.0082	0.0070	0.0071	0.0081	0.0081	0.0081
1	0.0368	0.0356	0.0357	0.0368	0.0367	0.0367
10	0.0907	0.0896	0.0896	0.0907	0.0907	0.0907
100	0.4727	0.4715	0.4716	0.4726	0.4726	0.4726
t	MT=17000	MT=18000	MT=19000	MT=20000	MT=25000	MT=30000
0.01	0.0004	0.0000	-0.0009	-0.0010	-0.0003	-0.0003
0.1	0.0087	0.0083	0.0075	0.0074	0.0080	0.0079
1	0.0374	0.0370	0.0361	0.0360	0.0367	0.0365
10	0.0913	0.0909	0.0901	0.0899	0.0906	0.0902
100	0.4732	0.4728	0.4720	0.4719	0.4725	0.4722

Tabela 4.5- Convergência de SDR_1 de aquífero não confinado - FPVW

Poço Vertical						
t	NT=400	NT=500	NT=600	NT=700	NT=800	NT=900
0.01	-0.0079	0.0067	0.0058	-0.0015	-0.0049	-0.0011
0.1	0.0023	0.0145	0.0133	0.0070	0.0040	0.0074
1	0.0330	0.0398	0.0397	0.0368	0.0351	0.0360
10	0.0906	0.0904	0.0906	0.0906	0.0905	0.0906
100	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725
t	NT=1000	NT=1200	NT=1400	NT=1600	NT=1800	NT=2000
0.01	0.0045	0.0032	-0.0008	-0.0042	-0.0013	0.0032
0.1	0.0124	0.0113	0.0078	0.0048	0.0071	0.0111
1	0.0379	0.0381	0.0373	0.0360	0.0362	0.0372
10	0.0906	0.0906	0.0906	0.0906	0.0906	0.0906
100	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725
t	NT=2200	NT=2400	NT=2600	NT=2800	NT=3000	NT=3200
0.01	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	0.0001
0.1	0.0109	0.0075	0.0057	0.0082	0.0080	0.0104
1	0.0376	0.0371	0.0366	0.0366	0.0367	0.0370
10	0.0906	0.0906	0.0906	0.0906	0.0906	0.0906
100	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725	0.4725

Tabela 4.6- Convergência de SDR_1 de um aquífero não confinado - RCW.

Horizontal						
t	NT=400	NT=500	NT=600	NT=700	NT=800	NT=900
0.01	-0.0028	0.0011	0.0012	0.0002	-0.0003	-0.0003
0.1	0.0082	0.0102	0.0098	0.0093	0.0092	0.0092
1	0.0400	0.0412	0.0410	0.0408	0.0407	0.0407
10	0.0963	0.0962	0.0963	0.0963	0.0963	0.0963
100	0.4753	0.4753	0.4753	0.4753	0.4753	0.4753
t	NT=1000	NT=1200	NT=1400	NT=1600	NT=1800	NT=2000
0.01	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
0.1	0.0096	0.0094	0.0094	0.0093	0.0094	0.0094
1	0.0408	0.0408	0.0408	0.0408	0.0408	0.0408
10	0.0963	0.0963	0.0963	0.0963	0.0963	0.0963
100	0.4753	0.4753	0.4753	0.4753	0.4753	0.4753
t	NT=2200	NT=2400	NT=2600	NT=2800	NT=3000	NT=3200
0.01	0.0001	0.0001	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001
0.1	0.0094	0.0094	0.0094	0.0094	0.0094	0.0094
1	0.0408	0.0408	0.0408	0.0408	0.0408	0.0408
10	0.0963	0.0963	0.0963	0.0963	0.0963	0.0963
100	0.4753	0.4753	0.4753	0.4753	0.4753	0.4753

Antes da análise da solução do sistema transformado será realizada uma análise da solução do problema filtro. Na convergência da solução do problema filtro, Tab. 4.4

observa-se que existem diferenças significativas nas taxas de convergência entre os tipos de poços adotados: se vertical ou horizontal. A convergência nos casos de poços horizontais é mais rapidamente alcançada, com MT em torno de 16000 em $t=1$. No caso dos poços verticais ainda notamos certa oscilação em torno da convergência, o que a retarda MT para em torno de 25000. O número de termos MT é então adotado para o cálculo da série do problema de filtro ajustado para um valor padrão de $MT = 3 \times 10^4$ para todos os casos aqui estudados, com um custo computacional de aproximadamente 15s.

A solução para a série tripla sem um esquema de reordenação requer pelo menos 100 termos em cada direção, dando-nos $NT = 10^6$, com um tempo computacional de aproximadamente dois dias. No entanto, usando os autovalores reordenados numa série simples, esse número é de aproximadamente $NT=2000$ no caso do poço vertical, Tab. 4.5 e $NT=700$ no caso do poço horizontal, Tab. 4.6, em $t=1$. Na verdade, este número é ainda bastante expressivo, mas seu custo computacional não chega a 5 min, o que representa uma redução significativa do custo computacional.

Pelo fato de a função Heaviside Theta, na Eq. (3.86) e (3.87), não possuir definição no zero, a solução proposta não apresenta boa convergência em $z=-z_0$. No entanto, a convergência pode ser alcançada neste ponto fazendo $z \rightarrow -z_0$, adotando-se um incremento dz_0 como aproximação do ponto ou $z=-(z_0+dz_0)$. Para o cálculo das pressões próximas à localização do poço adotou-se, neste trabalho, um incremento $dz_0=0.05$, como ilustrado na Figura 4.9.

Como pode ser visto nas Tabelas 4.5 e 4.6, as taxas de depleção dos rios, inclusive em períodos curtos de bombeamento, convergem mais facilmente no caso do poço horizontal, pois na Tabela 4.5 verifica-se que a convergência somente é alcançada para um número de termos do somatório acima de 2000 NTs, enquanto na Tabela 4.6 já percebemos esta convergência alcançada ainda na parte superior da Tabela, inclusive em tempos curtos de bombeamento $t=10^{-2}$.

Na solução do problema filtro, a função $G_{j,k}$, da Eq. (3.86) ou (3.87) é uma integral definida obtida da integração no comprimento L_k da função $\tilde{G}_j$, o que limita a intensidade do termo fonte nesta região. Por outro lado, o termo fonte que compõe o poço vertical é dado por um pulso infinito, definido pela função delta de Dirac, que caracteriza o poço totalmente penetrante, ou seja, é como se a atuação do poço ocorresse igualmente em toda a extensão da profundidade do aquífero, o que o torna menos

realístico, e naturalmente intensifica a atuação do termo fonte na região. No caso dos poços verticais, não se faz necessária a integração do termo fonte na direção da profundidade ou em qualquer direção, o que possivelmente dificulta a convergência da solução na região próxima ao pulso.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Para o cálculo das taxas de depleção, taxas de armazenamento, taxas de gotejamento e da taxa de drenagem por gravidade, variando no tempo, em um aquífero limitado entre dois rios paralelos de leitos semipermeáveis, definidos por condições de contorno de terceiro tipo, drenado por um poço de bombeamento variável FPVW ou RCW. A condição de contorno superior define um aquífero confinado, gotejante ou não confinado. O modelo proposto neste trabalho unificou os modelos de pressão hidráulica propostos por HUANG *et al.* (2014) e (2015) num aquífero confinado, livre ou gotejante sobre a atuação de um FPVW e um RCW com condição inicial diferente de zero e vazão variável no tempo.

A proposta de solução é dada em torno do problema de autovalor nas três direções por CITT e/ou GITT, com o auxílio de um filtro pseudo-estacionário, a fim de absorver o termo fonte existente na equação geral da pressão. A solução do problema filtro foi também obtida através de transformadas integrais sobre um problema de autovalor bidimensional em função da variável de independente z , contendo solução analítica, para ambos os casos. A solução do problema transiente por transformadas integrais resultou num sistema de EDOs com solução analítica, por CITT, nos casos de aquíferos confinado e/ou gotejante e solução híbrida, por GITT, para aquíferos não confinados.

Visando redução do custo computacional foi empregado um esquema de reordenamento dos autovalores envolvidos nos problemas filtro e homogêneo. O esquema de reordenamento implicou na redução do número de termos necessário à convergência das séries envolvidas na solução do sistema transformado de EDOs, ficando o número de termos estabelecido num valor próximo de $NT=2 \times 10^2$, no caso dos poços verticais e $NT=700$ para os poços RCW. Para a solução do problema filtro o número de termos requerido ficou estabelecido em $MT=3 \times 10^4$.

A solução deste problema sem o uso de filtro acarreta num problema de convergência oscilante, provocada pelo fenômeno de Gibbs (JUNG e SHIZGAL, 2007; PASQUETTI, 2004) sobre as séries envolvidas. Por este motivo se faz necessária a

utilização deste tipo de artifício na melhoria da solução e, por conseguinte, a aceleração da convergência.

A solução por GITT empregada é capaz de garantir excelente convergência nos casos aqui estudados. A variação do parâmetro $w_x \rightarrow \infty$ foi quem apresentou necessidade de maior número de termos nas séries para convergir. No entanto, como o objetivo do modelo proposto é obter soluções de domínio finito, em que o termo fonte esteja próximo à fronteira, simulações em que os rios estejam muito distantes uns dos outros são dispensadas. Nestes casos, tem-se ainda a prerrogativa de que a condição de contorno dos leitos dos rios distantes do poço pode ser do segundo tipo, ao invés de terceiro tipo, passando a uma situação de não fluxo, conforme constata a Figura 4.3.

Os resultados obtidos mostram que a solução proposta oferece contribuição significativa no cálculo destas taxas de interesse num processo de rebaixamento de aquíferos, bem como, no cálculo da distribuição temporal 3D da pressão próxima ao poço, oferecendo também a possibilidade de se estudar problemas com condição inicial e/ou vazão de bombeamento variável. A técnica de transformada integral generalizada GITT, por ser tratar de um método híbrido de fácil controle de erro, dependendo apenas da variação do número de termos contido na série truncada.

5.1 CONCLUSÕES

Destacam-se, portanto, alguns resultados obtidos que são apresentados na ordem a seguir:

- 1- A influência da variação do rendimento específico sobre as SDRs leva ao confinamento do aquífero quando $S_y < 2.5 \times 10^{-5}$, pois a taxa de drenagem por gravidade é praticamente nula, assim como a capacidade de recarga do aquífero por infiltração da água no solo.
- 2- Quanto a posição, orientação ou o número de coletores utilizados nos poços RCW sobre a taxa de depleção dos rios verificou-se que a variação destes parâmetros são menos influentes que a variação da profundidade do poço para a SDR. Como podemos ver na Figura 4.14 a profundidade do aquífero é um fator importante na determinação das taxas de esgotamento do rio, por este motivo fica evidente que a solução de problemas de rebaixamento de lençóis freáticos utilizando poços verticais totalmente penetrantes pode não ser uma boa estimativa na determinação destes fatores de forma realística, fato é que a pressão hidráulica do poço vertical é igual em toda a sua profundidade enquanto nos poços horizontais esta é variável, conforme HUANG *et al.* (2015).

- 3- Quanto ao fato de o modelo incluir as condições de bombeamento e/ou inicial variáveis apresentou-se a possibilidade de se estudar como estes fatores afetam o sistema de rebaixamento e como cada um destes pode influenciar nas taxas de esgotamento, liberação, gotejamento ou drenagem por gravidade do aquífero. Resultados preliminares mostram que a escolha do tipo de vazão de bombeamento é fundamental para as taxas de depleção no início do processo, enquanto o aquífero ainda tem capacidade de recuperar-se, através do gotejamento ou por drenagem gravimétrica. Após este período a taxa de esgotamento seguirá o ritmo da vazão de bombeamento estabelecida.
- 4- A condição em que se encontra o aquífero no momento inicial do bombeamento determina a direção do fluxo de água entre o rio e o aquífero, portanto SDR pode assumir inicialmente valores diferentes de zero, dependendo da concavidade da condição inicial ou do comportamento inicial da vazão de bombeamento.
- 5- A solução proposta por GITT/CITT empregada a problemas de rebaixamento de lençóis freático utilizando poços verticais totalmente penetrantes ou coletores RCW, com vazão de bombeamento e condição inicial variáveis apresentou ganho significativo no avanço da hidrologia de fenômenos desta natureza. Destacamos o fato de que além dos problemas de aquíferos confinados a solução aqui empregada também se apresentara unicamente analítica para aquíferos gotejantes, o que representa um ganho expressivo no estudo dos fenômenos destes dois tipos de aquíferos.

5.2 SUGESTÕES

Como sugestões pra trabalhos futuros, podemos elencar algumas propostas:

- 1- Aplicar GITT ao problema de autovalor e resolver a EDP por CITT.
- 2- Adicionar ao modelo a existência de camadas com propriedades distintas e resolver por GITT, utilizando contagem de sinal na solução do problema de autovalor.
- 3- Resolver o problema de autovalor na direção da profundidade com os autovalores acoplados e resolver a EDP por CITT.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARLOW, P.M., MOENCH, A.F., 1998, **Analytical Solutions and Computer Programs for Hydraulic Interaction of Stream-Aquifer Systems**. Massachusetts, Water Resources Division.
- BEAR, J., 1972, **Dynamics of Fluids in Porous Media**. Dover, New York.
- BEAR, J., 1979, **Hydraulics of Groundwater**. McGraw-Hill. New York.
- BOULTON, N.S., 1954. The drawdown of the water table under non-steady conditions near a pumped well in an unconfined formation. **Proc Inst Civil Eng**, Vol. 3: p. 564–79.
- BOYCE, W E.; R.C. DiPRIMA. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 7. Ed. New York : Wiley, 2000.
- BUTLER, J.J., ZLOTNIK, B.A., TSOU, M.S., 2001. Drawdown and stream depletion produced by pumping in the vicinity of a partially penetrating stream. **Ground Water** 39 (5), 651–659.
- BUTLER, J.J., ZHAN, X., ZLOTNIK, V.A., 2007. Pumping-induced drawdown and stream depletion in a leaky aquifer system. **Ground Water** 45 (2), 178–186. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1745-6584.2006.00272.x>.
- BRASIL. MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. Secretário de Recursos Hídricos e Ambiente Urbano. **Águas Subterrâneas: um recurso a ser conhecido e protegido**. Brasília, 2007.
- BRONSON, R., COSTA, G., 2009. **Schaum's Outline of Differential Equations**. 3th. Ed. McGRAW-HILL. New York.
- CASTELLÕES, F.V., QUARESMA, J.N.N., COTTA, R.M., 2010. Convective heat transfer enhancement in low Reynolds number flows with wavy walls. **Int J Heat Mass Transfer**; 53: 2022-34.
- COTTA, R.M., 1990. Hybrid numerical-analytical approach to nonlinear diffusion problems. **Numer Heat Transfer B** 127, 217-26.
- COTTA, R. M., 1993. **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**, CRC Press.
- COTTA, R.M., 1994. Benchmark results in computational heat and fluid flow: The integral transform method. **Int J Heat Mass Transfer** (invited paper); 37: 381-94.
- COTTA, R.M., 1998. **The integral transform method in thermal and fluids sciences and engineering**. New York: Begell House.
- COTTA, R.M., MIKHAILOV, M.D., 1997. **Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation**. Wiley-Interscience, Chichester, UK.
- COTTA, R.M., MIKHAILOV, M.D., 2006. Hybrid methods and symbolic computations. In: Minkowycz WJ, Sparrow EM, Murthy JY, editors. **Handbook of numerical heat transfer**, 2nd ed., New York: Wiley; p. 493-522.
- COTTA, R.M., KNUPP, D.C., NAVEIRA-COTTA, C.P., SPHAIER, L.A., QUARESMA, J.N.N., 2013. Unified integral transforms algorithm for solving multidimensional nonlinear convection-diffusion problems. **Numerical Heat Transfer**, Part A: Applications 63(11): 840-866.
- COTTA, R.M., NAVEIRA-COTTA, C.P., KNUPP, D.C., 2016. Nonlinear eigenvalue problem in the integral transforms solution of convection-diffusion with nonlinear boundary conditions. **Int. J. Numerical Methods for Heat & Fluid Flow** Vol. 26(3/4): p. 767-789.

- CHEN, C. X., JIAO, J. J., 1999, Numerical simulation of pumping tests in multilayer wells with non-Darcian flow in the wellbore, *Ground Water*, 37(3), 465–474.
- DARCY, H., 1856, **Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application**. Paris, Victor Dalmont, Éditeur.
- FERREIRA, G.T., O Uso de Técnicas Geoestatísticas Para o Mapeamento da Vulnerabilidade Natural do Aquífero Guarani em Área de Recarga. Aplicação na Região de Ribeirão Bonito-Sp. 2014. 97f. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista. São Paulo. 2014.
- FEITOSA, F.A.C. *et al.*, 1997, **Hidrogeologia: Conceitos e Aplicações**. Fortaleza: Serviço Geológico do Brasil (CPRM, LABHID–UFPE).
- FRAGOSO, C.R., NEVES, M.G.F.P., Águas Subterrâneas e hidráulica de poços. Disponível em: < <http://slideplayer.com.br/slide/353727/> >. Acesso em 27 Mar. 2017.
- GLOVER, R.E., BALMER, G.G., 1954. River depletion resulting from pumping a well near a river. *Trans. Am. Geophys. Union* 35 (3), 468–470.
- HILLEL, D., 2004, **Introduction to Environmental Soil Physics**. Academic Press Elsevier.
- HEALY, R.W., COOK, P. G., 2002. Using groundwater level to estimate recharge. **Hydrogeology Journal**, 10, p.91-109. DOI 10.1007/s10040-001-0178-0.
- HUANG, C.S, CHEN, J.-J., YEH, H.D, 2015. Approximate analysis of three-dimensional groundwater flow toward a radial collector well in a finite-extent unconfined aquifer. **Hydrol. Earth Syst. Sci.**, 20, 55–71.
- HUANG, C.S., LIN, W.S, YEH, H.D., 2014. Stream filtration induced by pumping in a confined, unconfined or leaky aquifer bounded by two parallel streams or by a stream and an impervious stratum. **Journal of Hydrology** Vol. 513, p 28–44.
- HUANG, C.S., TSOU, P.R., YEH, H.D., 2012a. An analytical solution for a radial collector well near a stream with a low-permeability streambed. **Journal of Hydrology**. 446, 48–58. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.04.028>.
- HUANG, C.S., YEH, H.D., CHANG, C.H., 2012b. A general analytical solution for groundwater fluctuations due to dual tide in long but narrow islands. **Water Resour. Res.** 48 (5), W05508. <http://dx.doi.org/10.1029/2011WR011211>.
- HUANG, C.S., CHEN, Y.L., YEH, H.D., 2011. A general analytical solution for flow to a single horizontal well by Fourier and Laplace transforms. **Adv. Water Resource**. 34 (5), 640–648. <http://dx.doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.02.015>.
- HUNT, B., 2009. Stream depletion in a two-layer leaky aquifer system. **J. Hydrol. Eng.** 14 (9), 895–903. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.0000063](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000063).
- HUNT, B., 1999. Unsteady stream depletion from ground water pumping. **Ground Water** 37 (1), 98–102.
- HANTUSH, M.S., 1965. Wells near streams with semi-pervious beds. **J. Geophys. Res.** 70 (12), 2829–2838.
- HANTUSH, M.S., PAPADOPOULOS, I.S., 1962. Flow of groundwater to collector wells. *J. Hydr. Eng. Div. – ASCE* 88 (5), 221–244
- HAITJEMA, H., *et al.* 2010. Modeling Flow into Horizontal Wells in a Dupuit-Forchheimer Model. **Ground Water** 48, no. 6: 878–883
- IBGE. Pesquisa Nacional de Saneamento Básico, 2000.
- IMSL Library, MATH/LIB, Houston, TX, 1994.
- INTARAPRASONG, T., ZHAN, H., 2009. A general framework of stream-aquifer interaction caused by variable stream stages. **Journal of Hydrology** 373, p 112–121.

- INTARAPRASONG, T., ZHAN, H., 2007. Capture zone between two streams. **Journal of Hydrology** 338, p 297– 307.
- JENKINS, C.T., 1968. Computation of Rate and Volume of Stream Depletion by Wells. United States Government Printing Office, Washington.
- JOHNSON, A. I., 1967. **Specific Yield-Compilations of Especific Yield for Various Materials**. Geological Survey Water-Supply Paper 1662-D.
- JOSHI, S. D., 2003. Cost/benefits of horizontal wells. Society of Petroleum Engineers Inc. 19–24.
- JURY, W. A., HORTON, R., 2004, **Soil Physics**. Ed. 6, John Wiley & Sons, New York, NY.
- JÚNIOR, A. R. B., 2007, Elementos de Hidrologia Aplicada. Disponível em: <<http://www.em.ufop.br/deciv/departamento/~antenorrodriques/index.php?menu=3&disc=101>>. Acesso em: 21 Nov 2016, 17:55.
- JUNG, J-H. B. D. SHIZGAL., 2007. On the numerical convergence with the inverse polynomial reconstruction method for the resolution of the Gibbs phenomenon. **Journal of Computational Physics**, Vol. 224, p. 477–488.
- KOLLET, S.J, ZLOTNIK, V.A., 2003. Stream depletion predictions using pumping test data from a heterogeneous stream-aquifer system (a case study from the Great Plains, USA). **Journal of Hydrology**, Vol. 281, p. 96–114.
- KOUSSIS, A.D.; MAZI, K.; DESTOUNI, G., 2012. Analytical single-potential, sharp-interface solutions for regional seawater intrusion in sloping unconfined coastal aquifers, with pumping and recharge. **Journal of Hydrology**, 416–417, 1–11.
- LATINOPOULOS, P., 1985. Analytical Solutions for Periodic Well Recharge in Rectangular Aquifers With Third-Kind Boundary Conditions. **Journal of Hydrology**, Vol 77, p. 293-306.
- LEE, E., HYUN, Y., LEE, K. K., SHIN, J. 2012: Hydraulic analysis of a radial collector well for riverbank filtration near Nakdong River, South Korea, **Hydrogeology Journal**. Vol 20, pp 575–589.
- MALLANTS, D. *et al.* 2011. **Leaching of Contaminants to Groundwater**. F.A. Swartjes (ed.), *Dealing with Contaminated Sites*. DOI 10.1007/978-90-481-9757-6_18, C _ Springer Science+Business Media B.V. 2011
- MONTEIRO, E.R, MACÊDO, E.N, QUARESMA, J.N.N., COTTA, R.M., 2010. Laminar flow and convective heat transfer of non-Newtonian fluids in doubly connected ducts. **Int J Heat Mass Transfer**. Vol 53: 2434–2448.
- MIDÔES, C., FERNANDES, J., 2001. **Água subterrânea: conhecer para proteger e preservar**. Lisboa: Instituto Geológico e Mineiro.
- MIKHAILOV, M. D., COTTA, R. M., 1996. Ordering Rules for Double and Triple Eigenseries in the Solution of Multidimensional Heat and Fluid Flow Problems. **Int. Comm. Heat Mass Transfer**, Vol. 23, No. 2, p. 299-303.
- MIKHAILOV, M.D., ÖZISIK, M. NECATI, 1985. Unifies solutions of heat diffusion in a finite region involving a surface film of finite heat capacity. **Int. J. Heat and Mass Transfer**. Vol. 28, No 5, pp. 1039-1045.
- MIKHAILOV, M. D; OZISIK M. N., 1984. **Unified analysis and solution of heat and mass diffusion**. New York: Wiley.
- MIKHAILOV, M. D; N. L. VULCHANOV, 1983. Computational Procedure for Sturm-Liouville Problems. **Journal of Computational Physics** v 50, p 323-336.
- MILLHAM, N. P., B. L. HOWES, 1995. A comparison of methods to determine K in a shallow coastal aquifer, **Ground Water**, 33(1), 49–57.
- MOHAMED, A., RUSHTON, K., 2006. Horizontal wells in shallow aquifers: Field experiment and numerical model. **Journal of Hydrology**. 329, 98– 109.

- NYHOLM, T., CHRISTENSEN, S., RASMUSSEN, K. R.: Flow depletion in a small stream caused by ground water abstraction from wells, **Ground Water**, 40, 425–437, 2002.
- NEUMAN, S. P., 1972. Theory of flow in unconfined aquifers considering delayed response of the water table. *Water Resources Res.*, 8, p. 1031–1045.
- ÖZISIK, M., N; MURRAY, R., L., 1974. On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Conditions. **J. Heat Transfer**, Vol. 96, p. 48-51.
- ÖZISIK, M. N., 1993. **Heat Conduction**. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc. New York.
- OR, D., WRAITH, J, M., TULLER, M., 2002, **Agricultural and Environmental Soil Physics**. Fall.
- PASQUETTI, R., 2004. On inverse methods for the resolution of the Gibbs phenomenon. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Vol. 170, p. 303 – 315.
- PÉREZ GUERRERO, J.S., COTTA, R.M., 1995. Integral transform solution of developing laminar duct flow in Navier-Stokes formulation. **Int J Numer Meth Fluids**; 20: 1203-13.
- PÉREZ GUERRERO, J.S, COTTA, R.M., 1996. Benchmark integral transform results for flow over a backward-facing step. **Comput Fluids**; 25: 527-540.
- PÉREZ GUERRERO, J.S., QUARESMA, J.N.N., COTTA R.M., 2000. Simulation of laminar flow inside ducts of irregular geometry using integral transforms. **Comput Mech**. 25: 413-20.
- RADCLIFFE, D. E., ŠIMŮNEK, J., 2010, **Soil Physics with Hydrus: Modeling and Applications**. New York, CRC Press.
- RUSHTON, K. R., BRASSINGTON, F. C., 2013b: Hydraulic behavior and regional impact of a horizontal well in a shallow aquifer: example from the Sefton Coast, northwest England (UK), **Hydrogeology Journal**. Vol. 21, p. 1117–1128, doi:10.1007/s10040-013-0985-0.
- RUSHTON, K. R., BRASSINGTON, F. C., 2013a: Significance of hydraulic head gradients within horizontal wells in unconfined aquifers of limited saturated thickness, **Journal of Hydrology**. Vol. 492, p. 281–289.
- SAYRE, A .N., 1955, Redefinition of coefficient of storage. Washington, Water Resources Division. Disponível em: <<https://water.usgs.gov/admin/memo/GW/gw55.28.html>>. Acesso em: 03 Dez 2016, 09:45.
- SANTOS, C.A.C., QUARESMA, J.N.N., LIMA, J.A., 2001. Benchmark results for convective heat transfer in ducts: – the integral transform approach. Rio de Janeiro: E–Papers.
- SPHAIER, L.A., QUARESMA, J.N.N, COTTA, R.M., *et al.*, 2011. The UNIT algorithm for solving one-dimensional convection-diffusion problems via integral transforms. **Int Commun Heat Mass Transfer**; 38: 565-71.
- ŠIMŮNEK, J; M. TH. van GENUCHTEN. Contaminant transport in the unsaturated zone: Theory and modeling. In: J., W., DELLEUR (ED.), **Handbook of Groundwater Engineering**, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, p. 22.1-22.46. 2006.
- SILVA, B. T. A., GOMES, C. C., 2007. “Intrusão Marinha em Poços de Exploração de Água Subterrânea, na Beira-Mar de Fortaleza – Ceará”. XVII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos. São Paulo. Brasil, 25-29 Novembro.
- SINGH, S.K.; SWAMEE, P.K., 2009. Stream-flow depletion due to variable pumping discharge. Disponível em: <<https://www.researchgate.net/publication/266024478>>. Acesso em: 28 mar 2017.

- SINGH, S.K., 2005. Rate and Volume of Stream Flow Depletion due to Unsteady Pumping. **Journal of Irrigation and Drainage Engineering**. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9437(2005)131:6(539).
- SUN, D., ZHAN, H., 2007. Pumping induced depletion from two streams. **Advances in Water Resources** Vol. 30 p 1016–1026.
- SUN, D., ZHAN, H., 2006. Flow to a horizontal well in an aquitard–aquifer system. **Journal of Hydrology**. Vol. 321 (1–4), 364–376.
- THEIS, C.V. The effect of a well on the flow of a nearby stream. **EOS Trans. Am. Geophys. Union** 22, 734–738, 1941.
- TSOU, *et al.* 2010. Stream depletion rate with horizontal or slanted wells in confined aquifers near a stream. *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 14, 1477–1485.
- TROEH, F. R., THOMPSON, L. M., 1993, **Soils and Soil Fertility**. Ed. 5, Oxford University.
- USA, NATIONAL GROUND WATER ASSOCIATION, 2011. **Groundwater hydrology**. Disponível em: <<http://www.ngwa.org/Fundamentals/hydrology/Pages/default.aspx>>. Acesso em: 27 mai 2017.
- YEH, H-D., CHANG, Y-C., 2013. Recent advances in modeling of well hydraulics. **Advances in Water Resources**, Vol. 51, p. 27–51.
- YEH, H-D *et al.*,. An analytical solution for tidal fluctuations in unconfined aquifers with a vertical beach, **Water Resource Res.**, 46, W10535, doi: 10.1029/2009WR008746, 2010.
- WARD, N.D., LOUGH, H., 2011. Stream depletion from pumping a semiconfined aquifer in a two-layer leaky aquifer system. **Journal of Hydrologic Engineering**. 16 (11), 955–959. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)HE.1943-5584.0000382](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0000382).
- WENZEL, L. K., FISHEL, V. C., 1942, **Methods for determining permeability of water-bearing materials, with special reference to discharging-well methods, with a section on direct laboratory methods and bibliography on permeability and laminar flow**. Water Supply Paper 887.
- WOLFRAM, S. MATHEMATICA, 1991: A system for doing mathematics by computer, in: The Advanced Book Program, Addison Wesley, Reading, MA.
- ZHAN H, PARK E., 2003. Hydraulics of horizontal wells in leaky aquifers. **Journal of Hydrology**. Vol. 281, p.129–46.
- ZHAN, H., ZLOTNIK, V.A., 2002. Ground water flow to horizontal and slanted wells in unconfined aquifers. **Water Resources Research**. Vol. 38 (7), 1108. <http://dx.doi.org/10.1029/2001WR000401>.
- ZHAN, H., WANG, L.V, PARK, E., 2001. On the horizontal-well pumping tests in anisotropic confined aquifers. **Journal of Hydrology**, Vol. 252, p.37–50.

Apêndice A - Transformação da condição inicial

A transformação integral da condição inicial do problema homogêneo, Eq. (3.60), por meio do núcleo de transformação é como segue:

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) h_H(x, y, z, 0) dz dy dx = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) h_0(x, y, z) dz dy dx -$$

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) h_f(x, y, z; t) dz dy dx$$

da Eq. (3.94), tem-se

$$\bar{h}_{m,p,r}(0) - \sigma \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \Psi_i(x, y, 0) h_H(x, y, 0, 0) dy dx = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) h_0(x, y, z) dz dy dx -$$

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) h_f(x, y, z; 0) dz dy dx$$

como

$$h_H(x, y, 0, 0) = h_0(x, y, 0) - h_f(x, y, 0; 0)$$

então

$$\bar{h}_{m,p,r}(0) = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) h_0(x, y, z) dz dy dx - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) h_f(x, y, z; 0) dz dy dx +$$

$$\sigma \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \Psi_i(x, y, 0) h_0(x, y, 0) dy dx - \sigma \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \Psi_i(x, y, 0) h_f(x, y, 0; 0) dy dx$$

Substituindo na integral acima a pressão filtro $h_f(x, y, z; t)$ pela Eq. (3.95) e as autofunções Ψ_i pela sua forma não ordenada $X_m(x)Y_p(y)Z_r(z)$, tem-se

$$\bar{h}_{m,p,r}(0) = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) h_0(x, y, z) dz dy dx + \sigma \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \Psi_i(x, y, 0) h_0(x, y, 0) dy dx -$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{X_m(x)X_n(x)Y_p(y)Y_q(y)}{N_n N_q} dy dx \int_{-1}^0 Z_r(z) \tilde{\tilde{Z}}_{n,q}(z; 0) dz -$$

$$\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{X_m(x)X_n(x)Y_p(y)Y_q(y)}{N_n N_q} Z_r(0) \tilde{\tilde{Z}}_{n,q}(0; 0) dy dx$$

ou

$$\bar{h}_{m,p,r}(0) = F_{m,p,r} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{X_m(x)X_n(x)Y_p(y)Y_q(y)}{N_n N_q} dy dx \int_{-1}^0 Z_r(z) \tilde{\tilde{Z}}_{n,q}(z; 0) dz -$$

$$\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{X_m(x)X_n(x)Y_p(y)Y_q(y)}{N_n N_q} Z_r(0) \tilde{\tilde{Z}}_{n,q}(0; 0) dy dx$$

em que

$$F_{m,p,r} = \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_{m,p,r}(x,y,z) h_0(x,y,z) dz dy dx + \sigma \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \Psi_{m,p,r}(x,y,0) h_0(x,y,0) dy dx$$

Atendendo as propriedades de ortogonalidade das autofunções

$$\int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{X_m(x) X_n(x) Y_p(y) Y_q(y)}{N_n N_q} dy dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \text{ ou } p \neq q \\ 1 & m = n \text{ e } p = q \end{cases}$$

então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{X_m(x) X_n(x) Y_p(y) Y_q(y)}{N_n N_q} dy dx \int_{-1}^0 Z_r(z) \tilde{\tilde{Z}}_{n,q}(z;0) dz = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \text{ ou } p \neq q \\ \int_{-1}^0 Z_r(z) \tilde{\tilde{Z}}_{m,p}(z;0) dz, & \text{se } m = n \text{ e } p = q \end{cases}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \frac{X_m(x) X_n(x) Y_p(y) Y_q(y)}{N_n N_q} Z_r(0) \tilde{\tilde{Z}}_{n,q}(0;0) dy dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \text{ ou } p \neq q \\ Z_r(0) \tilde{\tilde{Z}}_{m,p}(0;0), & \text{se } m=n \text{ e } p = q \end{cases}$$

portanto,

$$\bar{h}_{m,p,r}(0) = F_{m,p,r} - \int_{-1}^0 Z_r(z) \tilde{\tilde{Z}}_{m,p}(z;0) dz - \sigma Z_r(0) \tilde{\tilde{Z}}_{m,p}(0;0)$$

que na sua forma ordenada é

$$\bar{h}_i(0) = F_i - \int_{-1}^0 Z_i(z) \tilde{\tilde{Z}}_i(z;0) dz - \sigma Z_i(0) \tilde{\tilde{Z}}_i(0;0)$$

Apêndice B - Transformação da equação pseudo-estacionária

A transformação integral da parcela pseudo-estacionária da Equação homogênea (3.59) é

$$\bar{g}_i(t) = - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) \frac{\partial h_f(x, y, z; t)}{\partial t} dz dy dx$$

Das Eqs. (3.77) e (3.86) verificamos que o termo variando no tempo é dado apenas pela função $Q(t)$, portanto, a derivada no tempo consiste apenas na derivada desta função ou $Q'(t)$, desta forma tem-se que

$$\frac{\partial h_f(x, y, z; t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_{n(i)}(x) Y_{p(i)}(y)}{N_{n(i)} N_{p(i)}} \frac{d\tilde{\tilde{Z}}_{n(i)p(i)}(z; t)}{dt}$$

$$\bar{g}_i(t) = - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) \frac{\partial h_f(x, y, z; t)}{\partial t} dz dy dx = \sum_{i=1}^{\infty} M_{i,i}(t)$$

em que:

$$M_{i,i}(t) = - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \Psi_i(x, y, z) \frac{X_{n(i)}(x) Y_{p(i)}(y)}{N_{n(i)} N_{p(i)}} \frac{d\tilde{\tilde{Z}}_{n(i)p(i)}(z; t)}{dt} dz dy dx$$

$$M_{i,i}(t) = - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 X_{n(i)}(x) Y_{p(i)}(y) Z_{r(i)}(z) \frac{X_{n(i)}(x) Y_{p(i)}(y)}{N_{n(i)} N_{p(i)}} \frac{d\tilde{\tilde{Z}}_{n(i)p(i)}(z; t)}{dt} dz dy dx$$

$$M_{i,i}(t) = - \int_0^{w_x} \int_0^{w_y} \int_{-1}^0 \frac{X_{n(i)}(x) X_{n(i)}(x) Y_{p(i)}(y) Y_{p(i)}(y)}{N_{n(i)} N_{p(i)}} Z_{r(i)}(z) \frac{d\tilde{\tilde{Z}}_{n(i)p(i)}(z; t)}{dt} dz dy dx$$

$$M_{i,i}(t) = - \delta_{n(i)n(i)} \delta_{p(i)p(i)} \int_{-1}^0 Z_{r(i)}(z) \frac{d\tilde{\tilde{Z}}_{n(i)p(i)}(z; t)}{dt} dz$$

em que no caso Vertical

$$\tilde{\tilde{Z}}_{n(i)p(i)}(z) = \begin{cases} \frac{\tilde{\tilde{G}}_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0)}{\lambda_i^2} \left(\frac{k' \cosh(\varphi_i z)}{\varphi_i \sinh(\varphi_i) + k' \cosh(\varphi_i)} - 1 \right) & \text{se } \sigma = 0 \\ \frac{\tilde{\tilde{G}}_i(\bar{x}_0, \bar{y}_0) Q(t) e^{-(1+z)\varphi_i} \left[\left(e^{z\varphi_i} - 1 \right) \left(e^{(2+z)\varphi_i} - 1 \right) \sigma Q'(t) - \lambda_i \sqrt{k_z} e^{z\varphi_i} \left(e^{2\varphi_i} - 1 \right) \right]}{2\lambda_i^2 \left[\sigma \cosh(\varphi_i) Q'(t) + \lambda_i \sqrt{k_z} \sinh(\varphi_i) \right]} & \text{se } k' = 0 \end{cases}$$

ou no caso horizontal

$$\tilde{\tilde{Z}}_{n(\hat{i})p(\hat{i})}(z)=\left\{\begin{array}{l} \text{se } \sigma = 0 \\ -\frac{G_{i,k} Q(t)e^{-(z+\bar{z}_0)\varphi_i}}{\sum_{k=1}^N L_k 2\sqrt{k_z} \lambda_i \xi_i} \left\{ \left(1+e^{2(z+1)\varphi_i}\right) \varpi_i - \left(e^{2(z+\bar{z}_0)\varphi_i} - 1\right) \xi_i \theta_{\bar{z}_0}(z+\bar{z}_0) \right\} \\ \text{se } k' = 0 \\ -\frac{G_{i,k} Q(t)}{\sum_{k=1}^N L_k \sqrt{k_z} \lambda_i} \left\{ \chi_i(z;t) - \theta(z+\bar{z}_0) \sinh[(z+\bar{z}_0)\varphi_i] \right\} \end{array}\right.$$